# *ÍNDICE*

**TRABAJO PRÁCTICO 0 para 4to Año**

Esta Guía 0 contiene los prerrequisitos para el curso de matemática que vas a iniciar en el 2008. Para poder abordar los temas de esta asignatura es imprescindible que manejes fluidamente los temas que en ella se proponen.
Las dos primeras semanas de clase del siguiente curso serán destinadas a contestar las dudas que tengas acerca de los ejercicios propuestos. Durante la tercer semana se evaluará, registrándose la nota como primer nota del trimestre del año lectivo

**1.** Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $(-x+2)^3 = 1$ b) $x^3 = x$ c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

d) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ e) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$ f) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{18})\, x = -6$

g) $(x-1)^4 - 3(x-1)^2 = -2$ h) $(m^2 - 1)(m^2 + 3) = 2m^2$

i) $4a^2(1 - a - a^2) = -a^4 + a^3$

j) $3(x^4 - 16)(x^3 - 2x^2 + x) = 0$ k) $\frac{7}{5}\left(1 - \frac{3}{10}y\right)\left(\frac{7}{3} + \frac{14}{9}y\right) = 0$

l) $(x^3 - 8)(x^3 + 8)(6x^2 + 7x + 8)(1 - x) = 0$ m) $9p^9 - 7p^7 = 6p^9 + 2p^7$

**2.** Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ b) $\frac{x+11}{x} = 7 - \frac{9+4x}{x^2}$ c) $4x - \frac{2}{x} = 2x + \frac{35}{3}$

d) $x + \frac{1}{x-3} = 5$ e) $(x - 5\sqrt{x})^2 + 10(x - 5\sqrt{x}) + 24 = 0$ f) $\frac{t+1}{t^2 - 1} = \frac{1}{t-1}$

**3.** Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a) $\left(x + \frac{1}{5}\right)(-3x + 9) \geq 0$ b) $(2x+1) \cdot (3x - 2) < 0$ c) $3x^2 + 15x \geq 0$ d) $(x + 10)^2 \geq -4$

e) $x^4 \leq -5$ f) $|x - 2| \cdot (x^2 - 5) \geq 0$ g) $x^2 - x < 0$

h) $x^2 - \frac{1}{2} \leq 4 - x^2$

i) $(2x-3)^2 > 4(x+1)(x+2)$ j) $x^2 + 2x + 1 \leq 4$ k) $x^3 > x$

**4.** Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas inecuaciones:

a) $\dfrac{25x^2-9}{3+\sqrt{x^2-5}}<0$  b) $\dfrac{2}{x}<-\dfrac{3}{5}$  c) $-\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{5}$  d) $\dfrac{27-x^3}{|x+3|}<0$

e) $\dfrac{|x-2|}{x^2-5}\le 0$  f) $\dfrac{x^2-5}{|x-2|-2}\le 0$  g) $\dfrac{x^2-5}{|x-2|+2}\le 0$  h) $\dfrac{2x-4}{x^2-9}\ge 0$

i) $\dfrac{2}{x}-3<-1$  j) $\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{6}{x}$  k) $\dfrac{3}{x+2}<-2$  l) $\dfrac{3x+2}{x+1}<1$

**5.** Dada la recta **r**: $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$, obtener la ecuación de la recta **s** que cumple con la condición establecida en cada ítem:

a) **s** // **r** y contiene al origen de coordenadas; b) **s** $\perp$ **r** y tiene ordenada al origen -3;

c) **s** $\perp$ **r** e interseca al eje de abscisas en -3; d) **s** // **r** y contiene al punto (2/3; 9).

**6.** ¿Para qué valor de m, las rectas **r**: $(5m - 1)x - y + 2 = 0$ y **s**: $3x - 6y + 9 = 0$ son perpendiculares?

**7.** Un auto circula por la ruta 2 y la distancia (en km) que lo separa de Buenos Aires en función del tiempo (en hs) está dada por una función lineal. Se sabe que a las dos horas de haber partido de la ciudad de origen se encontraba en el km 150 y que media hora más tarde se encontraba a 100 km de Bs. As.

a) Encontrar la fórmula de la función lineal de la que habla el enunciado.

b) ¿Qué parámetro de la fórmula hallada en el ítem a) indica que el auto se acerca a Buenos Aires? ¿Por qué?

c) ¿A qué distancia de Bs. As. se encontraba el automóvil en el momento de partir? ¿A qué velocidad circula?

d) ¿En qué momento pasó por el km 225 de la ruta?

e) Graficar e indicar un dominio que dé cuenta de la situación.

**8.** Escribir la fórmula de una función cuadrática definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que verifique lo pedido en cada caso:

a) su vértice es el punto (-6; 0) y tiene concavidad positiva.

b) su vértice es el punto (–1; -3) y contiene al punto (1; –2).

c) sus raíces son 0 y -2 y tiene concavidad negativa.

d) sus raíces son 3 y -1 y contiene al punto (0; 1).

e) tiene un máximo en $x = -3$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

f) es creciente en $(-\infty; -3)$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

**9.** Se están haciendo pruebas desde un submarino lanzando misiles desde cierta profundidad y registrando su altura, medida en metros respecto del nivel del mar, en función del tiempo, medido en segundos.

Un misil fue lanzado desde una profundidad de 160 m, atravesó la superficie a los 2 seg. de haber sido lanzado y

explotó contra el blanco que flotaba en el mar 6 seg. después.

a) ¿Cuál es la variable independiente del problema? ¿Y la dependiente?

b) Definir la función que permite calcular su altura en función del tiempo sabiendo que se trata de una función

cuadrática. (**Nota**: Dar un dominio que sea coherente con la situación planteada.)

c) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó el proyectil? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿A qué altura se encontraba 1 seg. después de haber sido lanzado? ¿Y a los 3 seg.?

e) ¿En qué intervalo de tiempo estuvo por encima del nivel del mar? ¿Y por debajo?

**10.** Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 10 = 3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -3x(x+2) \\ y = 4(x-1)(x-3) \end{cases}$

**11.** Factorizar cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x$ b) $S(x) = \frac{1}{27}x^3 - 8$ c) $Q(x) = x^2 - 5$

d) $T(x) = (2x+1)^2 - 9$ e) $R(x) = 4x^4 - 12x^3 + 9.x^2$ f) $U(x) = 25x^4 - 16$

g) $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$ h) $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

i) $S(t) = -\frac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 + 2t$

j) $T(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ k) $M(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

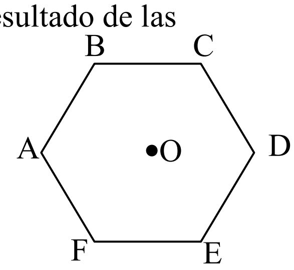
l) $N(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

**12.** Indicar para que valores están definidas las siguientes expresiones y simplificarlas.

a) $\dfrac{x^4-16}{x^4-2x^2-8}$ b) $\dfrac{x^6-1}{x^2-1}$ c) $\dfrac{2t^3+2t^2+2t+2}{t^2+t}$

d) $\dfrac{x^4-2x^3-x^2+2x}{x^3-2x^2}$ e) $\dfrac{-x^3+3x^2-4}{x^3+x^2-6x}$ f) $\dfrac{3x^2-3x}{2x^3-2x^2}$

**13.** Si ABCDEF es un hexágono regular de centro O, obtener el resultado de las siguientes operaciones:




a) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

c) $2.\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FA}$

**14.** Dada la recta de ecuación $y = 2x - 3$, expresar en forma canónica un vector de módulo 5 paralelo a ella.

**15.** Sean $\vec{u}=\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\vec{w}=\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{2}};\sqrt{y}-\sqrt{2}\right)$, encontrar todos los valores de x e y para que $\vec{w}=2.\vec{u}$.

**16.** Indicar si los siguientes pares de vectores son o no perpendiculares.

a) $\vec{a}=(1,1)$ y $\vec{b}=(1,-1)$ b) $\vec{a}=2\check{i}+\check{j}$ y $\vec{b}=2\check{i}-\check{j}$

**17.** Encontrar el valor de $\lambda$ para que el vector $\check{i}+3\check{j}$ sea perpendicular al vector $6\check{i}+\lambda\check{j}$.

**18.** Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verifican que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|=2$, calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

**19.** a) ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{v}$, si $|\vec{v}|=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ y el ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las x es de 60°? (**Nota**: $\cos 60°=\dfrac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

b) Escribir en forma canónica un vector $\vec{w}$ tal que $|\vec{w}|=\dfrac{2.\sqrt{3}}{3}$ y $\vec{w}$ sea paralelo a la recta de ecuación $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$.

c) Verificar analíticamente que $\vec{v}\perp\vec{w}$.

**Respuestas**

**1.** a) {1} b) {0; 1; -1} c) {1; -1; ½; -1/2} d) {3; 2; -2; -1} e) {1/2; -1/2} f) $\left\{-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$

g) {2; 0; $\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1$}

h) $\left\{\sqrt[4]{3}; -\sqrt[4]{3}\right\}$ i) $\left\{0; \frac{5+\sqrt{73}}{-6}; \frac{5-\sqrt{73}}{-6}\right\}$ j) {2; -2; 0; 1} k) {10/3; -3/2} l) {2; -2; 1}

m) $\left\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$

**2.** a) {-10; 10} b) {3; -1/2} c) {6; -1/6} d) {4} e) {16; 1; 9; 4} f) $\mathbb{R}$ - {-1; 1}

**3.** a) [-1/5; 3] b) (-1/2; 2/3) c) $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ d) $\mathbb{R}$ e) $\varnothing$

f) $\left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right) \cup \{2\}$ g) (0; 1) h) [-3/2; 3/2] i) $(-\infty; 1/24)$ j) [-3; 1]

k) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

**4.** a) $\varnothing$ b) (-10/3; 0) c) (-10/3; 0) d) (3; +$\infty$ ) e) $\left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$ f) $\left[-\sqrt{5}; 0\right) \cup \left[\sqrt{5}; 4\right)$

g) $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ h) (-3; 2] $\cup$ (3; + $\infty$ ) i) (-$\infty$ ; 0) $\cup$ (1; + $\infty$ ) j) (-$\infty$ ; 0) k) (-7/2; -2)

l) (-1; -1/2)

**5.** a) y = - 0,5x b) y = 2x - 3 c) y = 2x + 6 d) y = -0,5x + 28/3

**6.** -1/5

**7.** a) y = -100 km/h x + 350 km c) 350 km; 100 km/h d) A las 1,25 h (1 h 15 min.) de haber partido.

**8.** a) Una respuesta posible es $y = (x+6)^2$ b) $y = 1/4\ (x + 1)^2 - 3$ c) Una respuesta posible es y = -x (x + 2).

d) y = -1/3 (x - 3) ( x + 1) e) y f) $y = -2/3\ (x + 3)^2 + 6$

**9.** b) f(t) = –10 (t – 2) (t – 8); Dom(f) = [0; 8] c) 90m a los 5seg. d) A 70m bajo el mar. e) (2; 8) y [0; 2)

**10.** a) {(2; 4); (-1; 1)} b) {(2; 4)} c) $\varnothing$

**11.** a) x (x - 1) (x + 1) b) $1/27\ (x - 6)(x^2 + 6x + 36)$ c) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

d) 4 (x -1) (x + 2) e) $4x^2 (x - 3/2)^2$ f) $25\ (x - 2\sqrt{5}/5)(x + 2\sqrt{5}/5)(x^2 + 4/5)$

g) 8 (x + 1/2) (x + 1) (x - 3/4) h) 4 (x + 1) (x -1/2) (x - 2)

i) $-1/2\ t\ (t + 2)(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ j) $(x - 1)(x + 3)^2$ k) $(x - 2)^2 (x + 3)$

l) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 9)$

**12.** a) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$; $\frac{x^2+4}{x^2+2}$ , b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1 \wedge x \neq -1\}$; $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

c) $\{t \in \mathbb{R} \ / \ t \neq 0 \wedge t \neq -1\}$; $\dfrac{2\left(t^2+1\right)}{t}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0 \wedge x \neq 2\}$; $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -3\}$; $\dfrac{-(x+1)(x-2)}{x(x+3)}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$; $\dfrac{3}{2x}$

**13.** a) $\overrightarrow{CO}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{AO}$

**14.** Una solución posible es $\sqrt{5}\,\check{i} + 2\sqrt{5}\,\check{j}$.

**15.** $(x; y) = \left(\sqrt{3}; 8\right)$ o $(x; y) = \left(-\sqrt{3}; 8\right)$

**17.** $\lambda = -2$

**18.** 2

**19** a) $\vec{v} = (\frac{3}{4}\sqrt{3}; \frac{9}{4})$ b) Una solución posible es $\vec{w} = \check{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\check{j}$.

## *Trabajo Práctico 1: Funciones exponenciales y logarítmicas*

**1.** Los datos de la tabla muestran la longitud *L* de la raíz de una planta de habas en el día n.

| n | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *L* | 1 | 4 | 37 | 50 | 80 | 82 | 83 |

La tabla, ¿puede corresponder a una fórmula del tipo $L=k\ a^n + b$ ? ¿Por qué?

**2.** Se parte de una muestra de dos kilogramos de una sustancia que se reduce un 75% cada año.

a) ¿Cuánto tiempo habrá pasado para que quede una masa de $\frac{1}{32}$ kg.?

b) Definir y graficar una función que modelice el problema.

c) La masa, ¿puede desaparecer?.Argumentar.

**3.** Sean $f_i$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 3^x$ | $f_4(x)= 3^{x-1}$ | $f_7(x) = -3^x$ |
| $f_2(x)=2.3^x$ | $f_5(x) = 3^x+1$ | $f_8(x) = -2.3^x$ |
| $f_3(x)= 3^{2x}$ | $f_6(x) = 3^{-2x}$ | $f_9(x)=- 3^x +1$ |

Para cada una de las funciones:

a) Obtener la ecuación de la asíntota horizontal y la intersección con el eje y.

b) Indicar intervalos de crecimiento o decrecimiento.

c) Representar gráficamente.

**4.** Hallar los números reales a y b tal que la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ /$f(x) = 2^{x+a} + b$ tenga asíntota horizontal en y=1 y f(2) = 3.

**5.** Hallar la fórmula de una función exponencial f creciente de la forma $f(x) = k.a^x + b$, con asíntota horizontal en y= -3 y tal que f(0) = - 2. Si el problema tiene solución, indique si es única.

**6.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $7^{-x+4} = 1$ b) $3^{-x+2} = 9$ c) $25^{x-2} = 5^{-x}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = 4$

**7.** Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2.3^x = 9.\frac{2}{27^x}$ b) $\sqrt{4^{x-1}} = \sqrt[3]{8^{2x}}$ c) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 2^x$ d) $4^{2x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$

e) $(0,5)^{x+3} = 8\sqrt{2}$ f) $4.3^{2x+1} + 17.3^x - 7 = 0$ g) $8^x - 8^{-x} - \frac{3}{2} = 0$

**8.** A partir del gráfico de f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x)= $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$, obtener los gráficos de:

$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_1(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x} + 3$, $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_2(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^{x} + 1$ $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_3(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$

$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_4(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} - 3$ $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_5(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|}$

En cada caso escribir el conjunto imagen , la ecuación de la asíntota horizontal e intersección con el eje y.

**9.** Calcular, utilizando la definición de logaritmo

a) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ c) $\log_{\sqrt{3}} 81$ d) $\log_a a$ ( con a>0, a$\neq$ 1)

**10.** Definir funciones logarítmicas de la forma $f_i$: $A_i \rightarrow \mathbb{R}$ / $f_i(x)=\log_a(x-b)$ que verifiquen las condiciones dadas y obtener el gráfico aproximado de cada una de ellas:

a) Con asíntota vertical en x = -2 y pasa por el punto (2;2).

b) El dominio es ( 4 , + $\infty$ ) y pasa por el punto (6;-1).

**11.** La molaridad en iones de hidrógeno $H_3O^+$ es el cociente entre el número de moles de $H_3O^+$ y el volumen de la solución en litros y se expresa como $[H_3O^+]$. La acidez de una solución se mide por su pH (potencia hidrógeno) que se define por: pH= $-\log[H_3O^+]$, definición propuesta por el químico danés Sörensen en 1909.

a)¿Cuál es el pH (redondeado a dos decimales) de una solución que contiene $3.10^{-5}$ moles de $H_3O^+$ por litro?

b)¿Cuál es la molaridad en iones $H_3O^+$ de una solución para la cual el pH es 2?¿Y si el pH es 9?

c) Evaluar el porcentaje de descenso de la molaridad en iones $H_3O^+$ cuando el pH de una solución varía de 2 a 3.

**12.** Graficar cada una de las siguientes funciones $f_i$: $A_i \rightarrow \mathbb{R}$, indicando: dominio, ecuación de la asíntota vertical, intersección con el eje y, ceros, conjunto de positividad y negatividad, crecimiento y /o decrecimiento.

a) $f_1(x) = \log_2 x$ b) $f_2(x)=-\log_{\frac{1}{4}} x$ c) $f_3(x) = 1 - \log_{\frac{1}{4}} x$

d) $f_4(x)=2.\log_2 x$ e) $f_5(x)=\left|\log_{\frac{1}{4}} x\right|$ f) $f_6(x) = \log_5 |x+5|$

**13.** Una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto es medir la actividad (A) de carbono 14 presente en el mismo. Esta actividad viene dada por: $A = 15{,}3.(0{,}866)^{t}$ donde t es la antigüedad en miles de años y A se mide en desintegraciones por minuto por gramo (dpm/g) de carbono 14.
Calcular la antigüedad aproximada de un objeto en el que A= 7,65 dpm/g

**14.** Encontrar, si es posible, $x \in \mathbb{R} / \log_3\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right)=1$

**15.** Calcular:

a) $\log_{\sqrt{2}}\left(2^{-30}\right)$ b) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5^{-3}}$ c) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}$ d) $\log_{\sqrt{3}} 1$

**16.** Qué relación tiene que existir entre a y b para que se verifique que:
$\log a + \log b = 0$ ( $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ )

**17.** Calcular a sabiendo:
$\log_a n = 2$ y $\log_a 64.n = 5$

**18.** Resolver en $\mathbb{R}$

a) $\sqrt[3]{\log x} + \log x = 10$ (Pista: sustituir $\sqrt[3]{\log x}$ )
b) $\log(x^2) = (\log x)^2$

c) $\log_2(x^{-1}) + (\log_2 x)^{-1} = -\frac{3}{2}$
d) $\log_2(9-2^x) = 3-x$

**19.** Encontrar k y a para que el gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)= k.a^x$ pase por los puntos P y Q si

a) P(-2;16) y Q(2;1)
b) P(3;1/3 ) y Q( 1;3)

**20.** Encontrar el error del siguiente razonamiento:

$(-1)^4 = 1^4 \Rightarrow \log_a (-1)^4 = \log_a 1^4 \Rightarrow 4\log_a (-1) = 4.\log_a 1$ (por logaritmo de una potencia) aplicando logaritmo a ambos miembros
$\log_a (-1) = \log_a 1 \Rightarrow -1 = 1$, por ser log una función inyectiva

**21.** Resolver en $\mathbb{R}$

a. $\log_3(x^2 - 12x + 20) = 2$
b. $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$

c. $\log_{35} x + \log_{35}(12 - x) = 1$
d. $x^{\log x} = 100x$

e. $\log_2\left[\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)\right] = 4$
f. $10^x.100^{1/x} = 1000$

**22.** Sea f: $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = k + \log_a(x+b)$

a. Encontrar a, k y b sabiendo que los puntos (0,-3), (1,-4) y $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ pertenecen al gráfico de f
b. Para los valores obtenidos, analizar la existencia de la función inversa y, si es posible, obtenerla. Si existen, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados
c. Graficar ambas en forma aproximada e indique ecuaciones de las asíntotas.

## Respuestas

1) No. Con las tres primeras columnas se obtiene: L=0,3.$\left(\sqrt{11}\right)^n$ + 0,7 , pero 50 $\neq$ 0,3.$\left(\sqrt{11}\right)^6$ + 0,7

2) a) 3 años; 4) a=-1; b=1 ;5) $f(x) = a^x - 3$ , con a>1. ;6) a) x= 4; b) x= 0; c) x= 4/3; d) x = -7
7) a)x= 0,5; b)x=-1 ; c)x=0,75; d)x=-1; e)x= -6,5; f)x=-1; g) x= 1/3
9) a) –2; b) –1/2; c) 8 ; d) 1 ; 10) a) $f_1: (-2,+\infty) \to \mathbb{R} / f_1(x) = \log_2(x+2)$ , b) $f_2: (4,+\infty) \to \mathbb{R} / f_2(x) = \log_{1/2}(x-4)$
11)a) ph $\cong$ 4,52; b) 0,01; c) 990% ; 13) aprox. 4.818 años; 14) x= 6/5 ; 15) a) –60; b) 3/2; c) –6; d)0.; 16) a.b= 1; 17) a=4
18) a)S=$\{10^8\}$ ;b) S={1,100} ; c) S=$\left\{4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ d)S={0,3} ; 19)a) k = 4, a= 0,5 ; b) k=9, a = 1/3;
21) a) S ={1,11}; b) S={100, 1/10}; c)S={7,5}; d) S={100, 1/10}; e) S= $\{2^{128}\}$ ; f) S={1,2}-; 22) a) a= ½; b=1; k=-3

# *Trabajo Práctico 2: Funciones Trigonométricas*

**1.** Completar las tablas estableciendo las equivalencias entre el sistema sexagesimal y el circular

**a)**

| sexagesimal | 360º | 330° | 300° | 270º | | | | 150° | | 120° | 90º | 60° | | 30º |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| circular | $2\pi$ | | | | $\frac{4}{3}\pi$ | $7\frac{\pi}{6}$ | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | | | $\frac{1}{4}\pi$ | |

**b)**

| sexagesimal | 1° | 300°30´ | -1250° | | |
|---|---|---|---|---|---|
| circular | | | | 3 | $\frac{\pi}{12}$ |

**2.** Demostrar cada una de las siguientes relaciones entre funciones trigonométricas de un mismo ángulo

**a)** $\mathrm{sen}(u).\mathrm{cosec}(u) = 1, \ (u \in R / u \neq k\pi \ \text{ con } \ k \in Z)$

**b)** $\cos(u).\sec(u) = 1, (u \in R / u \neq (2k+1).\frac{\pi}{2} \ \text{ con } \ k \in Z)$

**c)** $\mathrm{tg}(u).\mathrm{cotg}(u) = 1, (u \in R / u \neq k.\frac{\pi}{2} \ \text{ con } \ k \in Z)$

**d)** $\mathrm{tg}(u) = \frac{\mathrm{sen}(u)}{\cos(u)}, (u \in R / u \neq (2k+1).\frac{\pi}{2} \ \text{ con } \ k \in Z)$

**e)** $\mathrm{sen}^2(u) + \cos^2(u) = 1, (u \in R)$

**f)** $1 + \mathrm{tg}^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} = \sec^2(u), (u \in R / u \neq (2k+1).\frac{\pi}{2} \ \text{ con } \ k \in Z)$

**g)** $1 + \mathrm{cotg}^2(u) = \frac{1}{\mathrm{sen}^2(u)} = \mathrm{cosec}^2(u), (u \in R / u \neq k\pi \ \text{ con } \ k \in Z)$

**3.** Usando las relaciones demostradas en el problema 2, calcular todas las funciones de $\alpha$ en cada uno de los siguientes casos:

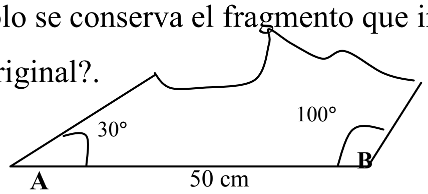
**a)** $\mathrm{sen}\,\alpha = -\frac{12}{13} \quad (\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2})$

**b)** $\mathrm{tg}\,\alpha = 2 \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

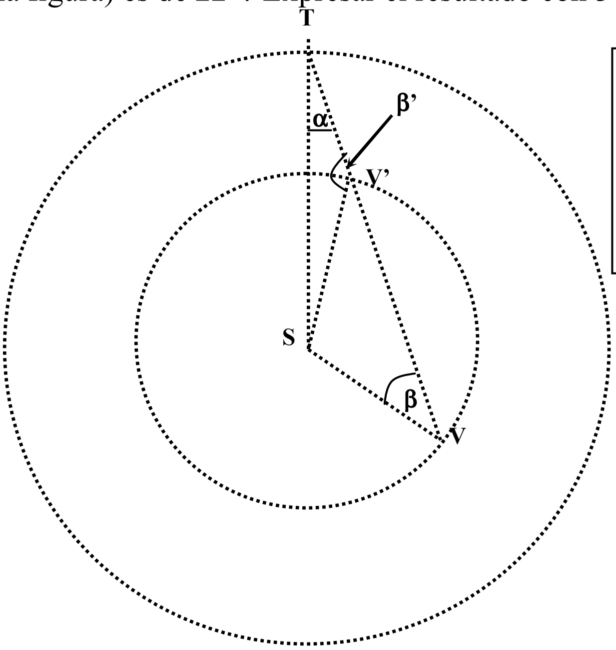
**c)** $\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0)$

**4.** Demostrar : $\mathrm{tg}\,\alpha = a \Rightarrow |\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha| = \frac{|a|}{a^2+1}$

**5.** Se quiere reconstruir un triángulo del que sólo se conserva el fragmento que indica la figura. ¿Qué dimensiones tenía la pieza original?.



**6.** Si se considera que las órbitas de la Tierra y de Venus en torno al Sol son círculos de radios respectivos 150.000.000 km y de 109.000.000 km. ¿A qué distancia se encuentra Venus de la Tierra cuando el ángulo de observación Sol-Tierra-Venus ( $\hat{\alpha}$ en la figura) es de 22°? Expresar el resultado con 3 cifras significativas.

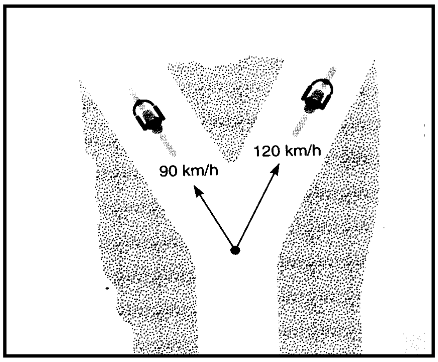



***CUIDADO***

Con estos datos pueden construirse dos triángulos

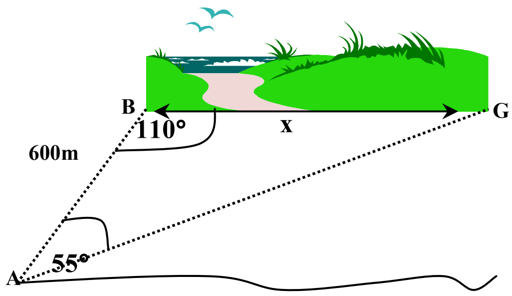
^ ^

**7.**




Dos motociclistas parten del punto en que se bifurcan dos carreteras rectas que forman un ángulo de 55°. Viajan a 90 km/h y 120 km/h respectivamente ¿A qué distancia se encuentran uno de otro al cabo de 3 minutos?

**8.** Desde un punto A de la costa se divisa una isla cercana. Con los datos de la figura, calcule la longitud x de la isla.



**9.** Verificar las siguientes identidades. Determinar, en cada caso, el conjunto en el que son válidas

**a)** $\dfrac{\cos\alpha}{\cot g\alpha} = \text{sen}\alpha$

**b)** $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$

**c)** $(\text{tg}\alpha - 1)^2 = \sec^2\alpha - 2\text{tg}\alpha$

**d)** $\dfrac{1}{\sec^2\alpha} = 1 - \dfrac{1}{\cos ec^2\alpha}$

**e)** $\sec\alpha - \cos\alpha = \text{sen}\alpha.\text{tg}\alpha$

**f)** $(1\text{-sen}\,\alpha).(1\text{+sen}\,\alpha) = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}$

**g)** $\dfrac{\cot g\alpha - 1}{1 - \text{tg}\alpha} = \dfrac{\cos ec\alpha}{\sec\alpha}$

**h)** $\dfrac{1+\sec\alpha}{\cos ec\alpha} = \text{sen}\alpha + \text{tg}\alpha$

**i)** $\cot g^2\alpha - \cos^4\alpha.\cos ec^2\alpha = \cos^2\alpha$

**j)** $\sec^4\alpha - \text{tg}^4\alpha = 1 + 2\text{tg}^2\alpha$

**k)** $\sec\alpha.\text{sen}\alpha + 1 = \dfrac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

**l)** $\text{tg}\alpha + \cot g\alpha = \sec\alpha\cos ec\alpha$

**m)** $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 2\text{tg}\alpha\cos^2\alpha + 1$

**n)** $\dfrac{\sec\alpha + 1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{\text{tg}\alpha}{\sec\alpha - 1}$

**10.** Reducir cada una de las siguientes expresiones

**a)** $x = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}$

**b)** $x = \dfrac{2\text{sen}\alpha - \text{sen}(2\alpha)}{2\text{sen}\alpha + \text{sen}(2\alpha)}$

**11.** Verificar las siguientes identidades. Determinar, en cada caso, el conjunto en el que son válidas

**a)** $\text{sen}\beta = \dfrac{2\text{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1+\text{tg}^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$

**b)** $\cos\alpha = \dfrac{1-\text{tg}^2\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)}{1+\text{tg}^2\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)}$

**c)** $\text{tg}2\beta = \dfrac{2\text{tg}\beta}{1-\text{tg}^2\beta}$

**d)** $2 + \text{tg}(2\beta)\text{tg}\beta = \dfrac{\text{tg}(2\beta)}{\text{tg}\beta}$

**12.** Expresar sen(3x) y cos (3x) en función de cosx y senx.

**13.** Resolver las siguientes ecuaciones

**a)** $-2 + \sqrt{3}\cos ecx = 0$

**b)** $\cos^2 x = \cos x$

**c)** $\cos(2x) = 0{,}5$

**d)** $\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{1}{2}\sec x = 0$

**e)** $\cos^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x - \frac{1}{2} = 0$

**f)** $\sec x + \operatorname{tg} x = 1$

**g)** $\operatorname{sen}x + \operatorname{tg} x = 0$

**h)** $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) = 0$

**i)** $\operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1{,}25$

**j)** $\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x + 2 = 0$

**k)** $4\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 7$

**l)** $\cos(2x) = 1 - \operatorname{sen}x$

**14.** Demostrar que

**a)** sen p + sen q = 2 sen$\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

**b)** cos p + cos q = 2 cos$\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(Pista: hacer la sustitución $\begin{cases}\alpha+\beta = p\\ \alpha-\beta = q\end{cases}$ )

**15.** Verificar las siguientes identidades e indicar, para cada una, el conjunto en el que es válida:

**a)** $\frac{\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos x + \operatorname{sen}x} = 1 - \operatorname{sen}x.\cos x$ (Pista: Recordar cómo se factorea $a^3+b^3$)

**b)** $\frac{\cos(-x)}{1+\operatorname{tg}(-x)} - \frac{\operatorname{sen}(-x)}{1+\operatorname{cotg}(-x)} = \operatorname{sen}x + \cos x$

**c)** $\operatorname{cosec}^4 x - \operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{cotg}^4 x + \operatorname{cotg}^2 x$

**d)** $\frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha} = \cos(2\alpha)$

**16.** Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

**i)** $4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0$

**ii)** $2\operatorname{sen} t \cos^2 t = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$

**iii)** $\operatorname{tg}^4\varphi - 2\sec^2\varphi + 3 = 0$

**iv)** $\operatorname{sen}x + \sqrt{\operatorname{sen}x} = 0$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f(x) = A\operatorname{sen}(Bx+C)$ con $A\in\mathbb{R}-\{0\}$, $B\in\mathbb{R}^+$, $C\in\mathbb{R}$,
$|A|$ recibe el nombre de amplitud; B el de pulsación; C es la fase inicial; p=$\frac{2\pi}{B}$ es el período y
$\alpha = -\frac{C}{B}$ es el ángulo de desfasaje.

**17.** Dadas las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ :

**a)** $y = \text{sen}(2x)$

**b)** $y = \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

**c)** $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

**d)** $y = 2\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

**e)** $y = 5.\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

**f)** $y = -4.\text{sen}2.\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Se pide:

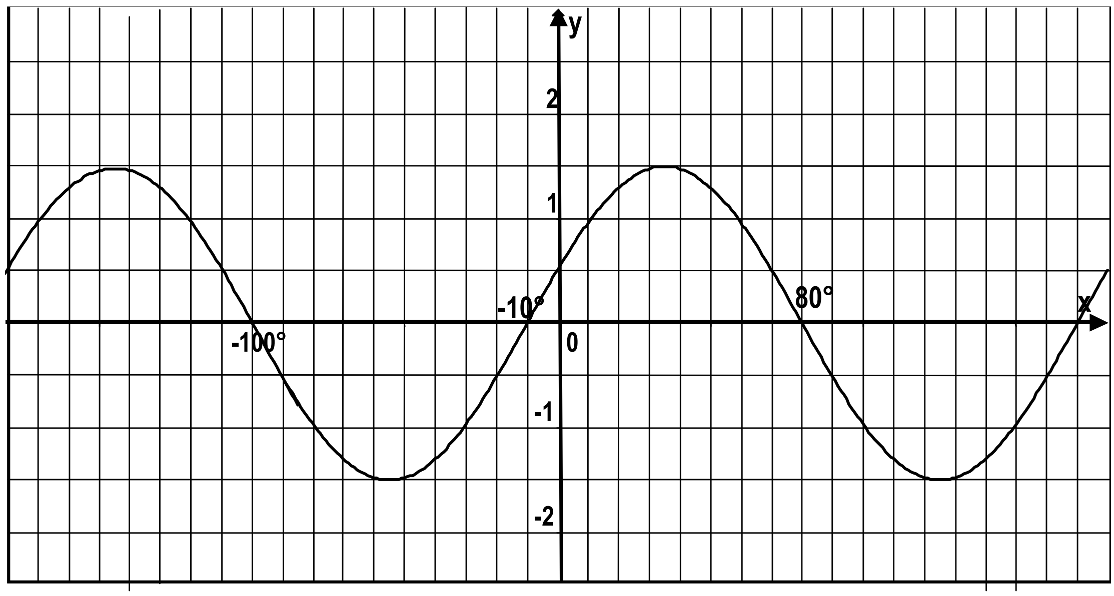
**i)** Amplitud, pulsación , ángulo de desfasaje y período.

**ii)** Representación gráfica aproximada

**iii)** Máximos y mínimos

**iv)** $C_0$, $C_+$, $C_-$.

**18.** El gráfico corresponde a una función de la forma $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = A\text{sen}[bx + \alpha]$




**a)** Encontrar A, b y $\alpha$.

**b)** Determinar amplitud, pulsación ,ángulo de desfasaje y período.

**19.** **a)**Representar gráficamente f:R→R/ f(x) = 2 sen $3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

**b)** Determinar amplitud, pulsación, período y desfasaje.

**c)** Encuentre una función g: R→R que tenga la misma gráfica que f , que responda a una fórmula del tipo g(x)= A cos(ax+b). Justifique,

**20.** Una boya en un canal se balancea hacia arriba y hacia abajo con el movimiento de las olas. La boya se mueve un total de 60 cm desde su punto más alto hasta su punto más bajo y regresa a su punto más alto cada 10 segundos. Sabiendo que en t=0 la boya se encuentra en su punto más alto, escribir una ecuación que describa su movimiento. Obtener un gráfico aproximado.

**21.** El número de predadores y el número de presas, en un sistema predador - presa tiende a variar periódicamente. En una cierta región con halcones como predadores y roedores como presas, la población de roedores R varía de acuerdo con la ecuación $R = 1200 + 300\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y la población de halcones varía con la ecuación $H = 250 + 25.\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, con t medido en años desde el 1° de enero de 2000.

**a)** ¿Cuál era la población aproximada de roedores y cuál la de halcones el 1° de enero de 2000?

**b)** ¿Cuáles son las poblaciones máximas de roedores y halcones? Estos máximos, ¿ocurren alguna vez al mismo tiempo?

**c)** ¿En qué fecha se alcanzó la primera población máxima de roedores?

**d)** ¿Cuál es la mínima población de halcones? ¿En qué fecha se alcanzó por primera vez?

**22.** Resolver en $\mathbb{R}$

| | |
|---|---|
| a) $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$ | b) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ |
| c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ | d) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \text{tg}\,3x$ |

**23.** Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = -2\ \text{sen}\left(bx + \frac{\pi}{3}\right)$ con $b \in \mathbb{R}^+$

a) Obtener b sabiendo que la distancia entre dos ceros consecutivos es $\frac{2\pi}{3}$.

b) Encontrar el conjunto de ceros, el conjunto de valores de x para los que f presenta máximos y el conjunto de valores de x para los que f presenta mínimos.

c) Realizar el gráfico aproximado.

Rtas:

1) a)

| sexagesimal | 360° | 330° | 300° | 270° | **240°** | **210°** | **180°** | 150° | **135°** | 120° | 90° | 60° | | 30° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| circular | $2\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $7\frac{\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{\pi}{6}$ |

b)

| sexagesimal | 1° | 300°30´ | -1250° | **171°53´14,4”** | **15°** |
|---|---|---|---|---|---|
| circular | $\frac{\pi}{180} \cong 0{,}017$ | $\frac{601}{360}\pi \cong 5{,}245$ | $-\frac{125}{18}\pi \cong 21{,}817$ | 3 | $\frac{\pi}{12}$ |

3)

| | sen | cos | tg | cosec | sec | cotg |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | -13/12 | **-5/13** | **12/5** | **-13/12** | **-13/5** | **5/12** |
| b) | $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ | **2** | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $\sqrt{5}$ | **172** |
| c) | -1/2 | $\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}/3$ | **-2** | $-2\sqrt{3}/3$ | $-\sqrt{3}$ |

5)32,64cm y 64,28 cm aprox.;6) 4,57.$10^7$ km y 2,32.$10^8$ km ; 7) aprox 5 km; 8) aprox.1899 m ; 10) a) cotg$\beta$, b) $tg^2(\alpha/2)$

12) sen (3x)=3senx $\cos^2$x - $sen^3$x ; cos(3x)= $\cos^3$ x – 3 cosx $sen^2$x

13)a) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=2\frac{\pi}{3}+2k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$ ; b) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=2k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$ ;

c) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$ ; d) $\varnothing$ ; e) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$

f) $x=2k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$, g) x=k$\pi$ , con k$\in\mathbb{Z}$ ; h) $x=k\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$

i) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$ ; j) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \vee x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$ , con k$\in\mathbb{Z}$

k) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ , con k $\in\mathbb{Z}$ , l) $x=k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ , con k$\in\mathbb{Z}$

15) a) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, con k$\in\mathbb{Z}$ ; b) $t=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee t=-\frac{\pi}{6}+k\pi \vee t=\frac{2}{3}\pi+k\pi$ , con k$\in\mathbb{Z}$

c) $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ , con k $\in\mathbb{Z}$ , d) $x=k\pi, \text{con } k\in\mathbb{Z}$ ; 18) a) A=3/2, b=2, $\alpha=\frac{\pi}{9}$ ; 20)

$x=30\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \vee x=30\,sen\left(\frac{\pi}{5}t+\frac{\pi}{2}\right)$

21) a) 1200 y 232,b)1500, 275, no, c) 1/1/2001, d)225, 1/7/2003 ;22) a) $\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi, 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{-\frac{\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi, -\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{15}+\frac{k}{5}\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ ; 23) a)9 b= 3/2; b) $C_0$= $\left\{x\in\mathbb{R} / x=-\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right\}$ ;

$C_{máx}$= $\left\{x\in\mathbb{R} / x=-\frac{5}{9}\pi+\frac{4}{3}k\pi\right\}$ ; $C_{mín}$= $\left\{x\in\mathbb{R} / x=\frac{1}{9}\pi+\frac{4}{3}k\pi\right\}$

# *Trabajo Práctico 3: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.*

**1.** Si ABCD es un paralelogramo y O es el punto de intersección de las diagonales, realizar las siguientes operaciones entre vectores:

a) $2.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ b) $\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{DB}$ c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{CO}$

d) $2.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-2.\overrightarrow{AB}$

**2.** Dados P= (-3,-2) y Q= (3,-4) obtener:

a) las componentes de $\overrightarrow{PQ}$ y expresar dicho vector en forma canónica

b) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{QP}\right\|$

c) el versor asociado a $\overrightarrow{PQ}$

d) un vector de módulo 3, con la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$, pero de sentido contrario.

**3.** Si $\vec{u}=3.\check{i}+\check{j}$; $\vec{v}=(-2,5)$, hallar

a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $3.\vec{u}-\vec{v}$ c) $\frac{1}{2}.\vec{u}-\frac{3}{2}\vec{v}$

**4.** Dados $\vec{u}=2\check{i}-\check{j}$ y $\vec{v}=\check{i}-3\check{j}$

a) Obtener $\vec{u}+\vec{v}$.

b) Comparar $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$ con $\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$.

c) ¿En qué caso se cumple que $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ ?

**5.** Encontrar todos los vectores de módulo 10 que resulten paralelos a $\vec{a}=3\check{i}+4\check{j}$.

**6.** Encontrar dos versores perpendiculares al vector $\vec{a}=\check{i}+2\check{j}$.

**7.** Encontrar, en cada caso, el ángulo determinado por:

a) $\vec{a}=3\check{i}+\check{j}$ y $\vec{b}=\check{i}+2\check{j}$ b) $\vec{a}=-3\check{i}+\check{j}$ y $\vec{b}=6\check{i}-2\check{j}$

**8.** Demostrar que para cualquier vector $\vec{u}$ ,no nulo, se cumple que: $\left\|\frac{1}{\left\|\vec{u}\right\|}\cdot\vec{u}\right\|=1$

**9.** Dados los puntos A=(1,1),B=(2,3), C=(5,x) y D=(y,1).

a) Determinar x e y para que ABCD sea un paralelogramo.
b) Con los valores x e y hallados en a), calcular el perímetro del paralelogramo.

**10.** Sean los puntos A =(3,-1) ,B =(7,0), C= (6,4) y D= (2,3).

a) Demostrar analíticamente que ABCD es un cuadrado.
b) Verificar analíticamente la perpendicularidad de las diagonales.

**11.** Demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente

**12.** Encontrar el vector $\vec{x}$ tal que :

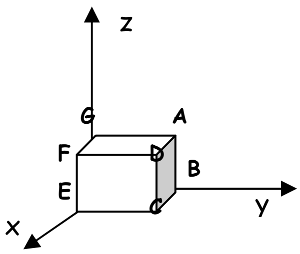
a) $(3,3,2)+\vec{x}=(1,4,1)$ b) $(3,2,1)+\vec{x}-(1,1,3)+(2,4,1)=(2,3,5)$

**13.** Dados los puntos A=(2;0;0), B(0;1;0) y C=(0;0;5)

a) Dibujar en el espacio el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y calcular su perímetro.

b) Dibujar $\left\{P \in \mathbb{R}^3 / \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = 1\right\}$. Encontrar la ecuación que caracteriza la figura dibujada.

**14.**




La figura muestra un prisma de base rectangular apoyado sobre los planos coordenados, de tal forma que el vértice oculto es el origen de coordenadas (O)

a) Si B=(0,2,0), E=(1,0,0) y G=(0,0,1), determinar los ángulos que forma $\overrightarrow{OD}$ con los versores $\check{i}, \check{j}$ y $\check{k}$ respectivamente

b) Encontrar un vector de módulo 4 que tenga la dirección y sentido de $\overrightarrow{OD}$.

**15.** Hallar todos los vectores $\vec{c}$ de $\mathbf{R}^3$ que verifiquen:
$\left\|\vec{u} \times \vec{v} + 23.\breve{i}\right\|^2 = \vec{u}\,.\,\vec{c}$, siendo $\vec{u}=(0;1;7)$, $\vec{v}=(1;4;5)$ y $\vec{c}=(x;y;7)$.

**16.** Sean los vectores $\vec{A}=(-2;1;1)$ y $\vec{B}=(-1;1;3)$. Obtener todos los $\vec{C}$ tales que $\vec{C}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}$ sea ortogonal a $\vec{A}$, con $\alpha \in R$ y $\beta \in R$ y $\left\|\vec{C}\right\|=\sqrt{5}$

**17.** Si $\vec{A}=(1;1;0)$, $\vec{B}=(0;-1;1)$ y $\vec{C}=(-4x^2;1;2)$, hallar x tal que $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=-7$

**18.** Encontrar un versor perpendicular a los vectores (-1,2,5) y (0,3,1).¿Es único?

**19.** Sean los vectores $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,x,y)$ y $\vec{c}=(0,1,1)$. Hallar todos los vectores $\vec{b}$ tales que $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c} \wedge \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2=\vec{a}\cdot\vec{c}+7$.

**20.** Dados los puntos A=(1,2,3), B=(4,6,3) y C =(3,2,3), calcular el área del triángulo ABC.

## Respuestas

1) a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $2.\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BC}$ ; 2) . a) $6\check{i}-2\check{j}$ ; b) $2\sqrt{10}$ ; c) $\frac{3}{10}\sqrt{10}\,\check{i}-\frac{1}{10}\sqrt{10}\,\check{j}$ ; d) $-\frac{9}{10}\sqrt{10}\,\check{i}+\frac{3}{10}\sqrt{10}\,\check{j}$

3) a) (1,6) b) (11,-2) c) $(\frac{9}{2},-7)$ ; 4) a) (3,-4) b) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ c) $\vec{u}/7\vec{v}$ y del mismo sentido

5) ( 6,8) y (-6,-8) ; 6) $-\frac{2}{5}\sqrt{5}\,\check{i}+\frac{\sqrt{5}}{5}\check{j}$ y $\frac{2}{5}\sqrt{5}\,\check{i}-\frac{\sqrt{5}}{5}\check{j}$ ; 7) a) $\alpha = 45°$ b) $\alpha = 180°$

9) a) x=3 , y=4 b) 6+2 $\sqrt{5}$ ;12) a) (-2,1,-1) b) (-2,-2,6) ; 13)a) aprox .12,72. b) $(x-2)^2+y^2+z^2=1$

14) a) $\alpha_1=\alpha_3 \cong 65°54'19'';\alpha_2 \cong 35°15'52''$ , c) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6},\frac{4}{3}\sqrt{6},\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ ; 15) (x,1,7), con x$\in \mathbb{R}$

16) $\vec{C}=$ (1,0,2) ó $\vec{C}=$ (-1,0,-2) ; 17) x=1 ó x= -1; 18) $\left(-\frac{13}{179}\sqrt{179},\frac{\sqrt{179}}{179},-\frac{3}{179}\sqrt{179}\right)$,no

19) $\vec{b}=(0,2,2)\vee\vec{b}=(0,-2,-2)$ ; 20) 4

## *Trabajo Práctico 4:*

## *Geometría en $\mathbb{R}^3$ .Sistemas de ecuaciones lineales.*

**1.** Hallar, en cada caso, una ecuación cartesiana para el plano $\beta$ que verifica las condiciones pedidas:

a) $P_0=(2,1,-1)\in\beta\wedge\vec{a}\perp\beta$, siendo $\vec{a}=(1,-2,3)$.

b) los puntos (3,-1,2), (4,-1,-1) y (2,02) pertenecen a $\beta$.

c) (3,-1,2)$\in\beta\wedge\beta//\vec{a}\wedge\beta//\vec{b}$, siendo $\vec{a}=(3,1,-1)$ y $\vec{b}=(1,-1,1)$.

d) (2,1,-1)$\in\beta$ y los ángulos directores de un vector normal a $\beta$ son: $\alpha_1=\dfrac{\pi}{3}$, $\alpha_2=\dfrac{2\pi}{3}$ y $\alpha_3=\dfrac{\pi}{4}$.

**2.** Dados los puntos P=(-1,2,3), Q=(1,-1,1) y R=(2,1,-1) hallar :

a) ecuaciones de las rectas PQ, QR y PR

b) una ecuación del plano que determinan P,Q y R.

c) ecuaciones de las rectas que incluyen a las alturas de $P\overset{\triangle}{Q}R$

d) Verificar analíticamente que las rectas que incluyen a las alturas del triángulo concurren en un punto.

**3.** Representar en $\mathbb{R}^3$ cada uno de los siguientes planos:

a) z= 2 ; b) x = 5 ; c) y = 1 ; d) x + 2y = 4 ; e) x – 2y = 4 ;

f) 2 x – z = 4 ; g) 2x +z = 4 ; h) 2y + z = 6 ; i) 2x + y + 4z = 4

**4.** Una ecuación del plano $\beta$ es: 3x - y + z - 2 = 0 y las de la recta **r** son: $\begin{cases} x-2=\frac{1}{2}(z-2) \\ y=1 \end{cases}$

a) Hallar $\{P_o\}=\beta\cap\mathbf{r}$.

b) Obtener una ecuación del plano $\pi$ /$\pi\perp\beta$ y $\mathbf{r}\subset\pi$

c) Encontrar una ecuación vectorial para la recta **s** / $\mathbf{s}\subset\pi$, $\mathbf{s}\perp\mathbf{r}$ $\wedge$ $P_o\in$ **s**.

**5.** Considerar las rectas $r_1\rightarrow\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-3z-2=0 \end{cases}$ y $\mathbf{r_2}\rightarrow x-1=\dfrac{2y+10}{5}=\dfrac{2z+6}{3}$

a) Obtener **,** si es posible, $\mathbf{r_1}\cap\mathbf{r_2}$

b) Hallar, si es posible, una ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_1}$ determinado por ambas rectas.

c) Encontrar una ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_2}$ / $\boldsymbol{\pi_2}\perp\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi_2}\cap\boldsymbol{\pi_1}=r_1$

**6.** Considerar la recta **r** $\begin{cases} 4x-y+z-10=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$

a) Obtener una ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$ que incluye a **r** y al que pertenece $P_0$ (2,3,4).

b) Hallar ecuaciones simétricas de la recta **r´** / r´ // r $\wedge$ $P_0\in$ r´**.**

c) Verificar analíticamente que **r´** $\subset$ $\boldsymbol{\pi}$ **.**

**7.** Sean el punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, la recta r de ecuación vectorial $\vec{X}=\vec{P_1}+\lambda\vec{A}$ y el plano $\alpha$ de ecuación $ax+by+cz+d=0$, demostrar que:

a) la distancia entre $P_0$ y r es : $d(P_0,r)=\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\check{A}\right\|$

b) la distancia entre $P_0$ y $\alpha$ es $d(P_0,\alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**8.** Sea $P_0=(1,-2,-1)$ , calcule la distancia entre $P_0$ y

a) la recta de ecuación $\dfrac{x-2}{2}=y=\dfrac{z+1}{-2}$

b) el plano de ecuación $x+y+2z=3$

**9.** Sea $\pi$ el plano de ecuación $x+2y+z=4$ , y m la recta definida por $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{2z-1}{2}$

a) Encuentre $\{P_0\}=\pi\cap m$

b) Determine todos los puntos $Q\in m$ tales que $\left\|\overrightarrow{P_0Q}\right\|=3$

c) Obtenga una ecuación del plano $\beta/\beta\perp\pi\wedge m\subset\beta$

d) Determine una ecuación de s = $\beta\cap\pi$

e) Halle ecuaciones de las rectas paralelas a s, a las que pertenezcan los puntos Q determinados en b). Investigue si están o no incluidas en $\beta$

**10.** Calcular el volumen de un cubo, sabiendo que una de sus caras está incluida en el plano $\pi$ de ecuación: $2x-2y+z=5$ y la cara opuesta en un plano que incluye a la recta $m\rightarrow\dfrac{x}{2}-1,5=\dfrac{4-y}{-3}=\dfrac{9-3z}{-6}$

**11.** Resolver por el método de Gauss cada uno de los siguientes sistemas lineales e interprete geométricamente la solución

a) $\begin{cases} x+\quad z=1\\ -x+2y-z=3\end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=0\\ 3x+4y=-1\\ 2x-y=3\end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+z=1\\ x-2y+z=0\\ 3x-4y+z=3\end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+2y+3z=10\\ 6x-2y+z=22\\ 4x-4y-2z=12\end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=3\\ x-y-z=-1\\ x+3y+3z=1\end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z+t=0\\ x-y-z+t=0\\ x+3y+2z+t=0\end{cases}$

**12.** Encontrar en cada caso, por el método de Gauss, el conjunto solución de :

a) $\begin{cases} 3x+2y-z=-15\\ 5x+3y+2z=0\\ 11x+7y=-30\\ 3x+y+3z=11\end{cases}$ a) b) $\begin{cases} x+y+z=0\\ -2x+5y+2z=0\\ -7x+7y+z=0\end{cases}$ c) $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=0\\ x_1-4x_2-13x_3=0\\ -3x_1+5x_2+4x_3=0\end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3 = 2 \\ 3x_1-2x_2-x_3 = 5 \\ 2x_1-5x_2+3x_3 = -4 \\ x_1+4x_2+6x_3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-4x_4 = 1 \\ x_1+3x_2+7x_3+2x_4 = 2 \\ x_1-12x_2-11x_3-16x_4 = 5 \end{cases}$,

f) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4 = 2 \\ 2x_1+5x_2-8x_3+6x_4 = 5 \\ 3x_1+4x_2-5x_3+2x_4 = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 = 7 \\ 3x_1+2x_2+x_3 = -3 \\ x_2+x_3 = 5 \end{cases}$

**13.** Halle en cada caso los valores de k para que cada uno de los siguientes sistemas tenga solución única, infinitas soluciones o sea incompatible. Interprete geométricamente.

a) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3 = k \\ x_1+x_2+kx_3 = 2 \\ 2x_1+3x_2-x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ 3x-y+5z = 2 \\ 4x+y+(k^2-14)z = k+2 \end{cases}$

**14.** Un químico tiene 3 botellas de igual capacidad con el mismo ácido, una con solución al 10%, otra con solución al 5% y la tercera con solución al 4%. Con ellas pudo preparar una mezcla de 100 $cm^3$ de solución al 6%. lo logró usando media botella de la solución al 10%, toda la botella de solución al 5% y una parte de la botella de la solución al 4%. ¿Qué volumen utilizó de cada solución? ¿Cuál es la capacidad de cada botella?

**15.** Se quiere obtener una mezcla de 360 kg de avena para forraje de \$37 el kg. Se tiene en existencia avena de \$35 el kg , de \$38 el kg y de \$41 el kg. ¿Cuántos kg de cada precio habrá que mezclar?

**16.** Dado el sistema $\begin{cases} x+y+(k+1)z = 0 \\ x+(k+1)y+z = 0 \\ (k+1)x-y+z = 0 \end{cases}$,

a) ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema resulte incompatible? Justificar

b) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema es:

- compatible determinado
- compatible indeterminado

c)Resolver para k= 0 e interprete geométricamente

Respuestas

1) a) x-2y+3z+3=0; b) 3x + 3y + z –8 =0; c) y + z –1 =0 ; d) $x-y+\sqrt{2}z = 1-\sqrt{2}$

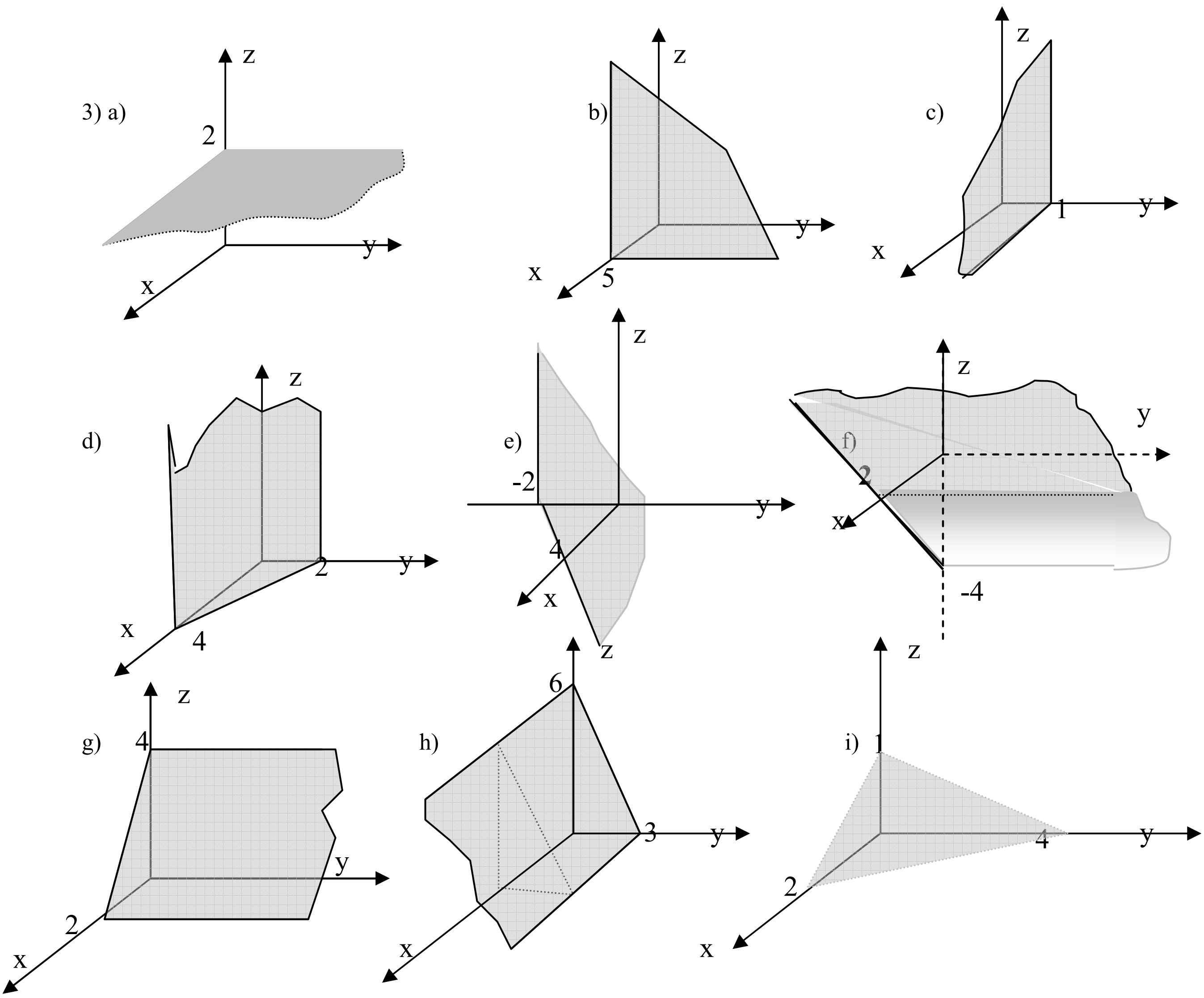
2)a) PQ $\rightarrow \vec{X} = (-1,2,3)+\lambda(-2,3,2)$ ; QR $\rightarrow \vec{X} = (1,-1,1)+\lambda(-1,-2,2)$ ; PR $\rightarrow \vec{X} = (-1,2,3)+\lambda(-3,1,4)$

b) 10x +2y +7z -15=0

c) $h_{\overline{PQ}} \rightarrow \vec{X} = (2,1,-1)+\lambda(-1,-2,2)$ ; $h_{\overline{RQ}} \rightarrow \vec{X} = (-1,2,3)+\mu(2,-3,-2)$ ; $h_{\overline{PR}} \rightarrow \vec{X} = (1,-1,1)+\gamma(1,-61,16)$

d)Las alturas concurren en (1,-1,1). obsérvese que es el vértice Q del triángulo, de lo que puede deducirse que el triángulo es rectángulo. (Puede verificarse viendo que se cumple la relación pitagórica entre sus lados)

3)




4) a) $P_0$=(1,1,0) ; b) 2x + 5y –z -7 =0 ; c) $\vec{X} = (1,1,0) + \lambda(2,-1,-1)$

5) a)Las rectas son paralelas no coincidentes.; b) 3y – 5z =0 ; c) 17 x – 5y -3z –17 =0-

6) a) 27x - 6y + 8z = 68 ; b) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-4}{-3}$ ; 8) a) $\dfrac{\sqrt{29}}{3}$ , b) $\sqrt{6}$

9)a) $P_0$=(1,1,1); b) $Q_1$=(3,-1,2), $Q_2$=(-1,3,0) ; c) 4x + y –6z +1 =0 ; d) $\vec{X} = (1,1,1) + \lambda(13,-10,7)$

e) $\vec{X} = (3,-1,2) + \lambda(13,-10,7)$ , $\vec{X} = (-1,3,0) + \lambda(13,-10,7)$ . Están incluidas en $\beta$

10) V= $\dfrac{64}{27}$ ;11) a) S={(1,2,0)+t(-1,0,1)/t∈ $\mathbb{R}$ }; b) S= $\varnothing$ ; c)S= $\left\{\left(\dfrac{5}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ ; d) S= {(4,1,0)+t(1,2,-2)/t ∈ $\mathbb{R}$ }

e) $S = \varnothing$ f) S= $\{t(-1,0,0,1)/t \in \mathbb{R}\}$ ;

12) a) S={(-4,2,7)}; b) S={ t.(-3/7,-4/7,1) /t∈ $\mathbb{R}$ }; c) S={ t.(7,5,-1 ) /t∈ $\mathbb{R}$ }; d) S={(2,1,-1)}; e) S= $\varnothing$ ;

f) $S = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^4 / \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ , g) S={(1,-11,16)}

13) a) k≠3, solución única; k=3, infinitas soluciones; b) |k|≠4, solución única; k=4, infitas soluciones; k=-4, sistema incompatible; 14) (25,50,25); 15) (120,240,0) + t(1,-2,1) con 0<t<120

16)a) No, los sistemas homogéneos siempre tienen por lo menos solución trivial, b) k=0 , k=1, sist. comp.. indet.; $k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ , sist. Comp. Det. C) S= $\{t(-1,0,1)/t \in \mathbb{R}\}$

# *Trabajo Práctico 5: Números complejos*

**1.** Dados $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + 3i$, y $z_3 = 1 - i$, calcular:

a) $(z_1 + z_2)^2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2 . z_3}$ c) $2z_1 - \left(z_2^2 - z_1\right) - \dfrac{z_3}{z_2}$

d) $|z_1|^2 + \left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)^{-1}$ e) $\dfrac{z_2^2 + |z_3|^2}{\overline{z_1}}$ f) $i^{43} z_1 + \dfrac{i^{37}}{z_2} - i^{122}\overline{z_3}$

**2.** Hallar x e y reales tales que:

a) $y - 3i + xi = 2 - y + 5i$ **b)** $(1+2i).x + (3 - 5i)\, y = 1 - 3i$

**c)** $x + 2 - (x - y).i = 3y + 2i$ **d)** $(1+i).(x+2y) - (3-2i)\,).(x-y) = 8 + 3i$

**3.** a)Encontrar x para que $z = (3 + 2i).(x + 6i)$ sea imaginario puro.

b)Encontrar x para que $z = \dfrac{x + 3i}{2 - 5i}$ sea un complejo real.

**4.** Hallar los valores de $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ para que $(p+q) + (p-q)\, i$ sea igual a $2 - i$ .

**5.** Establecer las condiciones para que el producto de dos números complejos sea:

a) imaginario puro b) complejo real

**6.** Encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que :

a) $i.z = 1$ b) $(3 - i).z = i$

c) $(1 - i)^2 = \dfrac{i}{z}$ d) $z.i + z = 2\sqrt{3} - 2i$

e) $\dfrac{z - 1}{z + 1} = 2 + i$ f) $\dfrac{2i}{z + i} = 1 + 2i$

g) $\dfrac{-1 + (z - 1)i}{i^{16}} = \dfrac{i^{27}}{-1 - i}$ h) $\dfrac{-i^{19} + \left(1 - \overline{z}\right).i}{i^5} = (2 - i).i^{17}$

**7.** Demostrar que:

a) $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{-z} = -\overline{z}$

b) $\forall z \in \mathbb{C} : z.\overline{z} = |z|^2$

c) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

d) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

e) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} - \{(0,0)\} : \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

**8.** Representar en el plano el conjunto solución de:

a) $\mathrm{Re}(z) = 5$  b) $-1 \le \mathrm{Im}(z) < 3$  **1.** $|z+1| > 2$

d) $-1 < \mathrm{Re}(z) < 3$  e) $|z - 1 + i| = 2$  f) $|z+i| = |z+2i|$

g) $|z|^2 = z + \bar{z}$  h) $\mathrm{Re}\left(z + z^{-1}\right) = 0$  i) $z - \bar{z} = i$

**9.** Resolver los siguientes sistemas en $\mathbb{C}$

a) $\begin{cases} z + z' = 3 \\ 2z - z' = i \end{cases}$  b) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$  c) $\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1 + 4i \end{cases}$

**10.** Dados los números complejos:

$z_1 = \sqrt{3} + i$ , $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = -2i$ , y $z_5 = 1 - \sqrt{3}\,i$

a) Representarlos y escribirlos en forma polar y trigonométrica .
b) Resolver utilizando la forma polar. Expresar el resultado en forma binómica.

i. $z_1^6$  ii. $(z_3 . z_5)^4$  iii. $\dfrac{\overline{z_5}}{z_3} . \dfrac{z_1}{z_2}$  iv. $(z_1)^{-5}$

**11.** Resolver las siguientes operaciones:

a) $(2 - 2i)^6$  b) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$  c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{12}$

**12.** Sea $z_1 = 1 + i^{133}$
a) Expresar $z_1$ en forma trigonométrica
b) Obtener $z_2 = z_1^{\ 12}$ .(Expresar el resultado en forma cartesiana)
c) Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ / $z^4 = z_2$ y escribirlos en forma polar.

**13.** Sean $P(x) = a.x^2 + bx + c$ con a, b y c reales y $z \in \mathbb{C}$ . Demostrar que: $P(z) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bar{z}\right) = 0$

**14.** Factorizar en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

a) $x^4 - 1$  b) $x^4 + 1$  c) $x^3 - 1$

d) $x^3 + 1$  e) $x^4 - 3x^2 - 4$  f) $x^5 - x^4 + 16x - 16$

**15.** Obtener en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$  b) $-3x^2 = 2(x-2)^2 - 3$  c) $x^3 + x^2 + x = 0$

d) $2z^2 - 3z + 4 = 0$  e) $5z^2 - 3z = 0$  f) $\dfrac{3}{2}z^2 + 2z + \dfrac{4}{3} = 0$

**16.** Factorizar, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, los siguientes polinomios

a) $A(x) = 5z^2 - 3z + \dfrac{9}{20}$  b) $B(x) = x^4 + x^2 + 1$

c) $C(x) = x^2 + 8x + 52$  d) $D(x) = 2x^4 + 8x^2 + 4$

**17.** Escribir la factorización en $\mathbb{R}$ de un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales que tenga como raíces 7, -3+4i, . ¿Es único?

**18.** Representar en el plano el conjunto de números complejos que verifica:

a) $|z| < 2 \ \wedge \ 0<\text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$

b) $|z| < 2 \ \wedge \ 0<\text{Arg}(i.z) < \frac{\pi}{4}$

c) $\text{Re}(z+\bar{z})\text{-i.Im}(z-\bar{z}) + z.\bar{z} = -1$

d) $\frac{\pi}{3} \le \text{Arg}\left(z^2\right) \le \frac{\pi}{2} \wedge |z| > 1 \wedge \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \le 2$

**19.** Determinar el conjunto de números complejos que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: $\begin{cases} |z| = 2 \\ 2.\text{Re}(z) = \text{Im}(z^2) \end{cases}$

**20.** Escribir la factorización en $\mathbb{R}$ de un polinomio p(x) con coeficientes reales de **<u>grado mínimo</u>** tal que:

a) tenga a $z_1 = 5$ , y a $z_2 = 2i$ como raíces dobles.

b) tenga alguna raíz múltiple y que todas las soluciones de la ecuación $z^2 - 3iz = 0$ sean raíces de p(x).

# Respuestas:

1): a) –4; b) $-\frac{3}{26}-\frac{11}{26}i$ ; c) $\frac{148}{13}+\frac{118}{13}i$ ;d) $\frac{60}{13}-\frac{1}{13}i$ ; e) $-\frac{18}{5}-\frac{21}{5}i$ ; f) $\frac{3}{13}-\frac{15}{13}i$

2) a) x=8, y=1 ; b) x= -4/11, y=5/11 ; c) x= -2 ; y = 0 ; d) x=1,y = 2

3) a) x=4; b) x=-6/5 ; 4) $p=\frac{1}{2}$ ;$q=\frac{3}{2}$ ; 6) a) z= -I; b) – 0,1+ 0,3.i ; c) z= - 0,5 ; d)z= $\left(-1+\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i$ ;

e) z= -2 + I ; f)z= $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ ; g)z= $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$ ; h)z= 1+2i

9) a) $z=1+\frac{1}{3}i; z'=2-\frac{1}{3}i$ b) $z=1+i; z'=2-i$ c) $z=8+i; z'=-1+6i$

10) b) i. –64 ; ii. $32-32\sqrt{3}\,i$ ; iii. 0,683-0,183 i ; iv. $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$ ; 11) a) 512i ; b) $-8-8\sqrt{3}i$ ; c)1

12) a) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ ; b) $z_2=(-64,0)$ ; c) $\left\{\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right),\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right),\left(2\sqrt{2};\frac{5\pi}{4}\right),\left(2\sqrt{2};\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$

14) a) En $\mathbb{R}$ : (x+1).(x-1). $(x^2+1)$; en $\mathbb{C}$ : (x+1).(x-1)(x+i).(x- i) ;

b) En $\mathbb{R}$ : $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ ; en $\mathbb{C}$ : $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

c) En $\mathbb{R}$ (x – 1)$(x^2$ +x +1); en $\mathbb{C}$ : $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

d) En $\mathbb{R}$ (x –+1)$(x^2$ - x +1); en $\mathbb{C}$ : $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

e) En $\mathbb{R}$ : (x+2)(x-2)$(x^2$+1); en $\mathbb{C}$ : (x+2)(x-2)(x + i)(x – i)

f) En $\mathbb{R}$ : $(x-1).(x^2-2\sqrt{2}x+4).(x^2+2\sqrt{2}x+4)$ ;

en $\mathbb{C}$ : $(x-1)(x-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$

15): a) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ , $S_{\mathbb{C}}=\{2i,-2i\}$ b) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ , $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i,\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right\}$

c) $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$ , $S_{\mathbb{C}}=\left\{0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ d) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ , $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i,\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i\right\}$

e) $S_{\mathbb{R}}=S_{\mathbb{C}}=\left\{0,\frac{3}{5}\right\}$ f) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ , $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i,-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\right\}$

16) a) en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ :A(x)= $5\left(x-\frac{3}{10}\right)^2$ ;

b) en $\mathbb{R}$ : B(x)=($x^2$ +x+1). ($x^2$ - x+1). en $\mathbb{C}$ : $\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

c) en $\mathbb{R}$ : C(x)= $x^2$+8x+52 ; en $\mathbb{C}$ :C(x)= $(x+4+6i)(x+4-6i)$

d) en $\mathbb{R}$ : D(x)= $2(x^2+2-\sqrt{2})(x^2+2+\sqrt{2})$ ; en $\mathbb{C}$ :D(x)=

$2\left(x-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(x+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(x-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(x+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

17)k(x-7)($x^2$ +6x + 25) con k$\in \mathbb{R}-\{0\}$

19) S=$\{2i;-2i;\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\}$

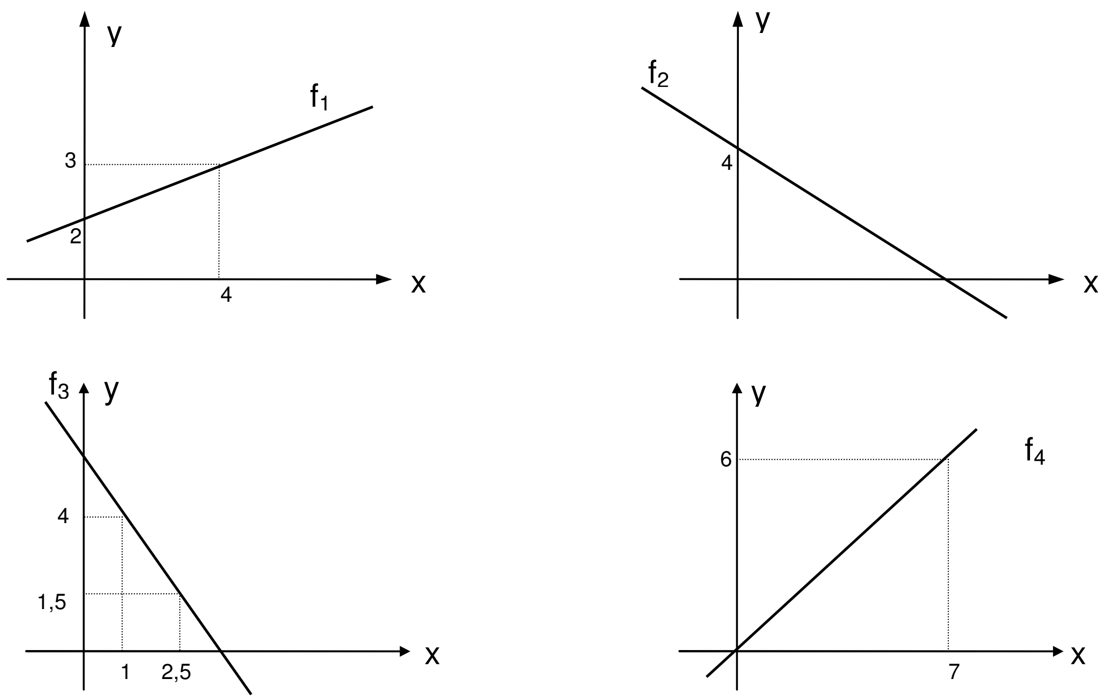
20) a) Una solución posible es p(x)= $(x-5)^2(x^2+4)^2$ ; b) Una solución posible es p(x)= $x^2.(x^2+9)$

# ***TRABAJO PRACTICO Nº0 para 5to año***

Para poder abordar esta asignatura es imprescindible por parte del alumno, un fluido manejo de la operatoria en el campo real como así también, de las expresiones algebraicas y la construcción de gráficas de funciones elementales. Todos estos conceptos han sido desarrollados en los años anteriores y se dedicará tan sólo dos semanas a un repaso de ello con la correspondiente evaluación y calificación para el primer trimestre del año lectivo.

## Funciones

**1)** Las siguientes, son cuatro gráficas correspondientes a funciones lineales de dominio real. Acorde con los datos indicados en cada caso. Hallar sus respectivas formas explícitas.




**2)** De una función lineal "f" se saben los siguientes datos: Pasa por los puntos $A=(8\,;-1)$ y $A=(10\,;-2)$. A partir de ello, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones resultan verdaderas:

a) Su ordenada al origen es b=3 y su conjunto de ceros es $C_0=\{6\}$

b) El punto $P_0=(5\,;\frac{1}{2})$ pertenece a gráfica de la misma

c) La recta “r” de ecuación $y = 2x + 4$ es perpendicular a ella

d) La expresión de la función inversa es $f^{-1}(x) = -2x + 6$

e) El conjunto de positividad de f es el intervalo $C^{+} = (6;+\infty)$

f) La función y su inversa se interceptan en el punto $M = (2;2)$

**3)** Hallar la expresión de la función cuadrática de $\Re \to \Re$ que cumple en cada caso con los requisitos pedidos:

a) $V = (1;3)$ y contiene al punto $P_0 = (0;2)$

b) $x_1 = 2$ ; $x_2 = 4$ y contiene al punto $P_0 = (3;3)$.

c) La suma de sus raíces es -2, su producto es -24 y pasa por $P_0 = (0;12)$

d) Pasa por los puntos $A = (2;3)$; $B = (-2;-9)$; $C = (0;5)$

e) Intercepta al eje y en el punto $A = (0;5)$; la $x_v$ = 2 y el coeficiente del término cuadrático y el lineal difieren en 1.

**4)** Dadas las funciones $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - k \\ g(x) = x + 2k \end{cases}$. Analizar, para qué valores de “k”, la recta resulta secante, tangente o exterior a la parábola.

**5)** Sea “f” la función lineal que tiene pendiente -2 y pasa por el punto $A = (4;2)$ y la parábola definida por $g(x) = (x-3).(x-5)$. Representar gráficamente ambas curvas y analizar en qué intervalo o unión de intervalos se verifica que $f(x) \geq g(x)$ .

**6)** Factorizar el polinomio $P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$ y hallar sus intervalos de positividad y negatividad.

**7)** Hallar la expresión polinómica de grado 4 que cumple las siguientes condiciones: El conjunto de ceros es $C_0 = \{\frac{1}{2}; -1; 1; 3\}$ y además contiene al punto; $A = (-\frac{1}{2}; -\frac{21}{4})$.

**8)** En el polinomio $A(x) = x^4 - ax^3 + bx^2$ dos de sus raíces son $x = 3$ y $x = -1$. ¿Qué valores toman a y b? ¿Cuál es su expresión factorizada?

**9)** Al dividir $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por $Q(x) = x - 3$ se obtuvo 10 como resto. Hallar el valor de a.

**10)** Dadas las funciones definidas por las fórmulas:

a) $f_1 : A \to \Re \ / \ f_1(x) = 1 - \frac{1}{2} . 2^x$

b) $f_2 : A \to \Re \ / \ f_2(x) = 4 - 2. \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f_3 : A \to \Re \ / \ f_3(x) = 2 \ \log_2(2x-4) - 1$

d) $f_4 : A \to \Re \ / \ f_4(x) = 1 + \ \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$

Se pide, para cada una de ellas, hallar: Dominio, ecuación de la recta asíntota, ceros, gráfico aproximado, crecimiento, decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad y calcular la función inversa. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

**11)** Calcular ceros, máximos y mínimos y graficar aproximadamente las funciones dadas a continuación en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

a) $f_1(x) = \operatorname{sen}(2.x - \pi)$

b) $f_2(x) = -3 \cos\left(\frac{3x}{2} - \pi\right)$

c) $f_3(x) = 1 - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $f_4(x) = \sqrt{2} - 2 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

## ALGEBRA DE FUNCIONES

### IGUALDAD

Dos funciones f: Df → B y g: Dg → C son iguales cuando:
Df = Dg ; B = C y para todo x: f(x) = g(x)
Por ejemplo:

Las funciones $f: R - \{2\} \to R / f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y g: R→R/ g (x) = x+2

no son iguales ya que $D_f \neq$ Dg , sin embargo, notemos que para todo x≠2, f(x) = g(x). Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo g(2) = 4

Si definimos una función h: R→R/ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ , resulta h = g

### SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x) \quad \forall\ x$ , siendo $D(f+g) = Df \cap Dg$

$(f.g)_{(x)} = f(x).g(x) \quad \forall\ x$ , siendo $D(f.g) = Df \cap Dg$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)_{(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \forall\ x$ , siendo $D\left(\frac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{x \in R / g(x) \neq 0\}$

Ejemplo:

Sean f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ $D_f$ = R-{1} y g(x)= $\sqrt{x}$ $D_g$= $R_0^+$ entonces,

$(f+g)_{(x)} = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ $\qquad D_{f+g} = R_0^+ - \{1\}$

$(f.g)_{(x)} = \dfrac{1}{x-1} . \sqrt{x}$ $\qquad D_{f.g} = R_0^+ - \{1\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}=\frac{1}{(x-1).\sqrt{x}} \qquad D_{\frac{f}{g}}=R^{+}-\{1\}$$

**COMPOSICION DE FUNCIONES**

Analicemos la siguiente situación: el área de un círculo depende del radio. Si a su vez el radio aumenta al transcurrir el tiempo según la función r(t) = 3t, resulta:

$$A(r) = \pi.r^2 \quad \text{con } r(t)=3t$$

El área del círculo, depende entonces del tiempo a través de la función $A[r(t)]=\pi.(3t)^2$

**Definición:** Dadas dos funciones f:Df→Im f y g:Dg → Im g y tales que Im f $\subset$ Dg, llamamos función compuesta g sobre f, a gof: Df → Im g / para todo x , gof(x) = g[f(x)]

Observaciones:

* La imagen de f debe estar incluida en el dominio de g para que todos los elementos de Df tengan imagen a través de la función compuesta gof.
* La imagen de g es, en general, el codominio de la compuesta y no su conjunto imagen, ya que puede haber elementos en el dominio de g que no sean imagen de ningún elemento de Df (si la inclusión es estricta)
* Si la inclusión pedida en la definición no se verifica, pueden hacerse las restricciones necesarias para la composición.

Ejemplo:

Sean f(x) = 2x+1 y g(x)= $\frac{1}{x-1}$

Df=R Im f=R

Dg=R-{1} Im g=R-{0}

Para realizar la composición "gof" debemos verificar que la imagen de la primer función a aplicar "f" esté incluida en el dominio de la segunda función a aplicar (g) .

Esto no se verifica, entonces realizamos la siguiente restricción:

Como necesitamos que "1" no pertenezca a Im f, para eliminarlo, restringimos Df.

Notemos que 2x+1=1 cuando x=0. Bastará entonces tomar como Df * =R-{0}, luego la Imagen correspondiente será Im f=R-{1} que coincide (y por lo tanto está incluida) en Dg.

A pesar de que, hechas las restricciones las funciones no son las mismas, usaremos por comodidad las mismas letras para nombrarlas.

Ahora; gof:R-{0} → R-{0} / gof(x) = g[f(x)] = g[2x+1]= $\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$

Para hallar fog, debemos analizar si la Im g está incluida en el Df.

Como R-{0} $\subset$ R, podemos realizar la composición:

$$\text{fog:R-\{1\}} \rightarrow \text{R / fog(x) = f[g(x)]=} f\left(\frac{1}{x-1}\right)=2.\frac{1}{x-1}+1=\frac{1+x}{x-1}$$

Notemos que como la inclusión es estricta, el conjunto R es el codominio y no la imagen de la función compuesta fog

Como vemos, fog ≠ gof. La composición de funciones no es una operación conmutativa. Puede demostrarse que la composición de funciones es asociativa.

**Composición de funciones inversas:**

Sean las funciones biyectivas f:A → B y $f^{-1}$:B → A

a través de f a cada x de A le corresponde un y de B

a través de $f^{-1}$ a cada y de B le corresponde un x de A

O sea $f^{-1}$ (f(x))= x que se denomina función identidad y está definida de A en A

Análogamente, si aplicamos primero $f^{-1}$, diremos:

a través de $f^{-1}$ a cada "x" de B le corresponde un "y" de A

a través de f a cada "y" de A le corresponde un "x" de B

Entonces; $f(f^{-1}(x)) = x$ que es la identidad, pero ahora definida de B en B.

Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto de la recta y=x (gráfica de la función identidad).

**Ejercicios**

**12)** Dados los siguientes pares de funciones f y g indicar para cada una dominio mayorante e imagen y hallar f+g, f.g y f/g indicando el dominio mayorante de cada una.

a) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad g(x) = 3x + 2$

d) $f(x) = \ln(x-1)$ $\qquad g(x) = e^x$

e) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad g(x) = (x-1)^2$

**13)** Dadas f(x)= $\sqrt{x}$ y g(x)= $x^2 - 1$, hallar: a) f(g(1)) b) g(f(1)) c)g(f(2)) d) f(g(2)) e) fog f) gof

**14)** Dados los pares de funciones del ejercicio 12, hallar, fog y gof haciendo restricciones a los conjuntos si fuese necesario

**15**) Dadas las siguientes funciones, indicar dominio e imagen, buscar su inversa (restringiendo si es necesario para la biyectividad) y componer para obtener la identidad. Indicar en todos los casos, dominios e imágenes.

a) $f(x) = x^2+2$ b)$f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ d) f(x) = ln(x+1)

**16)** Dada fog: $R \to R$ / fog(x)= $x^3 + 3x - 2$.

a) Hallar f, siendo g: $R \to R$/ g(x)= 2x-1.

b) Hallar g, siendo f: $R \to R$/ f(x)= 2x-1.

**17**) Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo.

a) Escribir la función de medida del radio respecto del tiempo.

b) Sabiendo que la función de medida del volumen respecto del radio para la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi.r^3$, hallar la función de medida del volumen respecto del tiempo. Calcular el volumen para t=3

**18)** Indicar si es V o F, expresando un argumento que justifique la respuesta.

a) La composición de funciones inyectivas, es inyectiva

b) La composición de funciones sobreyectivas, es sobreyectiva

**19)** Hallar el conjunto de ceros, conjunto positividad, negatividad y a partir de ello esbozar una gráfica de las siguientes funciones cuyas fórmulas se indican a continuación..

a) $f(x) = \left(x^2 + \frac{2}{3}\right)x$ b) $g(x) = \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ c) $h(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right).\left(x^2 + 1\right)$

**20)** Representar gráficamente, en un sistema cartesiano de ejes las gráficas de las funciones que se indican

a) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } |x|\le 2\\ x^2 & \text{si } |x|>2\end{cases}$  b) $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\le -1\\ -x & \text{si } |x|<1\\ -x^2 & \text{si } |x|\ge 1\end{cases}$  c) $h(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ \frac{1}{x} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

**21)** a) Sean las funciones "f" y "g" definidas por las fórmulas dadas a continuación: $f(x)=\frac{5}{x+4}$ y $g(x)=\frac{3}{x-8}$. Se pide: Graficar ambas funciones en un mismo sistema cartesiano de ejes. Hallar gráfica y analíticamente los puntos donde se verifica la condición $f(x)=g(x)$.

b) Dadas las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación se pide: Definir "$f-g$" y hallar su conjunto de ceros. $f(x)=\frac{2x+3}{x+5}$ y $g(x)=\frac{2x5}{x+9}$

**22)** Dadas f y g hallar el conjunto de todos los $x/f(x)=g(x)$:

a) $f(x)=x+2$ y $g(x)=\sqrt{2x+7}$

b) $f(x)=2-x$ y $g(x)=\sqrt{2x-5}$

c) $f(x)=1+\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{2x+3}$

**23)** Dadas las funciones indicadas a continuación hallar, en forma analítica y gráfica (cuando se indique, el conjunto $A\subset Df$ que satisface:

a) $f(x)\ge g(x)$ si $f(x)=3+2x$ y $g(x)=4x-5$. Graficar.

b) $f(x)<8$ si $f(x)=5-x^2$

c) $f(x)>4$ si $f(x)=x^2-3x$

d) $|f(x)|\le g(x)$ si $f(x)=5-x$ y $g(x)=2-2x$. Graficar.

e) $|f(x)|\ge |g(x)|$ si $f(x)=3x$ y $g(x)=6-3x$

e) $f(x)\ge g(x)$ si $f(x)=\frac{x-2}{x-4}$ y $g(x)=\frac{x+2}{x}$. Graficar.

**24)** Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{\frac{x}{2}}=27$  c) $2^{x+1}+4^x=80$  e) $2^{x+3}+4^x=48$

b) $2^{\log x}=16$  d) $4^{x+1}=2^x+3$  f) $4^{x+1}-3.4^x-1=0$

**25)** Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2(x-2)-\log_2 5+\log_2 3=1$  b) $\log_3\left(x^2-4x-2\right)=1$

c) $(\log x)^2=\log x^2$  d) $(\log_x 2)^2+\log_{x^3} 4=\frac{1}{3}$

e) $(3.\log x)^2+1=10\log x$  f) $\dfrac{\log_5\frac{125}{x^2}}{(\log_5 x)^2}=1$

**26**) Hallar, en el intervalo $[0;2\pi)$, los ceros de las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación.

a) $f(x) = \text{sen}\, x - 1$

b) $g(x) = 2\,.\cos(2x) - 1$

c) $h(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x - 1$

d) $t(x) = -2\,.\cos x - 2$

## Respuestas

### Funciones

**1)** a) $f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2$ b) $f_2(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ c) $f_3(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$ d) $f_4(x) = \frac{7}{6}x$

**2)** a) **V** b) **V** c) **V** d) **V** e) **F** f) **V**

**3)** a) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ b) $f(x) = -3x^2 + 18x - 24$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 12$

d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ e) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 5$

**4)** Si $k = -\frac{4}{3}$ es tangente; si $k > -\frac{4}{3}$ es secante y si $k < -\frac{4}{3}$ es exterior

**5)** S= $(-\infty;1] \cup [5;+\infty)$

**6)** $P(x) = \frac{1}{6}(x-2)\,(x-3)\,(x+1)$ $C^+ = (1;2) \cup (3;+\infty)$ $C^- = (-\infty;-1) \cup (2;3)$

**7)** $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$

**8)** $a = 2$ ; $b = -3$ $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

**9)** $a = -74$

**12)** a) $Df = R$ $\quad Im\, f = R_0^+$; $Dg = R$ $\quad Im\, g = R$

b) $Df = R$ $\quad Im\, f = R_0^+$; $Dg = R_0^+$ $\quad Im\, g = R_0^+$

c) $Df = R - \{2\}$ $\quad Im\, f = R - \{0\}$; $Dg = R$ $\quad Im\, g = R$

d) $Df = (1;+\infty)$ $\quad Im\, f = R$; $Dg = R$ $\quad Im\, g = (0;+\infty)$

e) $Df = R$ $\quad Im\, f = [-1;1]$; $Dg = R$ $\quad Im\, g = R_0^+$

**13)** a) 0 b) 0 e) $fog : R \to R_0^+ / (fog)_{(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$ f) $fog : R_0^+ \to [-1;+\infty] / (gof)_{(x)} = x - 1$

**15)** a) $f : R_0^+ \to [2;+\infty) / f_{(x)} = x^2 + 2 \;\Rightarrow\; f^{-1} : [2;+\infty) \to R_0^+ / f^{-1}{}_{(x)} = \sqrt{x-2}$

b) $f : R \to R / f_{(x)} = \sqrt[3]{x-3} \;\Rightarrow\; f^{-1} : R \to R / f^{-1}{}_{(x)} = x^3 + 3$

c) $f : R - \{3\} \to R - \{2\} / f_{(x)} = \dfrac{2x+1}{x-3} \;\Rightarrow\; f^{-1} : R - \{2\} \to R - \{3\} / f^{-1}{}_{(x)} = \dfrac{3x+1}{x-2}$

d) $f : (-1;+\infty) \to R / f_{(x)} = \ln(x+1) \;\Rightarrow\; f^{-1} : R \to (-1;+\infty) / f^{-1}{}_{(x)} = e^x - 1$

**16)** a) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^3 + 3.\dfrac{x+1}{2} - 2$ b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

**17)** a) $r(t) = 1 + 0{,}1.t$ b) $V(t) = \frac{4}{3}(1 + 0{,}1.t)^3$ c) $V(3) \approx 2{,}93\pi$

**18)** **a**) VERDADERO

b) FALSO – Contraejemplo:

Sean $f : [0;1] \to [0;1] / f_{(x)} = x$ es sobreyectiva y $g : R \to \{1\} / g_{(x)} = 1$ es sobreyectiva

$fog : R \to [0;1] / (fog)_{(x)} = 1$ no es sobreyectiva

**19)** a) $S = \{0\}$ b) $S = \left\{\pm\frac{2}{3}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ c) $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

**21)** a) $x = 26$ b) $C_0 = \left\{-\frac{27}{11}\right\}$

**22)** a) $x = 1$ b) $x = \varnothing$ c) $x = 3 \vee x = -1$

**23)** a) $S = [-\infty; 4]$ b) $R$ c) $S = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$
d) $S = (-\infty; -3]$ e) $S = (1; +\infty)$ f) $S = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

**24)** a) 6 b) 10000 c) 3 d) 0 e) 2 f) 0

**25)** a) $\frac{16}{3}$ b) $5; -1$ c) $100; 1$ d) $8; \frac{1}{2}$ ei) $10; \sqrt[9]{10}$ f) $5; \frac{1}{125}$

**26)** a) $C_0 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ b) $C_0 = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$
c) $C_0 = \{0; \pi\}$ d) $C_0 = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

# PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA CUARTO AÑO. 2009

Unidad 1: ***Funciones exponenciales y logarítmicas***

- Función exponencial. Definición. Características. Representación gráfica.
- Logaritmo: definición. Propiedades. Cambio de base.
- Función logarítmica. Definición. Características Representación gráfica.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Unidad 2:***Trigonometría***
***Primera parte***
- Sistemas de medición angular: sistema sexagesimal y radial.
- Definición de las funciones trigonométricas. Teorema del seno y del coseno. Aplicaciones.
- Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Signo de las funciones en los cuatro cuadrantes.
- Funciones de la suma y diferencia de dos ángulos. Funciones del ángulo duplo. Relaciones entre las funciones de los ángulos complementarios, suplementarios, que difieren en $\pi$ y opuestos. Identidades .

***Segunda parte***
- Ecuaciones trigonométricas.
- Representaciones gráficas de seno, coseno y tangente. Función armónica generalizada.

Unidad 3: ***Vectores en el plano y en el espacio***
- Concepto de vector. Versores fundamentales. Expresión canónica y cartesiana de un vector.
- Adición de vectores. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades.
- Ángulo entre dos vectores. Producto escalar de dos vectores:. definición y propiedades Norma de un vector.
- Producto vectorial entre dos vectores: definición y propiedades. Cálculo.
- Paralelismo y perpendicularidad de vectores.

Unidad 4: ***Geometría lineal en $\mathbb{R}^3$. Sistemas de ecuaciones lineales.***
***Primera parte***
- Ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$. Intersección entre dos rectas. Rectas paralelas. Rectas alabeadas.
- Ecuación general de un plano. Obtención de la ecuación de un plano conocidos un punto y un vector normal ; dados tres puntos no alineados; determinado por una recta y un punto exterior; determinado por dos rectas paralelas no coincidentes; determinado por dos rectas que se cortan.

***Segunda parte***

- Planos proyectantes de una recta.
- Intersecciones: recta –plano y plano-plano.
- Distancias: punto-punto; punto-recta; punto plano; recta - recta; recta – plano.
- Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad 5: ***Números complejos***

- Número complejo: definición. Parte real e imaginaria de un número complejo. Unidad imaginaria. Adición y multiplicación en $\mathbb{C}$. Forma cartesiana y binómica. Complejos conjugados. Propiedades. División de números complejos. Potencias de i
- Argumento y módulo de un complejo. Propiedades del módulo. Forma trigonométrica y polar de un complejo. Multiplicación y división de complejos en forma polar y/o trigonométrica. Representación gráfica de números complejos.
- Potenciación de números complejos. Fórmula de De Moivre. Radicación en $\mathbb{C}$.
- Factorización de polinomios en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

# Problemas para pensar

***Aquí incorporamos un conjunto de problemas correspondientes al segundo nivel de Olimpíadas matemáticas. Para consultas, preguntá***

1. ¿Cuántas formas hay de embaldosar un pasillo de 2x7 con baldosas de 2x1?

2. Dos bicicletas se encuentran en una ruta recta a 40 kilómetros de distancia. A partir de un momento ambas empiezan a andar en sentidos contrarios, acercándose. Cada bicicleta tiene a una velocidad constante de 20km/h. En el mismo instante de partida, una mosca sale de una de las bicicletas rumbo hacia la otra con una velocidad de 40km/h. Al encontrarse la mosca con la otra bicicleta, instantáneamente se da vuelta y comienza a volar para el otro lado hasta encontrarse con la primera bicicleta, momento en el cual se da vuelta nuevamente, y así sigue hasta que las bicicletas se juntan. ¿Qué distancia recorre la mosca?

3. Sean ABC y ABD dos triángulos unidos por su lado AB (C y D están en semiplanos distintos respecto de la recta AB). El triángulo ABC tiene BAC=90º y AB=2AC. El triángulo ABD tiene ADB=90º y AD=BD. El segmento CD corta al segmento AB en O. Calcular BO si se sabe que AC=4.

4. Con una pesa de 2 y una de 5, en una balanza de platillos podemos pesar los valores 2, 3, 5 y 7. Si queremos poder pesar todos los valores enteros entre 1 y 4, ¿cuál es la mínima cantidad de pesas necesarias? ¿Y si necesitamos pesar todos los números del 1 al 13? ¿Por qué con esa misma cantidad de pesas no se pueden formar todos los números del 1 al 14?

1. Probar que en el mundo hay dos personas que conocen a la misma cantidad de gente. (Suponemos que si A conoce a B entonces B conoce a A).

2. Se tiene un hexágono regular. Cada segmento con extremos en dos vértices del hexágono se pinta de rojo o de azul. Probar que hay un triángulo que tiene sus tres lados del mismo color.

3. Sea $ABC$ un triángulo tal que $BC = 10$. Sean $M$, $N$, $P$ los puntos medios de los lados $AB$, $BC$, $CA$ respectivamente. Sobre la prolongación de $NP$ se considera $E$ tal que $EP = PN$. Sobre la prolongación de $CM$ se considera $D$ tal que $DM = CM$. Hallar la longitud del segmento $DE$.

4. De los números naturales $A$ y $B$ se sabe que $B = (A^2 - 1) / 8$ y que el mínimo común múltiplo entre $A$ y $B$ es igual a 3720. Hallar $A$ y $B$.

5. La suma de dos números es 30 y su producto es 10, ¿cuánto vale la suma de los inversos multiplicativos de los dos números?

6. La sucesión de Fibonacci se define de la siguiente manera:

$F_0=1$
$F_1=1$ y para $n \geq 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Probar que la cantidad de formas de embaldosar un pasillo de 2xN con baldosas de 2x1 es $F_N$.

7. Sea ABCD un trapecio con AB paralela a CD. DAB=100º, ABC=130º, AD=10 y AB=15. ¿Cuánto mide CD?

8. Alberto se encuentra en el centro de una circunferencia de radio 20. Berenice está afuera. En cada paso, Alberto se desplaza un metro en línea recta. Él puede elegir, antes de cada paso, la recta por la que se va a mover pero Berenice decide en cuál de los dos sentidos ha de moverse. ¿Puede Alberto salir de la circunferencia?

9. Demostrar que hay infinitos enteros positivos impares n para los cuales el número $2^n+n$ es un número compuesto (es decir, tiene algún divisor distinto de 1 y de sí mismo.

10. En el espacio hay n planos de modo que cada uno de ellos interfecta a exactamente otros 19. Determinar todos los posibles valores de n.

11. Sea ABC un triángulo y r la recta paralela a BC que pasa por A. Sea P el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ABC. Sea Q el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ACB. AB mide 7 y AC mide 8. Hallar la medida de PQ.