

**COLEGIO NACIONAL DE BUENOS AIRES. UBA**

# **MATEMÁTICA 3er AÑO**

## **GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS**

**2009**

## **PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA TERCER AÑO. 2009**

### **Unidad 1. Funciones**

Definición de función. Gráficos, Crecimiento y decrecimiento. Funciones pares e impares. Translaciones y simetrías. Ceros de una función. Clasificación de funciones. La función biyectiva y su inversa.

### **Unidad 2: Las funciones polinómicas I. Función lineal**

Polinomio, función polinómica. Función lineal, ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad . Problemas.

### **Unidad 3: Las funciones polinómicas II. Función cuadrática**

Función cuadrática. Clasificación. Movimientos. Ecuación de segundo grado. Intersección de parábola con recta.

### **Unidad 4: Las funciones polinómicas III.**

Ceros de una función polinómica en general, multiplicidad. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini, Teorema del resto. Divisibilidad. Resolución de ecuaciones . Teorema de Gauss. Descomposición factorial de un polinomio. Clasificación. Movimientos. Representación aproximada de funciones polinómicas a partir de ceros, intervalos de positividad y negatividad

### **Unidad 5: Las funciones racionales e irracionales**

Función racional. Función homográfica. Operaciones con expresiones algebraicas racionales. Ecuaciones. Problemas. Funciones irracionales. Álgebra de funciones. Problemas

## TRABAJO PRÁCTICO 0 para Tercer Año

1) Dados los siguientes conjuntos de números reales, expresarlos como intervalo y realizar las operaciones que se indican:  $A \cup F$ ,  $B \cap C$ ,  $F^C$ ,  $D - A$

$$A = \left\{ x \in \mathfrak{R} / |x - 2| \cdot (x^2 - x) < 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathfrak{R} / \left| \frac{x - \frac{5}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} \right| \geq 2^{-1} \cdot \frac{1}{2} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathfrak{R} / \frac{x-1}{x^2-2} > 0 \right\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathfrak{R} / \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \leq 0 \right\}$$

$$E = \left\{ x \in \mathfrak{R} / x^3 \leq 3x \right\}$$

$$F = \left\{ x \in \mathfrak{R} / \left| \frac{x-3}{x} \right| > 2 \right\}$$

2) Realizar las siguientes operaciones en  $\mathfrak{R}$  en forma exacta:

$$a) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$b) \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{5^3}}$$

$$c) \sqrt{\frac{18}{4}} + 2\sqrt{\frac{8}{9}} + \sqrt{32} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$d) \frac{1}{1 - \sqrt{3}} + \sqrt{27} + \frac{1}{5}\sqrt{75} - \frac{1}{3}\sqrt{12}$$

3) Verificar las siguientes identidades  $\forall a, b \in \mathfrak{R} / a > b > 0$

$$a) \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \sqrt{ab}$$

$$b) \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

4) Resolver las siguientes ecuaciones

$$a) x + 2 = \frac{4}{x - 2}$$

$$b) \frac{7 + x^2}{4} + \frac{1 - x}{2} = (x + 2)^2 - 3$$

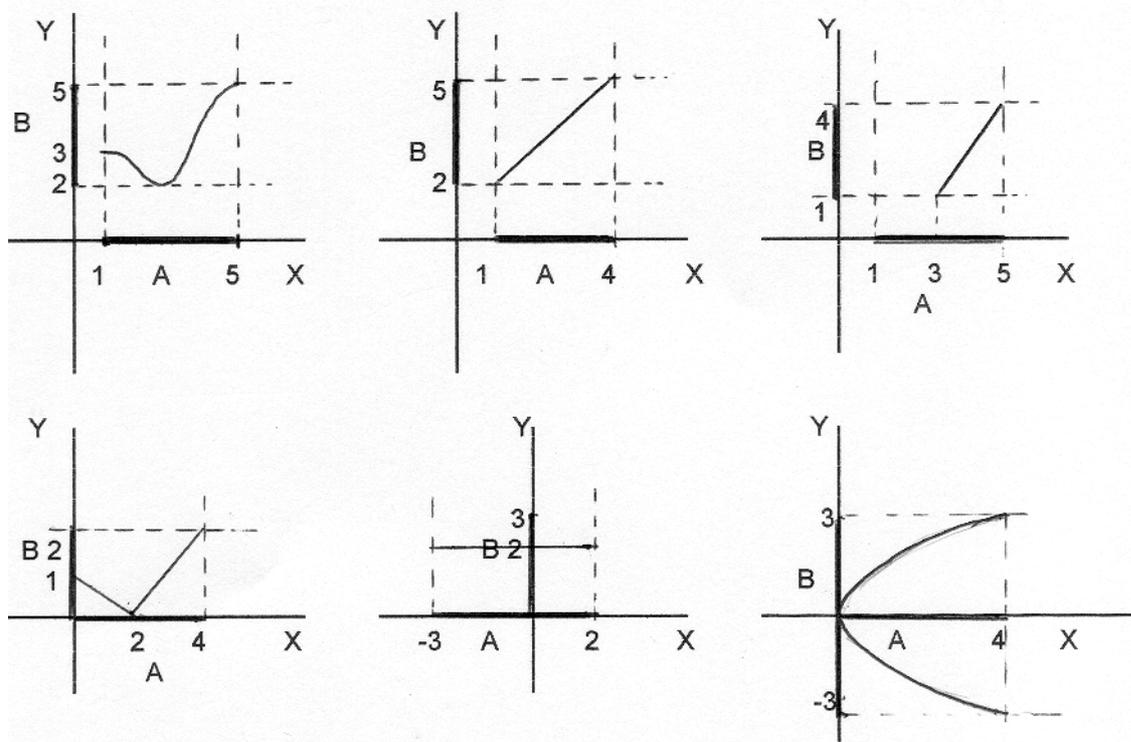
$$b) \frac{(3x - 2)^2}{4} - \frac{(3x + 2)^2}{2} + 8 = -9x^2$$

$$d) \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 4} = 3$$

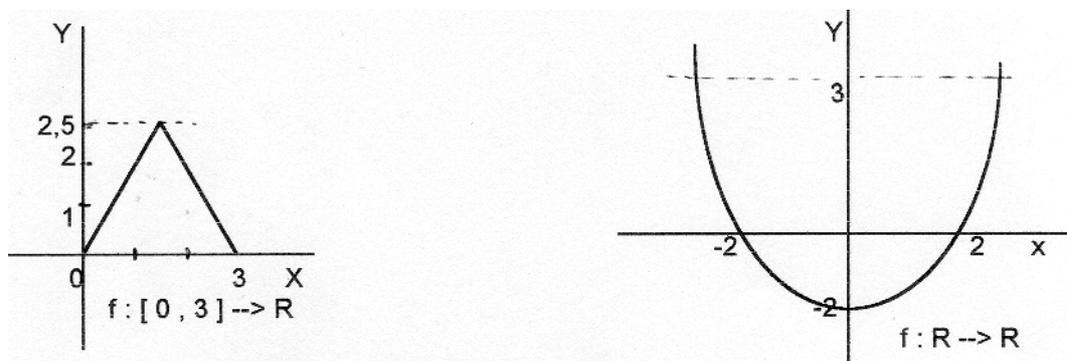
$$e) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = 3$$

5) Indicar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones de A en B y cuáles no. Justificar la respuesta.

$A \subseteq \mathfrak{R}$   $B \subseteq \mathfrak{R}$



6) Indicar cuál es el conjunto imagen de f



7)  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = -2x - 1$  calcular el valor de x tal que

a)  $f(x)=2$                       b)  $f(x)=-1$

8) Dada la función:

$f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = -x^3 + x - 1$  calcular :  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0,5)$ ,  $f(-1/3)$

9) Hallar dominio mayorante (máximo en sentido de inclusión) de las siguientes funciones y expresarlo como intervalo:

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{|x+1|}-2}$

b)  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-9)(x+1)}$

$$c) f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x^2-1)}$$

$$e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^2-1}$$

$$f) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$$

10) Las localidades A, B y C están alineadas, B se encuentra entre A y C a 40 km de A. Un tren parte de A hacia C con una velocidad constante de 90 km/h. Simultáneamente parte de B hacia C otro tren a velocidad constante de 60 km/h.

- graficar la distancia hasta A en función del tiempo para ambos trenes en un mismo gráfico.
- Expresar analíticamente ambas funciones
- Calcular en que momento y a que distancia de A se encuentran.

11) Un recipiente con agua que se encuentra a  $30^\circ$  se pone a calentar de forma tal que la temperatura aumenta en forma constante hasta alcanzar el punto de ebullición ( $100^\circ$ ) a los 5 minutos. Se retira y se deja a temperatura ambiente de  $20^\circ$  tardando 20 minutos en llegar a la misma (y suponiendo que desciende en forma constante). A temperatura ambiente se mantiene el resto el tiempo.

- Graficar la temperatura del agua en función del tiempo.
- Expresar analíticamente la función
- Hallar la temperatura a los 3 minutos, 10 minutos y 40 minutos de comenzada la experiencia.

12) Sobre el lado AB del triángulo ABC consideramos los puntos M y N, tales que  $BM=MN=NA$ . Sobre el lado BC, consideramos los puntos P y Q tales que  $BP=PQ=QC$ .

- Demostrar que MP es paralela a AC
- Hallar la razón entre las áreas del triángulo NBQ y ABC. Justificar.

13) En el triángulo ABC, M pertenece a AB y N pertenece a BC de forma tal que MN es paralela a AC, si  $|AB| = 12$  cm, hallar a que distancia de B debe colocarse M para que el área de MBN sea la mitad de área de ABC.

14) Los triángulos ABC y A'B'C' son equiláteros.

- son semejantes? Justificar.
- Una altura del A'B'C' es de la misma longitud que un lado del ABC. Demostrar que el  $\text{área}(A'B'C') = \frac{4}{3} \cdot \text{área}(ABC)$

15) Para medir la altura de una montaña, se mide el ángulo de elevación en un punto determinado del terreno, y es de  $45^\circ$ . Si se retrocede 2 km en línea recta desde ese punto y se vuelve a medir el ángulo de elevación, este es de  $30^\circ$ . Hallar la altura de la montaña.

16) Hallar los ángulos que forma la diagonal de un rectángulo con los lados, si se sabe que un lado es el doble del otro.

17) Verificar las siguientes identidades:

a)  $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

b)  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = \operatorname{tg}^3 \alpha$

c)  $(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - 2 \sec \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$

18) Dado  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  hallar en componentes el vector que tenga:

a) la misma dirección y sentido que  $\vec{v}$  pero modulo 1

b) la misma dirección, sentido contrario y modulo 5

19) Dado un vector  $\vec{AB}$  de modulo 3, descomponerlo gráficamente en dos direcciones perpendiculares entre si y tal que  $\vec{AB}$  forme un ángulo de  $30^\circ$  con una de ellas. Hallar los modulos de los vectores componentes.

20) Dados los puntos  $A=(1;2)$  y  $B=(3;5)$  y  $O$  el origen de coordenadas. Hallar las coordenadas de un punto  $C$  para que  $\vec{OC} = -5 \cdot \vec{AB}$

21) Dados  $\vec{v} = (y,-1)$  ,  $\vec{u} = (-2, 3)$  ,  $\vec{w} = (4, x)$   
Hallar  $x$  e  $y$ , si es posible, para que:  $\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{u}$

22) Hallar  $x$  e  $y$  para que  $\vec{u} = (x, y)$  sea paralelo a  $\vec{v} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$  con  $|\vec{u}| = 13$

### Respuestas:

1)  $A = (0,1)$  ;  $B = (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [\frac{7}{2}; +\infty)$  ;  $C = (-\sqrt{2}; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$   $D = [-2; 0] - \{-1\}$

$E = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$  ;  $F = (-3; 1) - \{0\}$

$A \cup F = (-3; 1) - \{0\}$  ;  $B \cap C = (-\sqrt{2}; 1) \cup \left( \sqrt{2}; \frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{7}{2}; +\infty \right)$

$F^c = (-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$  ;  $D - A = [-2; 0] - \{-1\}$

2) a)  $3-2\sqrt{6}$  b)  $\frac{3}{5}$  c)  $\frac{35}{6}\sqrt{2}+1$  d)  $-\frac{1}{2}+\frac{17}{6}\sqrt{3}$

4) a)  $\pm\sqrt{8}$  b)  $\frac{5}{18}$  c)  $\frac{7}{9}$  d)  $\pm 2$  e)  $\frac{5}{3}$

5) a) si, b) si c) no d) si e) si f) no

6) a)  $[0; 2.5]$  b)  $[-2, +\infty)$

7) a)  $-\frac{3}{2}$     b) 0

8)  $f(0)=-1$ ;  $f(-1)=-1$ ;  $f(-2)=5$ ;  $f(0.5)=-\frac{51}{8}$ ;  $f(-\frac{1}{3})=-\frac{35}{27}$

9) a)  $[-3;3]$     b)  $\mathbb{R} - \{-3; -1; 3\}$     c)  $(-\infty;0) \cup (0;1] \cup (2;+\infty)$

d)  $(1;+\infty)$     e)  $(-\infty;-1) \cup (-1;0] \cup [4;+\infty)$     f)  $(-2;1]$

10) b) Primer tren :  $f_1(t) = 90.t$

Segundo tren :  $f_2(t) = 60t + 40$

Tiempo medido en horas, velocidad en km/h y distancia en km

d) se encuentran después de 1h 20 min y a una distancia de A de 120 km

11) b)  $T(t) = \begin{cases} 30+14t & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 100-4(t-5) & \text{si } 5 < t \leq 25 \\ 20 & \text{si } t > 25 \end{cases}$  (tiempo medido en min y temperatura en grados centígrados)

c) A los 3 min:  $72^\circ$ , a los 10 minutos:  $80^\circ$ , a los 40 minutos:  $20^\circ$

12)  $\frac{4}{9}$  ; 13)  $6\sqrt{2}$  ; 15)  $1+\sqrt{3}$  ; 18) a)  $\frac{2\sqrt{13}}{13}\vec{i} - \frac{3\sqrt{13}}{13}\vec{j}$     b)  $-\frac{10\sqrt{13}}{13}\vec{i} + \frac{15\sqrt{13}}{13}\vec{j}$

19)  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$     y     $\frac{3}{2}$ ;    20)  $(-10; -15)$ ,    21)  $x=2$  ;  $y=-10$  ;

22)  $x= -2\sqrt{13}$ ;  $y= 3\sqrt{13}$  o  $x=2\sqrt{13}$ ;  $y= -3\sqrt{13}$

## Unidad I: Funciones. Algunas definiciones

❖ Como ya sabemos, una **función**  $f$  de  $A$  en  $B$  es una asignación que le hace corresponder a cada elemento del conjunto  $A$  (llamémosle genéricamente "x") uno y sólo un elemento del conjunto  $B$  (llamémosle genéricamente "y") que es la imagen de  $x$  por  $f$ ,

Simbólicamente

$f : A \rightarrow B / y = f(x)$ , con las siguientes condiciones:

1. Todo elemento del conjunto de partida  $A$  debe tener imagen

En símbolos:

$$\forall x \in A, \exists y \in B / y = f(x)$$

2. La imagen de cada elemento  $x \in A$  debe ser única.

En símbolos:

$$\forall x \in A : (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$$

$A$  es el **Dominio** de la función  $D_f = \{x \in A / \exists y \in B \wedge (x, y) \in f\}$ .

❖ Recordemos que cuando  $f$  varía en los Reales, se denomina **Dominio Mayorante** al campo de existencia de la función en  $\mathbb{R}$ . Es decir al conjunto de valores de  $x$  para los cuales la expresión  $f(x)$  existe como número real. El dominio mayorante es el conjunto que incluye a todos los conjuntos que pueden ser tomados como dominio para esa  $f$ .

Por ejemplo si la función está dada por  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ , la expresión está definida para cualquier valor de  $x$  excepto para  $x=-2$ . Luego el dominio mayorante de la función será  $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ . Notemos que cualquier subconjunto de este conjunto puede ser tomado como dominio de  $f$ .

❖ El conjunto formado por todos los elementos de  $B$  que son imagen de algún elemento del dominio se denomina **Conjunto Imagen o Recorrido** de  $f$ . En símbolos:

$$I_f = \{y \in B / \exists x \in A \wedge (x, y) \in f\}$$

❖ Se llama **imagen** de un elemento del dominio a un  $y_0 \in B / y_0 \in I_f$

Diremos que  $x_0 \in A$  es una **preimagen** de un elemento de  $B$  si se verifica que

$$\exists y_0 \in B / f(x_0) = y_0$$

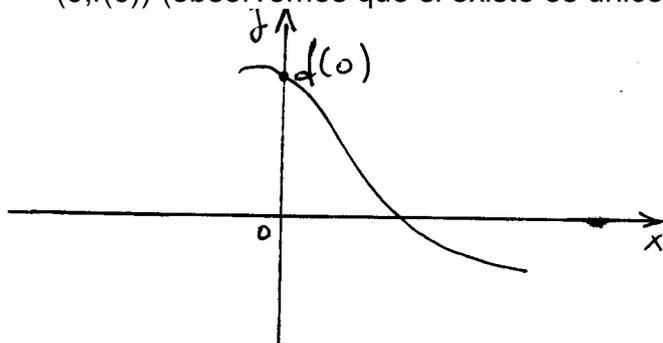
❖ Se denomina **Gráfica de  $f$**  al conjunto de los pares  $(x, y)$  tales que "y" es la imagen de "x" a través de  $f$ , o sea, los pares de la forma  $(x, f(x))$

La gráfica de una función se puede expresar de distintas maneras: por enumeración de pares, mediante una tabla, en diagrama de flechas, en un gráfico cartesiano, etc. Obviamente, algunas de estas representaciones sólo son posibles cuando los conjuntos son finitos, por ejemplo, la enumeración de pares.

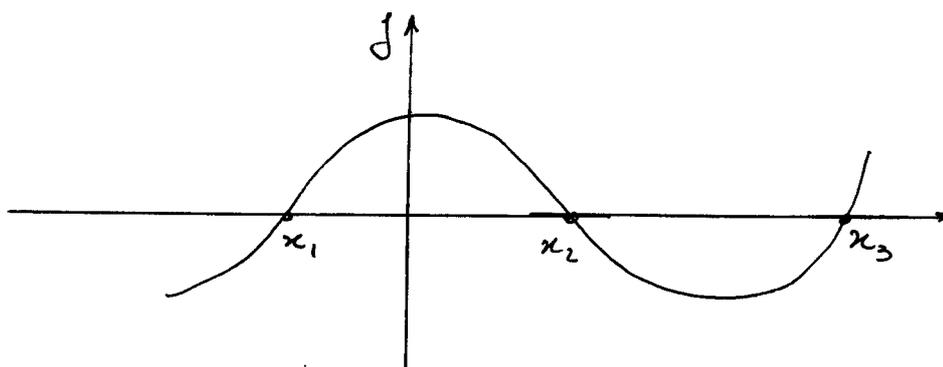
❖ **Intersecciones de la gráfica de  $f$  con los ejes coordenados de un sistema cartesiano**

Son los puntos en que la gráfica de una función intercepta a los ejes de abscisas y de ordenadas.

- a) Con el eje de ordenadas ( $y$ ): Se obtiene haciendo  $x=0$ . Es decir, corresponde al par  $(0, f(0))$  (observemos que si existe es único tal como lo exige la definición de función de  $x$ )



- b) Con el eje de abscisas ( $x$ ): Se obtienen para aquellos valores de  $x$  del dominio donde se anula el valor de la función. Dichos valores de  $x$  se denominan **ceros** de la función y son las soluciones o **raíces** de la ecuación  $f(x)=0$



**Ejercicios**

1) Hallar las coordenadas de las intersecciones con los ejes y ceros, si existen, de las funciones de los ejercicios 6 y 7 del TP0.

2) Hallar los ceros de las siguientes funciones definidas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$

a)  $f(x) = x^2 - x$

b)  $f(x) = 3x^3 - x$

c)  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

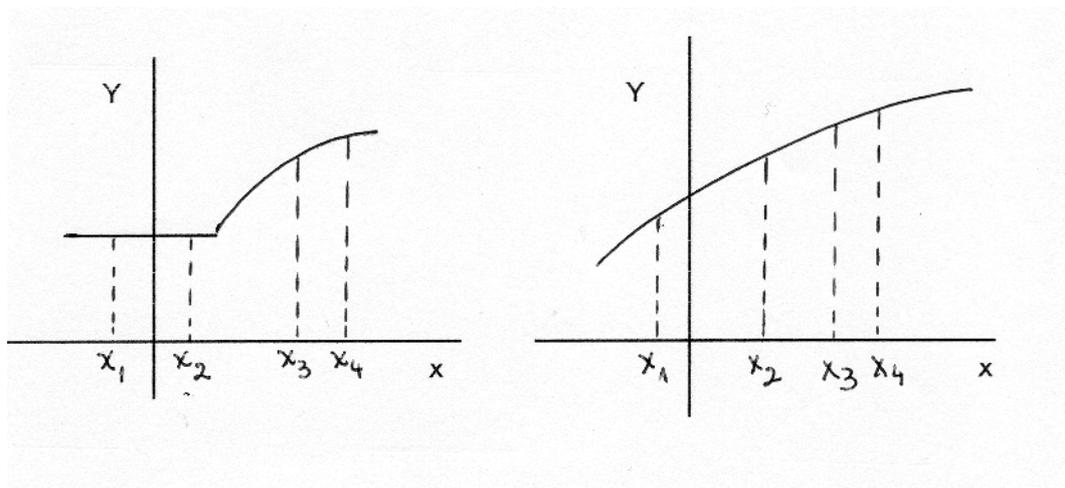
## ❖ Funciones monótonas

a) Función creciente

$$f: A \rightarrow B / y = f(x) \text{ es creciente en } A \Leftrightarrow \forall x_1 \in A \text{ y } \forall x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

b) Función estrictamente creciente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



función creciente

función estrictamente creciente

Ejemplo:

demostramos que  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = x + 1$  es estrictamente creciente en  $\mathfrak{R}$ .

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 + 1) < (x_2 + 1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

c) Funciones decrecientes (estrictamente o no).

Las definiciones quedan como ejercicio para el alumno.

Las funciones crecientes y decrecientes en el sentido amplio o estricto, se denominan **funciones monótonas**.

## Ejercicios

3) Demostrar que cada una de las siguientes funciones  $f: A \rightarrow \mathfrak{R}$  son estrictamente crecientes en A.

a)  $f(x) = 2x - 3$        $A = \mathfrak{R}$

b)  $f(x) = x^2 + 5$        $A = [0, +\infty)$

c)  $f(t) = t^3 + 4$        $A = \mathfrak{R}$

4) Realizar el gráfico de una función estrictamente decreciente.

5) a) Dar un ejemplo de una función que no sea estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

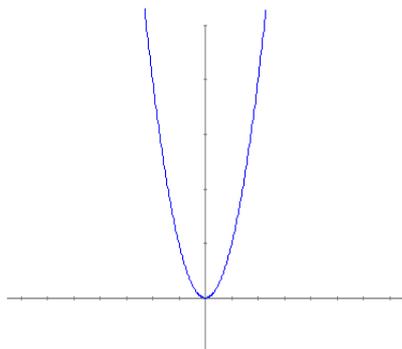
b) Determinar los intervalos de decrecimiento y crecimiento de las funciones del ejercicio 6 del TP0.

## ❖ Funciones pares y funciones impares

En algunos casos puede facilitarse el trazado el gráfico cartesiano de una función, teniendo en cuenta las condiciones de simetría que se pueden presentar:

a) Se dice que la función  $f$  es par  $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$ , es decir elementos simétricos del dominio tienen la misma imagen.

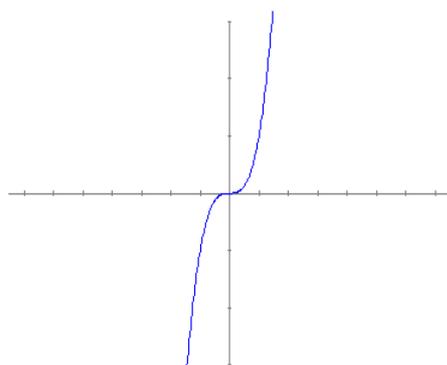
Ejemplo  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = x^2$



En este caso hay simetría respecto del eje de ordenadas (Simetría axial)

b) Se dice que la función  $f$  es impar  $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$  ó  $-f(x) = f(-x)$ . Es decir, elementos simétricos del dominio tienen imágenes simétricas

Ejemplo  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = x^3$



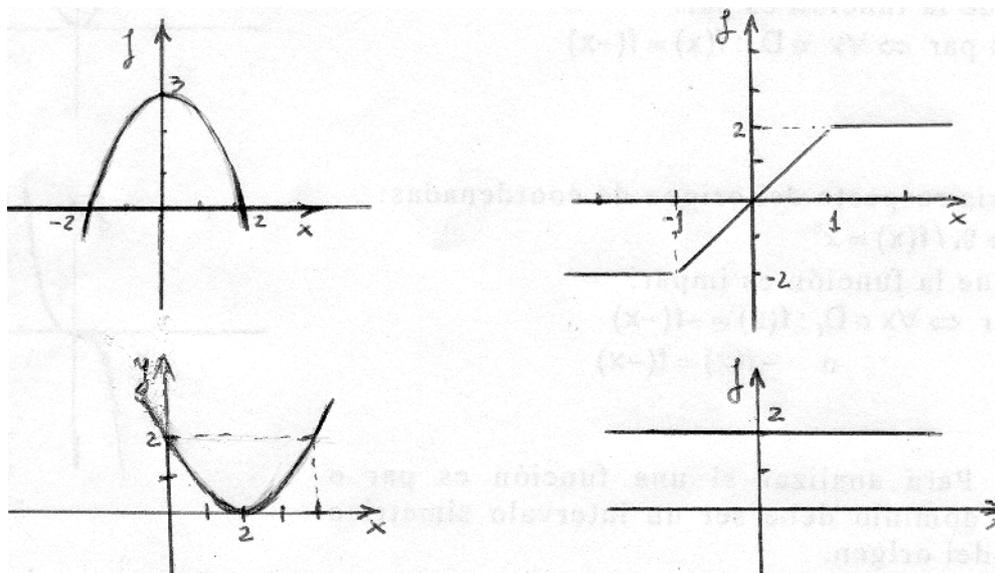
En este caso hay simetría respecto del origen de coordenadas (Simetría central)  
Para analizar si una función es par o impar su dominio debe ser un intervalo simétrico respecto del origen.

### Ejercicios

6) Indicar si es V o F justificando:

- Existen funciones que no son pares ni impares.
- No existe una función que sea par e impar simultáneamente.

7) Analizar paridad en las siguientes funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



8) Analizar paridad en las siguientes funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

b)  $f(x) = x - x^3$

c)  $f(x) = -x^2 + 2x$

### ❖ Desplazamientos

Para completar sobre la guía:

I] Representemos:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 3x$

Representemos ahora  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = 3x + 4$

Relación entre la gráfica de  $f(x)$  y la de  $g(x)$ :

Si trasladamos la gráfica de ..... 4 unidades en el sentido positivo del eje y obtenemos la gráfica de .....

Podemos escribir:  $g(x) = f(x) + 4$

II] Representemos  $f(x)=x^2$   $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$

Representemos ahora, sin usar tabla de valores:  $y = f(x) + 1$ ,  $y = f(x) - 2$  ambas  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$

III] Representemos:  $h : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / h(x) = 3(x - 2) = 3x - 6$

Relación entre la gráfica de  $f(x)=3x$  y la de  $h(x)=3(x-2)$ :

Si trasladamos la gráfica de ..... 2 unidades en el sentido positivo del eje x obtenemos la gráfica de .....

Podemos escribir:  $h(x)=f(x-2)$

IV]  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = x^2$  Representar la función y sin usar tabla de valores representar:

$y = f(x - 1)$                        $y = f(x + 1)$

Expresar la fórmula de la función resultante.

V] Representar:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 3x + 1$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = -(3x + 1) = -3x - 1$$

$$g(x) = -f(x)$$

¿Qué relación existe entre las gráficas?

Conclusión: Dada una función  $y=f(x)$  y  $k>0$

a) La gráfica de  $y=f(x) \pm k$  se obtiene desplazando la curva de  $y=f(x)$  en la dirección del eje y.

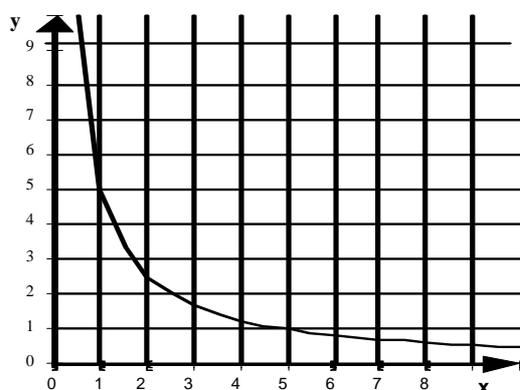
- i) k unidades en el sentido positivo si  $y=f(x)+k$
- ii) k unidades en el sentido negativo si  $y=f(x)-k$

b) La gráfica de  $y = f(x \pm k)$  se obtiene desplazando la curva de  $y=f(x)$  en la dirección del eje x.

- i) k unidades en el sentido positivo si  $y=f(x-k)$
- ii) k unidades en el sentido negativo si  $y=f(x+k)$

### Ejercicios

9) Dada la siguiente representación gráfica de una función f en un sistema cartesiano, graficar:



- |                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| a) $g(x)=f(x+2)$   | d) $g(x)=f(x) - 3$     |
| b) $g(x)= f(x-3)$  | e) $g(x)= f(x+2) - 5$  |
| c) $g(x)=f(x) + 2$ | f) $g(x) = f(x-3) + 2$ |

10) a) Representar:  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{6}{x}$

b)  $g : A \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{6}{x-2}$  Hallar A (Dominio mayorante).

Vincular g con f, representar g sin tabla de valores.

## ❖ Clasificación de Funciones

**Función inyectiva:** Una función  $f : A \rightarrow B$  es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada B.

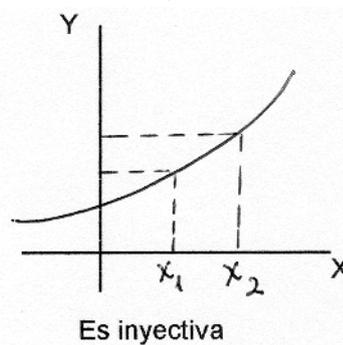
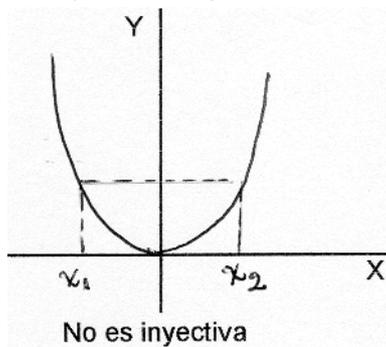
En símbolos:

$$\forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\text{o bien, } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede interceptar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del conjunto imagen puede ser imagen de más de un elemento del dominio.

Nótese que  $f$  es inyectiva  $\Leftrightarrow f$  es estrictamente creciente ( o estrict. decreciente).



**Función sobreyectiva:** Una función  $f : A \rightarrow B$  es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen preimagen en el dominio A. Dicho con otras palabras el conjunto B y el conjunto imagen de  $f$  deben coincidir.

$$\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x)$$

**Función biyectiva:**

Una función es biyectiva  $\Leftrightarrow$  es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

### Ejercicios:

11) Sea la función cuya fórmula es  $f(x) = x^2 - 4$ .

a) Graficar.

b) Unir con flechas según corresponda:

si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  f no es inyectiva ni sobreyectiva

si  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  f no es función

si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  f no es inyectiva pero es sobreyectiva

f es inyectiva pero no es sobreyectiva

c) Indicar un par de conjuntos A y B para que:  $f : A \rightarrow B / f(x) = x^2 - 4$  sea función biyectiva.

12) Algunos de los gráficos del ejercicio 5 del TP0 corresponden a funciones de A en B. Clasificar dichas funciones.

13) Dados  $A=\{1, 2, 3\}$  y  $B=\{3,7\}$

a) Definir, si es posible, una  $f : A \rightarrow B$  que sea:

a.1) Sobreyectiva

a.2) Inyectiva

b) Se puede definir en estos conjuntos una función biyectiva?

Explicar la respuesta

c) ¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos para que se pueda definir una función biyectiva entre ambos?

## ❖ Función Inversa

Se denomina **relación inversa** de una función  $f$  definida de  $A$  en  $B$ , a la que se obtiene de invertir los pares de  $f$  y se denomina  $f^{-1}$

Es decir dada  $f$  definida de  $A$  en  $B$ , cuya gráfica está constituida por los pares  $(a,b)$ , la relación inversa de  $f$  ( $f^{-1}$ ) está constituida por los pares  $(b,a)$ . Esta relación queda definida de  $B$  en  $A$  y no siempre es función en dichos conjuntos.

Por ejemplo: Si  $A=\{1, 2, 3\}$  y  $B=\{3,7\}$  y  $f : A \rightarrow B / f = \{(1,3), (2,3), (3,7)\}$ , su relación inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$ ,  $f^{-1} = \{(3,1), (3,2), (7,3)\}$  No es función de  $B$  en  $A$ .

Qué condiciones debe cumplir una función  $f : A \rightarrow B$  para que su relación inversa sea función de  $B$  en  $A$ ?

Si la función admite función inversa y existe una expresión analítica a través de una fórmula  $y=f(x)$ , para hallar la expresión analítica de la inversa cambiamos  $x$  por  $y$ , e  $y$  por  $x$  (es decir invertimos los pares), y despejamos la variable "y", si es posible.

## Ejercicios

14) Dada la función  $f: \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow [2, +\infty) / f(x) = x^2 + 2$ . Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

15)  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = x^3$ . Clasificarla y hallar, si existe, su inversa. Representar.

**Los gráficos de funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, o sea la recta  $y=x$ .**

## Unidad 2: Funciones polinómicas I. Caso particular: Función lineal

Llamamos 'polinomio' de grado  $n$  en  $x$  a la expresión:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ en la cual } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{N}$$

### Ejercicios

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

a)  $x^3$  g)  $(x-1)(x+3)$

b)  $\sqrt{5+x^2}$  h)  $0$

c)  $\frac{x+1}{x}$  i)  $1$

d)  $\sqrt{3x} + \sqrt{2}$  j)  $\frac{1}{x}$

e)  $x$  k)  $3x^{-2}$

f)  $\sqrt{x+2}$

2) Ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la variable y determinar sus grados.

a)  $\frac{1}{2} + x^4 - 2x^2$

b)  $-1+x$

c)  $-3$

d)  $-\frac{3}{4}x^5$

e)  $-\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$

f)  $+\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$

g)  $-\frac{x-1}{2} + \frac{2-x-x^2}{3}$

### Función polinómica

Una función polinómica, es una función que asigna valores a través de un polinomio, es decir:

$$f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Se dice que la función es de grado  $n$  con  $a_n \neq 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{R}$

Ejemplos: si  $n=1$   $f(x) = a_1 x + a_0$  se denomina Función lineal

Si  $n=2$ ,  $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  se denomina Función cuadrática

Si  $n=3$ ,  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  Función cúbica

En esta unidad nos detendremos particularmente en la función lineal

## Función lineal

Para evitar los subíndices, expresamos a la función lineal como:  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = mx + b$  donde  $m$  y  $b$  son números reales llamados pendiente y ordenada al origen respectivamente.

Los puntos  $(x,y)$  de la gráfica son tales que  $y=mx+b$  y están alineados. Se dice que  $y=mx+b$  es la ecuación de esta recta.

### Casos particulares de función lineal:

a) **Función constante:** es aquella en la cual  $m=0$ , es decir  $f(x)=b$ . Asigna a todo valor de  $x$  del dominio, el número  $b$ .

La gráfica es una recta paralela al eje  $x$  que pasa por el punto  $(0,b)$

b) Si  $b=0 \Rightarrow f(x)=mx$ . Los puntos de la gráfica en este caso conforman una recta que pasa por el origen de coordenadas  $(0,0)$ . Cuando  $m=1$ ,  $f(x)=x$ , se denomina **función identidad** porque asigna a cada valor del dominio el mismo valor como imagen.

### Ejercicios

3) a) Graficar la función identidad e indicar qué ángulo forma la recta con el semieje positivo de las  $x$ . Justificar.

b) Graficar  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / a) f(x)=2x$  y  $f(x)=\frac{2}{3}x$

Calcular la tangente del ángulo determinado por cada una de las rectas y el semieje positivo de las  $x$ . ¿Qué observas?

c) Idem  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / a) f(x)=-3x$  b)  $f(x)=-\frac{1}{2}x$

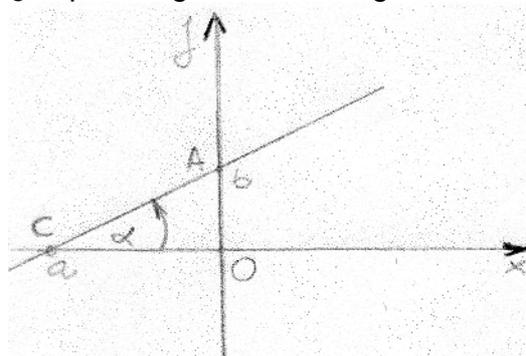
### Pendiente de una recta

Graficar:  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

Medir el ángulo determinado por el semieje positivo  $x$  y la recta.

Calcular la tangente de ese ángulo.

¿A qué es igual dicha tangente?



$$y=mx+b$$

La recta forma con el eje  $x$  un ángulo  $\alpha$

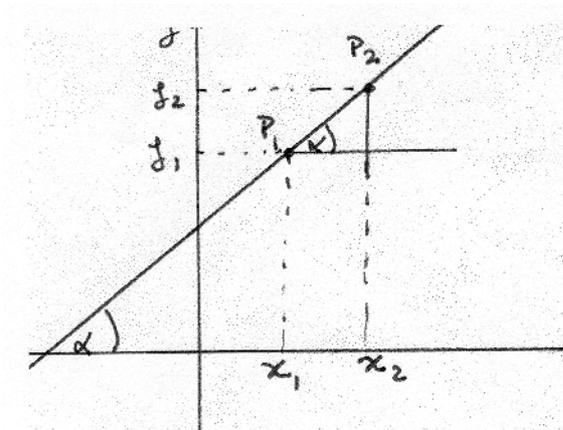
$$A(0,b) \quad C = (a,0) = \left(-\frac{b}{m}; 0\right)$$

Relación entre  $m$  y  $\alpha$ :

En el triángulo rectángulo AOC es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AO|}{|CO|} = \frac{b-0}{0-a} = \frac{b}{-a} = \frac{b}{-\left(-\frac{b}{m}\right)} = m$$

Luego la pendiente nos da la tangente del ángulo  $\alpha$  que forma la recta con el semieje positivo de las  $x$  medido en sentido contrario a las agujas del reloj.



$$P_2 \in r \Rightarrow y_2 = mx_2 + b$$

$$P_1 \in r \Rightarrow y_1 = mx_1 + b$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \operatorname{tg} \alpha$$

Definimos:  $\Delta y = y_2 - y_1$  como el incremento o variación de  $y$ .

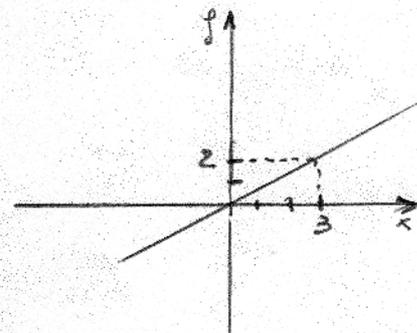
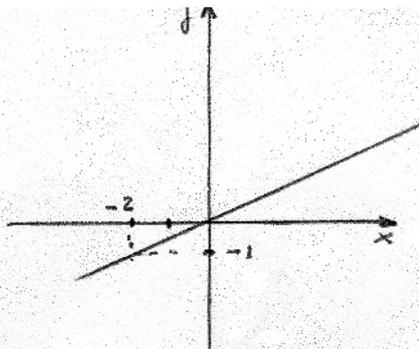
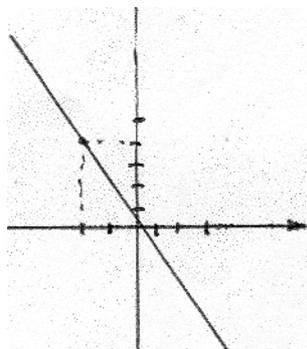
$\Delta x = x_2 - x_1$  como el incremento o variación de  $x$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

¿Cuál es el rango de valores que puede tomar  $\alpha$ ?

### Ejercicios

4) Escribir la ecuación correspondiente a cada uno de los siguientes gráficos.



5) Representar las siguientes rectas, teniendo en cuenta su pendiente sin hacer tabla de

valores:  $y=4x$   $y=\frac{3}{2}x$   $y=-\frac{5}{3}x$   $y=-x$

6) Dada la función lineal general  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = mx + b$ , analizar si:

a)  $f$  es una función monótona

b) En qué condiciones es una función estrictamente creciente

c) En qué condiciones es una función estrictamente decreciente

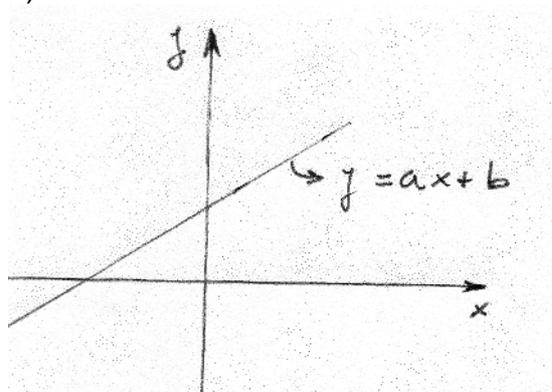
7) Representar la función dada y todos los desplazamientos indicados en el cuadro:

Recta	Desplazamiento respecto de $y=1/2x$
$f(x)=1/2x$	
$f(x)+1=1/2x+1$	
$f(x)-2=1/2x-2$	
$f(x+1)=1/2(x+1)$	
$f(x-1)=1/2(x-1)$	

8) Representar en un mismo sistema de ejes:

a)  $f(x)=3x$  b)  $g(x)=-f(x)$  c) Qué relación existe entre las gráficas?

9)



Prescindiendo de la ecuación correspondiente a la función cuyo gráfico es el de la figura, obtener el gráfico correspondiente a:

$y=ax$   $y=ax-b$   $y=-ax$   $y=ax+2b$   $y=-ax+b$

10) Sea la función:  $f(x)=-3x+4$

a) Si trasladamos la gráfica de  $f$  3 unidades hacia arriba la ecuación correspondiente es :  $y=.....$

b) Si realizamos una simetría de eje  $x$  la ecuación correspondiente es:  $y=.....$

c) Si realizamos una simetría de eje  $x$  y luego una traslación hacia abajo 5 unidades la ecuación correspondiente es:  $y=.....$

Realizar los gráficos correspondientes.

11) Sea la función:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ . Se pide: a) Gráfica

b) Ceros, c) Clasificación, d) Definir  $f^{-1}(x)$ , gráfica correspondiente.

12) Dada la función lineal general  $f(x)= mx+b$  definida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , clasificarla en los siguientes casos:

a)  $m \neq 0$

b)  $m=0$

### Ecuación de una recta que pasa por $P(x_0, y_0)$ y tiene pendiente $m$

$$y = mx + b$$

$$P_0 \in r \Rightarrow \underline{y_0 = mx_0 + b}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

### Ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos:

$$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2)$$

Vimos anteriormente que su pendiente sería  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  y la ecuación de una recta

que pasa por un punto  $P_1(x_1, y_1)$  de pendiente  $m$  es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Entonces:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

## Ejercicios

13) Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = \frac{2}{5} + x$  se pide:

- Ceros de la función
- Hallar  $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$
- Hallar  $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq f(x) < 3\}$
- Hallar  $D = \{f(x) \in \mathbb{R} / x > 1\}$
- Hallar  $E = \{f(x) \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1,5\}$

14) Siendo  $f$  una función lineal de variable real se sabe  $f(5)=4$  y  $f(-2)=5$ , hallar la ecuación de la recta correspondiente.

15) Hallar la ecuación de la recta que verifica:

- Ordenada al origen igual a 7 y  $\alpha = 45^\circ$
- Ordenada al origen igual a 7 y  $\alpha = 120^\circ$

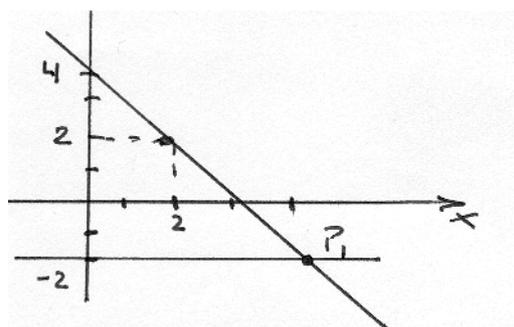
16) Hallar la ecuación de la recta  $r$  que pasa por  $P_0=(1,-9)$  y cumple la siguiente condición:

- Tiene ángulo de inclinación  $\alpha = 45^\circ$
- Tiene pendiente  $\frac{1}{3}$
- Tiene ordenada al origen 2
- Pasa por el origen de coordenadas

17) Hallar  $f$ , sabiendo que es una función lineal de variable real que asigna a los valores del intervalo  $[1,3]$ , el intervalo  $[2,5]$ . ¿Cuántas posibilidades hay?

18) Todas las rectas del plano representan funciones?

19)



a) Indicar si  $P$ ,  $Q$  y  $R$  están alineados

$$P(3,2) \quad Q\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) \quad R(1,0)$$

b) De acuerdo al gráfico, indicar coordenadas de  $P_1$

20) Coordenadas del punto de intersección

Resolver este ejercicio gráfica y analíticamente.

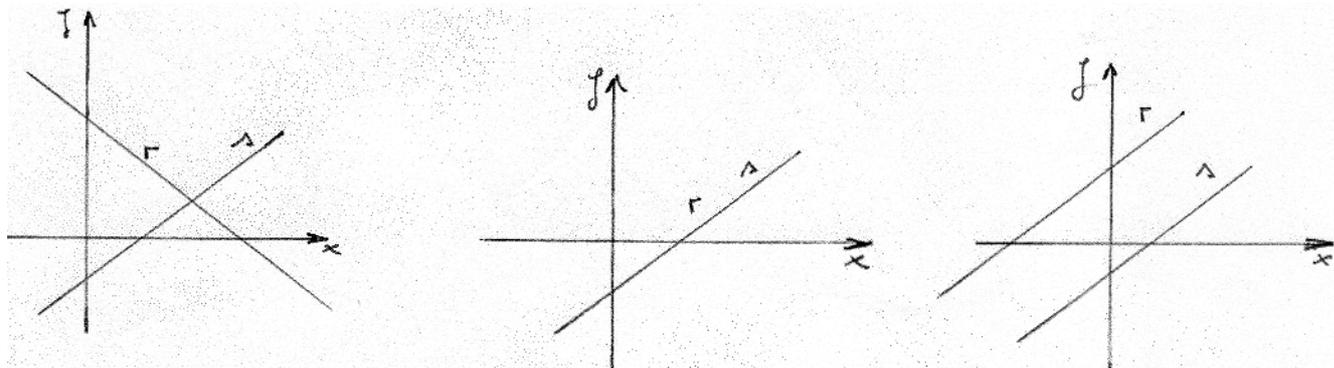
$$a) \begin{cases} 5x - 2y + 9 = 0 \\ 3x + 7 = 2y \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3y + 6x = 2 \\ -2x = y - 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4y - 3x = 40/3 \\ 9/4x + 10 = 3y \end{cases}$$

## Intersección de rectas

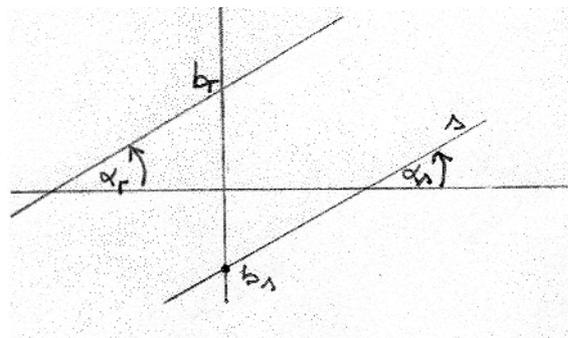
Pueden presentarse los siguientes casos:



- Hay un único punto de intersección. Se trata de un sistema compatible determinado.
- Se obtienen dos rectas superpuestas y en consecuencia hay infinitos puntos de intersección. Se trata de un sistema compatible indeterminado (existen infinitas soluciones)
- Se obtienen dos rectas paralelas no coincidentes y, por lo tanto, la intersección es vacía. Se trata de un sistema incompatible (no tiene solución). Clasifica los sistemas del ejercicio 20.

## Paralelismo y perpendicularidad

### a) Paralelismo



$$r \rightarrow y = m_r x + b_r$$

$$s \rightarrow y = m_s x + b_s$$

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$$

$$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_r = \operatorname{tg} \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

$$(\text{por ser } 0^\circ \leq |\alpha_r| < 180^\circ \wedge 0^\circ \leq |\alpha_s| < 180^\circ)$$

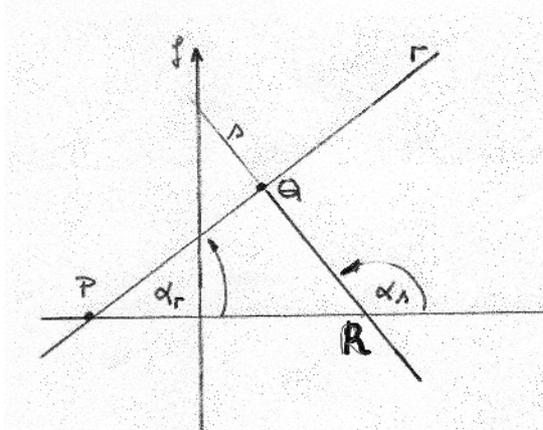
Conclusión:

Para que dos rectas sean **paralelas** las **pendientes** deben ser **iguales**.

### Ejercicio

21) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $P_0(2,1)$  y es paralela a la recta determinada por los puntos  $P_1(1,-3)$  y  $P_2(-3,0)$ .

## b) Perpendicularidad



Para que dos rectas sean **perpendiculares** la **pendiente** de una de ellas debe ser la **recíproca cambiada de signo** de la otra.

Queda la justificación para el alumno

Analizar el caso especial de rectas paralelas a los ejes coordenados.

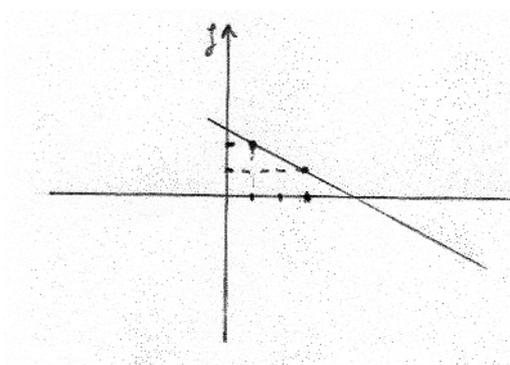
### Ejercicios

22) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $P_0$  y es perpendic. a  $r$ :  $P_0(-1,2)$

$$r \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

23) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $P_0(-1,2)$  y es perpendicular a la recta determinada por los puntos  $P_1(0,4)$  y  $P_2(6,6)$ .

24) Responder Vo F.



a) La ecuación de la recta del gráfico es  $y = -\frac{1}{2}x + 3$   
(Considerando que las unidades marcadas representan 1, 2, 3)

$$b) \begin{cases} r_1 \rightarrow y = x - 4 \\ r_2 \rightarrow y = -x + 4 \end{cases}$$

$$r_1 \perp r_2$$

$$c) \begin{cases} r_1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4 \\ r_2 \rightarrow y = x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$r_1 \cap r_2 = \{(-1,3)\}$$

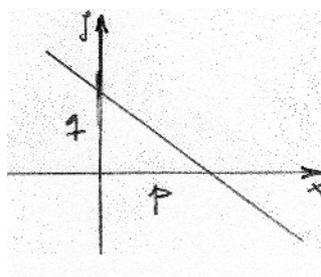
25) Hallar el área del triángulo determinado por la recta  $r$  y los ejes coordenados siendo  $r$  la recta que pasa por  $M=(4,-1)$  y es  $\perp$  a  $r_1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

26) Hallar  $h$  y  $k$  de manera tal que las rectas de ecuaciones:

$$3y - 5x - 3 = 0 \quad 2kx - y + h = 0 \quad \text{sean}$$

- perpendiculares
- paralelas, no coincidentes
- coincidentes

## Forma segmentaria de la ecuación de una recta



$$r \rightarrow ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

abscisa al origen:  $-\frac{c}{a} = p$

ordenada al origen:  $-\frac{c}{b} = q$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

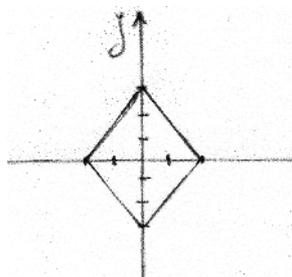
### Ejercicios

27) Escribir la forma segmentaria de r y representar:

a)  $r_1 \rightarrow 3x - 4y + 12 = 0$

b)  $r_2 \rightarrow 2x - 4y - 4 = 0$

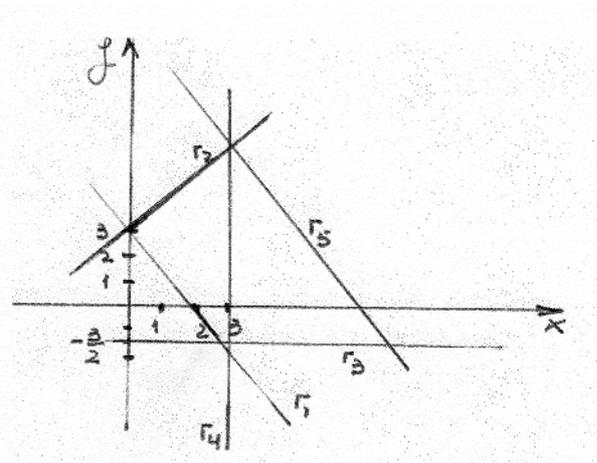
28) Escribir las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados y las diagonales del rombo.



(Considerando que las unidades marcadas representan 1, 2, 3, ...)

29) a) Completar la tabla teniendo en cuenta los datos de la figura

	Forma implícita $ax+by+c=0$	Forma explícita $y=mx+b$	Forma segmentaria
$r_1$			
$r_2$			
$r_3$			
$r_4$			
$r_5$			



siendo  $r_2 \perp r_1$   $r_3 \parallel$  eje  $x$   $r_4 \parallel$  eje  $y$   $r_5 \parallel r_1$

- b) Hallar coordenadas de los puntos de intersección  
 c) Hallar ceros, si existen

30) Determinar  $k$  tal que la recta de ecuación  $\frac{x}{k} + \frac{3}{5}y - 2k = 0$  tenga abscisa al origen igual a 3 ( $k \neq 0$ ).

31) Un estudio determinó que la altura de un árbol y la longitud de la sombra que produce (en una cierta hora del día) tienen una relación lineal.

Si el árbol mide 2 m, la longitud de su sombra será de 3 m. Si mide 9m, la longitud de su sombra será de 13,5 m.

- a) ¿Cuál será la altura de un árbol que produce una sombra de 18 m?  
 b) Encontrar la función que relaciona las dos variables anteriores. Graficar.

32) Un resorte mide 7 cm cuando colgamos de él 10 g y mide 13 cm cuando colgamos 80 g.

- a) Escribir la ecuación que relaciona la longitud  $L$  con el peso  $P$ .  
 b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso?  
 c) Teniendo en cuenta que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial. ¿Cuál es el dominio de definición de la función  $L(P)$ ?  
 d) ¿Cuál es la variación de longitud por cada 10g? Y por cada 5g? Y por cada gramo?

33) Un depósito se vacía mediante una bomba de agua. El volumen de agua que queda (en  $m^3$ ) viene dado por  $V(t) = 8 - \frac{1}{2}t$ . ¿Cuántos  $m^3$  de agua habrá al poner en funcionamiento la bomba? ¿Cuál será el volumen si el depósito se vacía con una bomba 4 veces más potente que la original?

## Funciones lineales por tramos

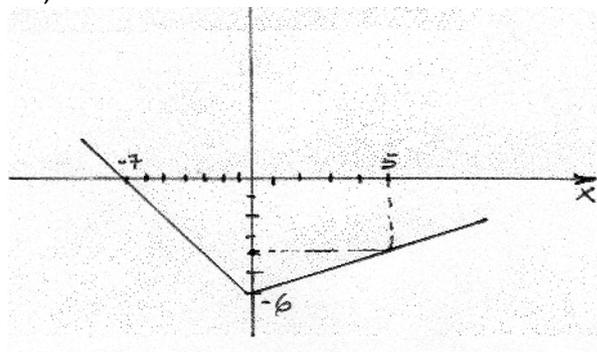
34) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} 3/2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$ .

Se pide : Graficar, definir  $I_f$ , clasificar, ceros.

35) Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } 2 < x < 5 \\ -4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ .

Se pide: graficar, definir  $I_f$ , clasificar, ceros.

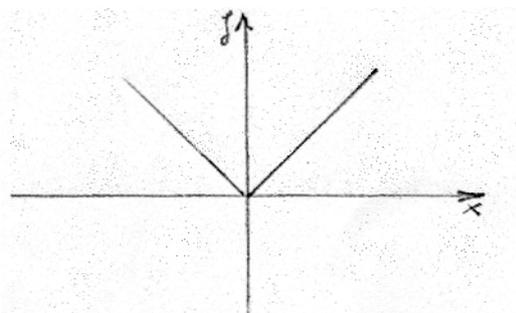
36)



Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

- Completar teniendo en cuenta el gráfico.
- ¿Es inyectiva?
- ¿Es sobreyectiva?
- Ceros
- Buscar una restricción para que sea biyectiva y hallar la inversa.

### Función módulo



Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = |x|$

Por definición de módulo de un número real podemos escribir:

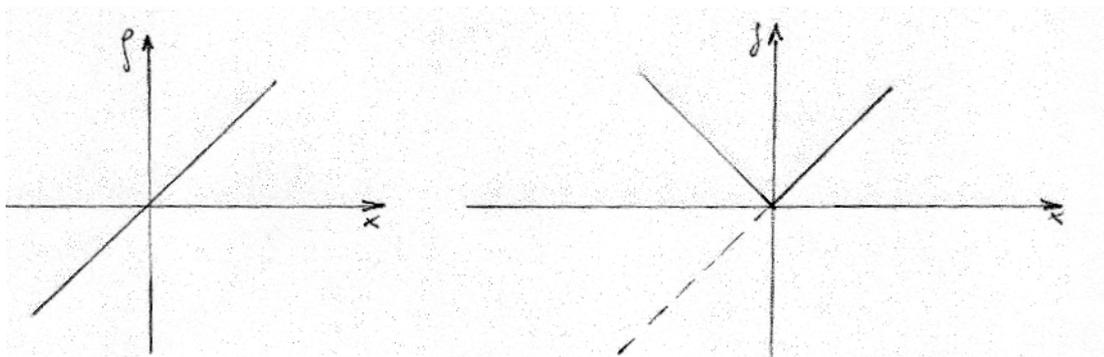
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

### Ejercicios

37) a) Conjunto imagen y clasificación de la función anterior. b) Si no es biyectiva buscar una restricción que lo sea y definir la función inversa de la misma.

Nota: es interesante observar qué sucede con el gráfico de una función cuando le aplicamos el módulo.

Representamos  $y=x$  e  $y=|x|$



La semirrecta que está incluida en el semiplano inferior en la representación de  $y=x$  pasa a ocupar el semiplano superior en la representación de  $y=|x|$ . Son simétricas respecto de  $x$ .

38) Representar en un mismo gráfico  $y=x+1$  e  $y=|x+1|$   $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sin utilizar tabla de valores para la segunda.

39) Graficar las siguientes funciones:  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  /

a)  $f(x)=3-|x|$       b)  $f(x)=1+|x-1|$

40) A partir del gráfico de  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x)=|x|$  representar:

a)  $g(x)=f(x+2)$    b)  $s(x)=f(x-2)$    c)  $h(x)=f(x)+1$    d)  $t(x)=-f(x)$

## Unidad 3: Funciones polinómicas II. Caso particular: Función cuadrática

Una función cuadrática es una función  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde  $a, b, c \in \mathfrak{R}$  y  $a \neq 0$ . Los puntos de la gráfica conforman una curva llamada parábola cuya ecuación es  $y = ax^2 + bx + c$ .

Los ceros de  $f$ , son los  $x$  /  $ax^2 + bx + c = 0$ .

¿Qué representan en el gráfico de la parábola los ceros de la  $f$ ?

### Ejercicios

- 1) a) Dadas las siguientes funciones cuadráticas, hallar ceros (completar cuadrados para resolver las ecuaciones del tipo  $ax^2 + bx + c = 0$  en los casos que sea necesario)
- b) Graficar e indicar eje de simetría.
- c) Indicar coordenadas del punto de intersección del gráfico con eje  $y$ .

1)  $f(x) = x^2 - 6x + 9$

5)  $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

2)  $f(x) = 3x^2 - 2$

6)  $f(x) = 4x^2 - 16x + 12$

3)  $f(x) = x^2 + 4x + 1$

7)  $f(x) = x^2 + 4x + 5$

4)  $f(x) = 3x^2 - 12x$

8)  $f(x) = -x^2 + x$

d) ¿qué incidencia tienen en el gráfico "a", "b" y "c"?

2) a) Verificar que toda ecuación del tipo  $ax^2 + bx + c = y$  se puede escribir de la forma:  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ , (forma canónica)

b) ¿Qué representa el punto  $(x_0, y_0)$  en el gráfico de la parábola?

c) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?

3) En las funciones del ejercicio 1,

a) Escribir la ecuación de la parábola asociada a cada caso en forma canónica, expresar coordenadas del vértice y ecuación del eje de simetría

b) Indicar en todos los casos: imagen, intervalos en que  $f(x) \geq 0$  (analíticamente)

c) Estudiar paridad

d) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento

e) Clasificar c/u de las funciones.

f) Hallar en cada caso una restricción para que sea biyectiva y encontrar la inversa.

### Desplazamientos

Podemos representar una parábola cualquiera expresada en forma canónica

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$  mediante desplazamientos de  $y = ax^2$ .

Ejemplo:

$$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

La gráfica es una parábola que se obtiene desplazando la gráfica de  $y = x^2$  2 unidades en el sentido positivo de  $x$  y 1 unidad en el sentido negativo de  $y$ .

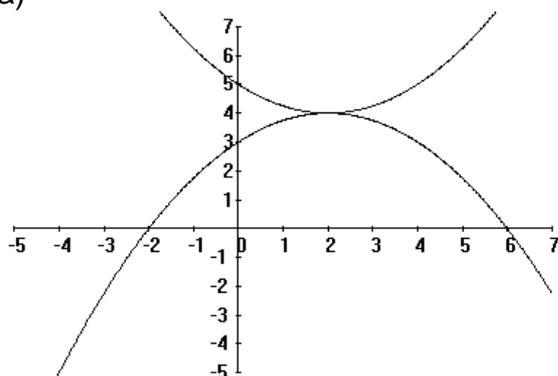
## Ejercicios

4) Dadas las parábolas  $p_2 \rightarrow y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

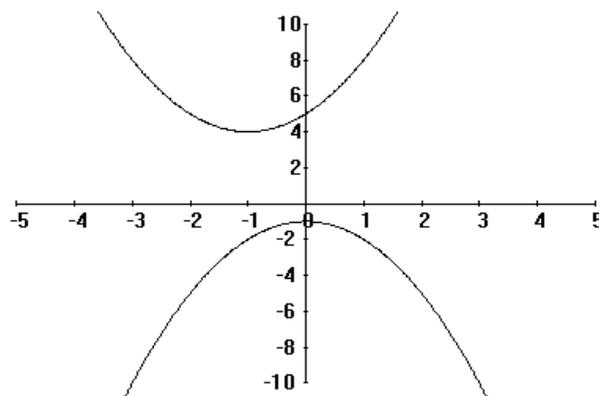
$$p_1 \rightarrow y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

donde  $|a_1| = |a_2|$  hallar las ecuaciones de  $p_1$  y  $p_2$  teniendo en cuenta en cada caso los datos que figuran en las gráficas.

a)



b)



5) a) Dada la parábola  $p_1 \rightarrow y = a_1(x-2)^2$  hallar la ecuación de la parábola  $p_2$  que pasa por el punto  $Q=(0,5)$  y tiene el mismo vértice que  $P_1$ .

¿Cuál es el valor de  $a_1$  si  $a_2=2a_1$ ?

b) Dar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos:  $A(0,6)$   $B(4,-10)$   $C(2,6)$

Determinar los ceros y el vértice. Graficarla. Determinar su imagen. Decir en qué intervalo es positiva y decreciente simultáneamente y en cuál es negativa y creciente.

## Fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado

Deduciremos una fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado o ceros de una función cuadrática en forma más práctica que completando cuadrados.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (ecuación de segundo grado)}$$

dividimos por a:  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

completando cuadrados:

$$x^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}_{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Fórmula resolvente de la ecuación de 2do. Grado**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vemos que para hallar esta fórmula, simplemente se han resuelto en términos generales los mismos cálculos que hemos realizado para los casos particulares planteados en el ejercicio 1 con valores numéricos, con la ventaja de haber obtenido una expresión general en función de los parámetros a, b y c.

### **Ejercicios:**

6) De todos los rectángulos de perímetro 8 hallar las dimensiones del que tiene área máxima.

7) Hallar dos números de suma 36 y de producto máximo.

8) Una compañía de TV por cable de acuerdo con un estudio de mercado sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de x pesos mensuales viene dada por la función  $(x)=500(300-x).x$  ( $0 < x < 300$ )

Hallar cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo

9) En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados n, a los t años está dado por:  $n(t) = -t^2 + 21t + 100$  ( $t > 0$ )

a) Calcular los valores de t para los cuales  $n=154$ .

b) ¿Se extingue la población? Si fuera así, ¿cuándo ocurre?

10) Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo, coronado por un semicírculo, cuyo perímetro total sea de 12m. Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible. Sugerencia: utilizar como variable independiente el radio del semicírculo.

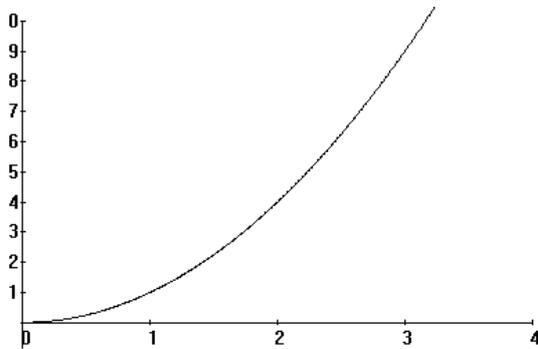
## Leyes del movimiento rectilíneo uniformemente variado

$$e = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{uniformemente acelerado sin velocidad inicial}$$

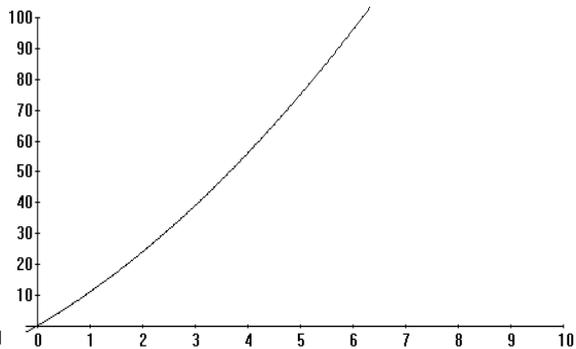
$$e = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{uniformemente acelerado con velocidad inicial.}$$

$$e = v_0t - \frac{1}{2}at^2 \quad \text{uniformemente retardado con velocidad inicial.}$$

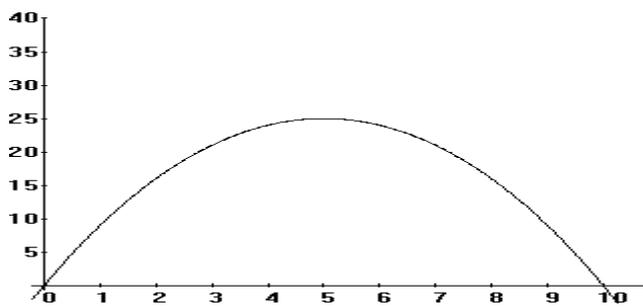
### Gráficos



$$e = t^2 \quad a = 2 \frac{m}{s^2}$$



$$e = 10t + t^2 \quad v_0 = 10 \frac{m}{s} \quad a = 2 \frac{m}{s^2}$$



$$e = 10t - t^2$$

$$v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

$$a = -2 \frac{m}{s^2}$$

## Ejercicios

11) En un movimiento rectilíneo uniformemente variado, donde:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$v_0 = -3 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$e_0 = 6\text{m}$$

$$a = 2 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

Se pide:

- Obtener  $e = f(t)$   $v = g(t)$   $a = h(t)$
- Graficar estas tres funciones en distintos sistemas de ejes coordenados.
- ¿Qué pasa en  $t=1,5$ ?  
En el intervalo  $[0;1,5)$  ¿cómo es el movimiento?  
En el intervalo  $(1,5;5]$  ¿cómo es el movimiento?
- ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa  $v = g(t)$ ?  
¿Qué representa físicamente dicha pendiente?

- 12) a) Representar  $f : \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow \mathfrak{R}_0^+ / e = f(t) = -t^2 + 10t$   
b) ¿Para qué tiempo se obtiene un “e” máximo?

13) Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad de 120 m/s. Su altura sobre el suelo  $t$  segundos después del disparo está dada por  $s(t) = -4,9t^2 + 120t$ .

- Para qué valores de  $t$  el proyectil asciende y para cuáles desciende.
- Hallar el instante en que el proyectil alcanza su altura máxima y calcularla.
- Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.
- Hallar el instante en que el proyectil alcanza los 50 m de altura.

## Discriminante de la ecuación de 2<sup>do</sup> grado

En la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  cuya fórmula resolvente es:

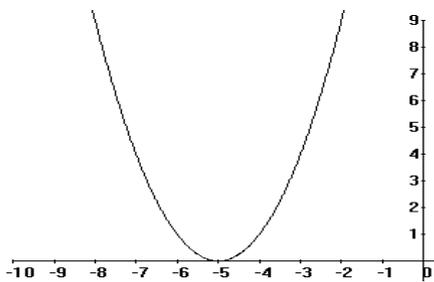
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Llamamos discriminante a la expresión  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Se dan las siguientes situaciones posibles:

- $\Delta = 0$   $x_1 = x_2$  raíces reales iguales (raíz doble)
- $\Delta > 0$   $x_1 \neq x_2$  raíces reales y distintas (raíces simples)
- $\Delta < 0$  no existen raíces en el campo real

Ejemplo: Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones.

a)



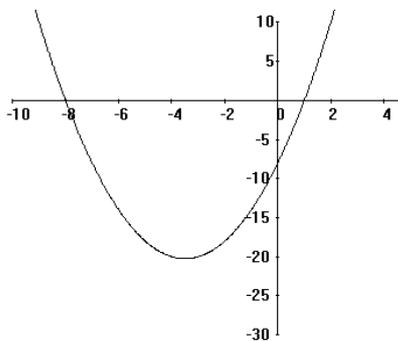
$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = -5. \text{ Raíz doble}$$

$$y = x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \quad V(-5, 0)$$

El eje x es tangente a la parábola.

b)



$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

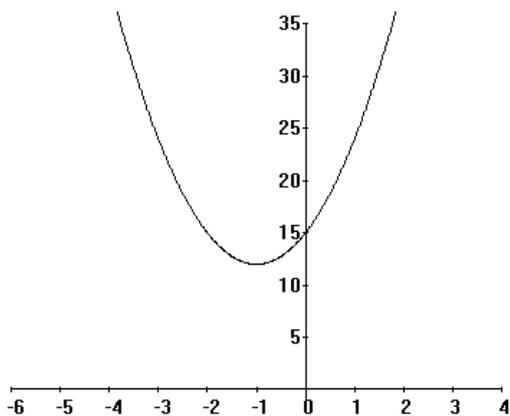
$$\Delta > 0 \quad x_1 = -8 \quad x_2 = 1 \quad x_1 \neq x_2 \text{ Raíces simples}$$

$$y = x^2 + 7x - 8 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$$

$$V\left(-\frac{7}{2}, -\frac{81}{4}\right)$$

El eje x corta a la parábola en dos puntos.

c)



$$3x^2 + 6x + 15 = 0$$

$$\Delta < 0 \text{ sin raíces reales}$$

$$y = 3x^2 + 6x + 15 = 3(x + 1)^2 + 12$$

$$V(-1, 12)$$

El eje x no corta a la parábola.

## Ejercicios

14) Indicar Vo F justificando.

Sean  $x_1$  y  $x_2$  raíces de un ecuación de segundo grado  $ax^2+bx+c=0$  y  $\Delta$  su discriminante.

$$\text{Si } x_1, x_2 \in \mathfrak{R} \Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\text{Si } x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\text{Si } b^2 > 4ac \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

$$\text{Si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

15) Siendo  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  y  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  las raíces de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) obtener  $x_1+x_2$  y  $x_1 \cdot x_2$

16) Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces son:  $x_1=5$  y  $x_2=-7$

17) Reconstruir la ecuación:  $ax^2 + bx + c = 0$  sabiendo que sus raíces son:

a)  $x_1 = 2$   $x_2 = 8$  y  $a=2$

b)  $x_1 = 1 - \sqrt{3}$   $x_2 = 1 + \sqrt{3}$  y  $a = -\frac{1}{2}$

18) Calcular en cada caso el valor que debe tener m para que la ecuación:

a)  $2x^2 + \frac{1}{2}x + m = 0$  tenga raíz doble

b)  $x^2 + x + m = 1$  tenga una raíz nula

c)  $x^2 - 8x + m = 0$  tenga una raíz igual al triplo de la otra

19) Hallar k para que la ecuación tenga raíz doble

a)  $2x^2 - (k-1)x = -\frac{1}{2}$

b)  $x^2 + 2(k-1)x + 4k = 0$

20) Hallar k para que la suma de las raíces sea igual al producto.

a)  $x^2 - (2k-3)x + k = 0$

b)  $2x^2 + (k+1)x + 3k - 5 = 0$

21) Hallar k para que  $x_1=0$

a)  $5x^2 - 5kx + 4k - 1 = 0$

b)  $x^2 + 3kx - k + 1 = 0$

22) Hallar k sabiendo que una raíz es 3 veces la otra:  $x^2 + 8x + k = 0$

## Factorización del trinomio de segundo grado

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

pero:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$     y     $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$  reemplazando:

$$y = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2)$$

$$y = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)$$

$$y = a(x(x - x_2) - x_1(x - x_2))$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

### **Ejercicios**

23) Factorizar los trinomios:

- a)  $2x^2 - 3x - 2$
- b)  $x^2 + 4x - 45$
- c)  $4x^2 - 3$
- d)  $3x^2 + 2x - 1$
- e)  $-2x^2 + 2x + 180$

24) Resolver gráficamente las inecuaciones:

- a)  $y > 2x^2 - 3x - 2$
- b)  $y \leq x^2 + 4x - 45$
- c)  $y \geq 4x^2 - 3$
- d)  $y < 3x^2 + 2x - 1$
- e)  $y \leq -2x^2 + 2x + 180$

25) Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas

- a)  $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
- b)  $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
- c)  $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
- d)  $4(x^2 - 1)^2 + 3x^2 - 3 = 0$
- e)  $(x^2 - 1)^2 - 4(x^2 - 1) + 3 = 0$

## Recta secante, recta tangente o exterior a una parábola

Resolvamos primero gráfica y luego analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \rightarrow \text{parábola} \\ 2x + y = 4 \rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

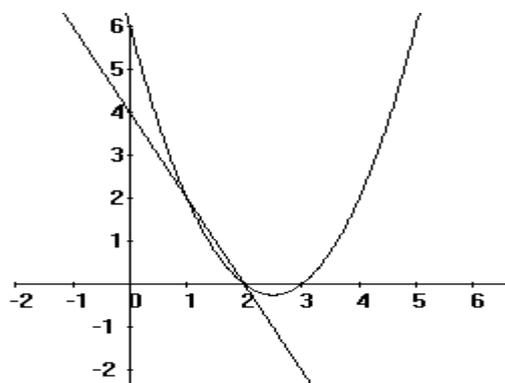
a) Gráficamente

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6$$

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Representamos la parábola  
Representamos la recta  
Las coordenadas de los puntos A(2,0) y B(1,2) resuelven el sistema.

b) Analíticamente:

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow -2x + 4 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 2x + 6 - 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0^*$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x=2 \text{ o } x=1, \quad y=0 \text{ o } y=2, \quad A(2,0) \quad B(1,2)$$

Obtuvimos 2 puntos. Observemos la ecuación \*. Al resolverla el discriminante es mayor que cero por eso encontramos 2 valores distintos para x. Es decir, existen dos puntos de intersección entre la recta y la parábola. La recta es **secante** a la parábola.

Cómo interpretarías gráficamente que el radicando hubiese sido:

- nulo? (en este caso, la recta es **tangente** a la parábola)
- negativo? (en este caso, la recta es **exterior** a la parábola)

### Ejercicios

26) Resolver analítica y gráficamente:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = -2x^2 + 4x + 6 \\ y = -6x - 6 \end{cases}$$

27) Dada la parábola  $y=x^2-5x+6$ , hallar la recta de la forma  $y=mx+b$  tal que sea tangente a dicha la parábola en el punto (1,2) ("**punto de tangencia**").

¿Existe otra recta que tenga un solo punto en común con la parábola en el punto (1,2) y no sea tangente? Indicar la ecuación. Graficar.

28) Sea  $y=x^2-2x-1$ . Determinar  $m$  para que la recta  $y=mx-2$  sea tangente a la parábola. Interpretar gráficamente e indicar punto de tangencia.

29) Dado el siguiente sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = mx - 1 \end{cases}$$

indicar para qué valores de  $m$  la recta resulta secante a la parábola

30) Dada la parábola  $y = 3x^2 - kx - 1$  y la recta  $y=kx-2$  determinar qué condición debe cumplir  $k$  para que:

a) La recta sea tangente a la parábola. Indicar punto de tangencia

b) La recta no corte a la parábola

31) Dada  $y = x^2 - 2x$  se pide

a) Ecuación de la secante que pasa por los puntos de la parábola de abscisas:  $x_1=3$   
 $x_2=4$ .

b) Ecuación de la tangente en el punto correspondiente a  $x_1=3$ .

32) Hallar  $k$  para que la recta  $y=2x+k$  sea tangente a la parábola  $y=2x^2-2x$ . Gráficos correspondientes.

### **Ejercicios optativos:**

34) Sea  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  i) Graficar ii) Conjunto imagen iii) Clasificar

a)  $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \right\rfloor$       b)  $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ -3 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

35) Considerando las funciones del ejercicio 11:

a) En el gráfico que representa  $e = f(t)$  trazamos la recta que pasa por (2,4) y tiene pendiente igual a la velocidad para  $t_1=2$ .

¿Cómo resulta esta recta con respecto a la parábola?

b) Trazar en el gráfico que representa  $e = f(t)$  la recta tangente a la parábola en  $t_0=1,5$

¿Cuál es la pendiente de esta recta y qué representa dicha pendiente?

## Unidad 4: Funciones polinómicas III. Funciones polinómicas en general. Polinomios.

En la Unidad 2 ya hemos mencionado que la expresión:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_n \neq 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{R}$  se denomina

Polinomio de grado n

Y la función  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  se denomina función polinómica de grado n.

Las funciones lineal y cuadrática que hemos estudiado en las unidades anteriores son casos particulares de ésta cuando n es igual a 1 o 2 respectivamente.

En esta unidad trabajaremos en general las funciones polinómicas de cualquier grado.

### Ejercicios

- 1) a) Graficar  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = x^3$   
 b) Graficar  $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / g(x) = (x - 2)^3 + 1$  desplazando la gráfica anterior.  
 c) Clasificar  $y=g(x)$ , hallar  $y=g^{-1}(x)$  y graficarla.

2) Indicar si es V o F según corresponda:

- a) 2 es un cero de  $f(x)=x^2+4$   
 b) -2 es un cero de  $f(x)=x^2+4$   
 c) -1 es un cero de  $f(x)=x^3+1$   
 d) -3 es un cero de  $f(x)=x^3+5/2x^2-3/2x$

### **Sobre los ceros (o raíces) de una función polinómica:**

Los ceros de una función polinómica son las raíces de la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Si esta ecuación asociada a la función tiene raíz  $x_0$ , simple o múltiple de orden impar, la gráfica de f atraviesa al eje x en  $x_0$ .

Si la ecuación asociada a la función tiene raíz  $x_0$ , múltiple de orden par, la gráfica de f no atraviesa al eje x en  $x_0$ .

Ejemplo:

Dada la función polinómica:  $f(x) = x^3 - 3x$  deseamos conocer los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores positivos o negativos.

$$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$$

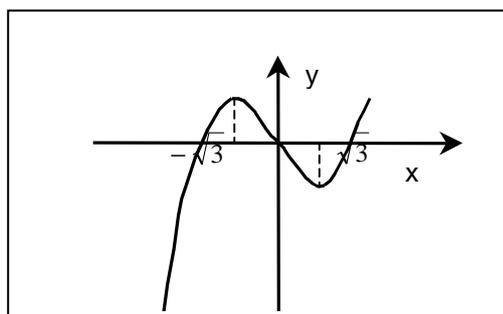
$$\text{Ceros: } x=0 \quad x=\sqrt{3} \quad x=-\sqrt{3}$$

Son tres ceros simples  $\Rightarrow$  la gráfica de f atraviesa al eje x en cada uno de ellos.

Completar la tabla

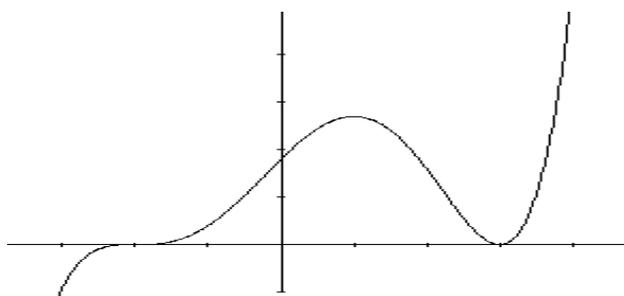
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f(x)		0		0		0	

Si además de esto pudiéramos encontrar los máximos y mínimos podríamos dibujarla. (la función polinómica es continua)



### Ejercicios

3) En el siguiente gráfico, indica en qué punto la función tiene un cero de orden impar y en qué punto, un cero de orden par.



4) Encontrar los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores negativos o positivos, gráfica aproximada:  $f(x)=x^3-3x^2$ .

5) Dadas las siguientes funciones definidas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , hallar ceros, intervalos de positividad, estudiar paridad. Graficar. Indicar conjunto imagen:

- a)  $f(x)=x^3+2$
- b)  $f(x)=(x+2)^3$
- c)  $f(x)=(x-1)^3+2$
- d)  $f(x)=-x^3$
- e)  $f(x)=2x^3$
- f)  $f(x)=x^4$
- g)  $f(x)=-x^4+3$

6) Clasificar las funciones del ejercicio anterior cuando están definidas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Indicar, cuando sea necesario, restricciones en los conjuntos para que sean biyectivas. En esos conjuntos, definir las funciones inversas.

### Igualdad de polinomios:

7) Determinar a, b y c (números reales) tales que los siguientes polinomios sean iguales:

- a)  $p(x)=a(3x-5)+b(2x-1)+cx^2$   
 $q(x)=6-5x$
- b)  $p(x)=a(2x+1)+(bx+c)(2x-1)$   
 $q(x)=(x+1)(4x+3)$



## Ejercicios

11) Dividir  $a(x)$  y  $b(x)$

a)  $a(x) = 3x^3 - 2x^5 - 2x^2 - 2x + 5$

$$b(x) = x^3 - x + 2$$

b)  $a(x) = 6x^4 - x^2 + 1$

$$b(x) = 3x^2 - x$$

c)  $a(x) = x^4 + c^2x^2 + c^4$   $c$  es constante

$$b(x) = x^2 + cx + c^2$$

d)  $a(x) = x^3 - c^3$

$$b(x) = x + 2c$$

e)  $a(x) = x^4 - c^4$

$$b(x) = x^2 + c^2$$

f)  $a(x) = -\frac{1}{3}x^5$

$$b(x) = x^2 - x$$

g)  $a(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$

$$b(x) = -x + 1$$

h)  $a(x) = cx + 2c^2 - 1 - 2cx^3 - (2 + c^2)x^2$

$$b(x) = 2x + c$$

## Regla de Ruffini

Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio por otro que guarda la forma:  $x+a$  o  $x-a$

Ejemplos:

I] Hallar el cociente y el resto de la división

$$(-6x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2) : (x + 1)$$

La disposición práctica es la siguiente:

	-6	2	-1	-1	2
	coeficientes del dividendo				
opuesto del termino ind. del div.	-1				
	-6	6	-8	9	-8
		8	-9	8	-6
	coeficientes del cociente				
					resto

$c(x) = -6x^3 + 8x^2 - 9x + 8$      $r(x) = -6$

II]  $(7x^4 + 1 - 2x^2) : (x - 3)$

	7	0	-2	0	1
3		21	63	183	549
		7	21	61	183
					550

$c(x) = 7x^3 + 21x^2 + 61x + 183$   
 $r(x) = 550$

Notas:

- En todos los casos de división entre un polinomio  $p(x)$  y un binomio de la forma  $x+a$  o  $x-a$  el resto es una constante. Justificar.
- Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es divisible por el divisor

Ejemplos:

I]  $(x^2 - 9) : (x - 3)$

$$c(x) = x + 3 \quad r(x) = 0$$

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$  hemos factorizado el dividendo

II] Polinomios ya factorizados:

$y = x^2(x - 1)$  es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son  $x_1 = 0$  (doble) y  $x_2 = 1$  (simple)

$y = 2x(x - 1)^2(x + 2)^3$  es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son  $x_1 = 0$  (simple)

$x_2 = 1$  (doble) y  $x_3 = -2$  (triple)

$y = x(x + 1)(x^2 + 1)$  es una función polinómica de grado 4. Tiene solo 2 ceros reales  $x = 0$  y  $x = -1$

## Teorema del resto

El resto de la división  $p(x) : (x + a)$  con  $a$  real es  $r = p(-a)$

Lo demostraremos:

$$\begin{array}{l} p(x) \quad \overline{)x+a} \\ r \quad \quad q(x) \end{array} \quad p(x) = (x+a) \cdot q(x) + r$$

$$p(-a) = (-a+a)q(a) + r = r$$

Ejemplo: Siendo  $p(x) = x^3 + kx^2 - kx - 9$  determinar  $k$  para que  $-3$  sea raíz de  $p(x)$   
 $p(-3) = 0 = (-3)^3 + k(-3)^2 - k(-3) - 9 \quad k = 3$

O sea  $p(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$  es divisible por  $(x+3)$

Podría factorizarlo:

	1	3	-3	-9
-3		-3	0	9
	1	0	-3	0

$$p(x) = (x+3)(x^2-3)$$

### Ejercicios

12) Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre  $a(x)$  y  $b(x)$ :

a)  $a(x) = x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 1 \quad b(x) = x - 2$

b)  $a(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x - 1 \quad b(x) = x + 2$

c)  $a(x) = x^3 + m^3 \quad b(x) = x + 2$

d)  $a(x) = 16x^4 + 1 \quad b(x) = x + 1$

e)  $a(x) = -x + 2 - x^2 + x^5 \quad b(x) = x - \frac{1}{2}$

f)  $a(x) = mx^4 - m^5 \quad b(x) = x - m$

g)  $a(x) = (x - 3)^2 - 2(x + 1) \quad b(x) = 2x - (x - 1)$

h)  $a(x) = (x^2 - m)(x^2 + m) \quad b(x) = (x + m)(x - m) - x(x - 1)$

13) Calcular directamente los restos de las divisiones del ejercicio anterior.

14) Calcular  $m$  para que  $a(x)$  sea divisible por  $b(x)$

a)  $a(x) = x^4 - mx^2 + 1$

$b(x) = x + 1$

b)  $a(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 2$

$b(x) = x + 1$

15) Investigar si  $p(x)$  es divisible por  $q(x)$  en los siguientes casos. Extraer conclusiones:

a)  $p(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1} \quad q(x) = x + a$

b)  $p(x) = x^{2n+1} - a^{2n+1} \quad q(x) = x - a$

c)  $p(x) = x^{2n} - a^{2n} \quad q(x) = x + a$

d)  $p(x) = x^{2n} - a^{2n} \quad q(x) = x - a$

e)  $p(x) = 8x^3 + 1 \quad q(x) = 2x + 1$

f)  $p(x) = x^{2n} + a^{2n} \quad q(x) = x - a$

16) Calcular  $k$  para que  $a(x)=(-x+1)^2$  sea divisible por  $b(x)=x-k$

17) Sea  $a(x)=2x^4-x^2+mx-m$  Calcular  $a$  sabiendo que la diferencia de los restos de su división por  $(x+m)$  y  $(x-m)$  es igual a  $-1$ .

18) Determinar  $m$  y  $t$  para que  $a(x)=x^4+mx^2+t$  sea divisible por  $b(x)=x^2+x+1$

19) Calcular el valor de  $a$ , si  $r$  es el resto de  $p(x):q(x)$

a)  $p(x)=4x^3-x^2+ax-2$ ,  $q(x)=x-2$ ,  $r=26$

b)  $p(x)=5x^4+ax^2+ax^3+3x^2$ ,  $q(x)=x-3$ ,  $r=0$

20) En una división de polinomios:

divisor:  $2x^2+x+5$

cociente:  $x^2+x$

resto:  $x+6$

hallar el polinomio dividiendo

21) Determinar  $k$  para que el resto de la división entre  $3kx^4+(k+1)x^3+2x^2$  y  $x+1$  sea  $-1$

## Factorización de un polinomio

Cuando  $b$  es un cero o raíz de un polinomio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$(x-b)$  es divisor de  $p(x)$ , luego  $p(x)$  podría factorizarse como:

$p(x)=(x-b)q(x)$ , siendo  $q(x)$  el cociente de la división

Es posible que  $q(x)$  tenga más raíces con lo que puede iterarse el proceso factorizando  $q(x)$ .

Es decir,  $p(x)$  puede descomponerse en más factores si conocemos todas sus raíces reales.

$$p(x) = a_n (x - b_0)(x - b_1) \dots (x - b_n)$$

**Ejemplo:** la factorización de una función polinómica de grado 3 cuyos ceros son  $x_1=0$   $x_2=1$  y  $x_3=-2$ , es:

$$y=ax(x-1)(x+2)$$

El valor de "a" no está determinado, por lo tanto existen infinitas funciones que cumplen con la condición. Podemos obtener una de ellas dándole un valor cualquiera a "a".

Si se pidiese que la función sea tal que además cumpla que  $f(2)=4$

$$f(2)=a \cdot 2(2-1)(2+2)=4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \text{ es decir, "a" queda determinado}$$

$$y = \frac{1}{2} x(x-1)(x+2)$$

Nota aclaratoria:

Un polinomio de grado no nulo es primo cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. Son primos únicamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales. Cuando un polinomio no es primo es compuesto.

## Ejercicios

22) Encontrar un polinomio

a) de grado 3 que tenga raíces  $2, -1$  y  $\frac{1}{2}$

b) de grado 4 que tenga como únicas raíces  $a: -1$  y  $2$

c) de grado 4 que tenga al menos 2 raíces simples reales:  $-1$  y  $2$

23) Escribir un polinômio de grado 8 tal que  $-1$  es una raíz de multiplicidad 3 y cero sea una raíz de multiplicidad 5.

24) Mostrar que 1 es una raíz de multiplicidad 3 de  $p(x)=x^4+x^3-9x^2+11x-4$ . Encontrar la otra raíz.

25) Definir un polinomio  $p(x)$  de grado 5 tal que sus únicas raíces reales sean  $x= 1$  de multiplicidad 2 y  $x=-2$  de multiplicidad 1 y además  $p(-1) = 3$

### Teorema de Gauss

Sea  $m(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polinomio en el cual sus coeficientes son números enteros. Si existen raíces racionales de  $m(x)$ , entonces dichas raíces son de la forma

$$\frac{p}{q} \text{ donde } \begin{cases} p \text{ divide a } a_0 \\ q \text{ divide a } a_n \end{cases}$$

con  $p$  y  $q$  primos entre si y  $a_0 \neq 0$

Si bien las raíces de un polinomio de las características enunciadas pueden no ser racionales, el teorema de Gauss permite buscar fácilmente sólo las que lo son, logrando una factorización del polinomio  $m(x)$ .

### Ejemplos:

1] Factorizar  $p(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

$a_n=1$   $a_0=12$ .

$$\text{divisores de } a_0 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

$$\text{divisores de } a_n = \{\pm 1\}$$

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Por ser  $a_n=1$  vemos que los divisores de 12 son las posibles raíces de  $m(x)$

$m(1)=0 \Rightarrow 1$  es raíz

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0

$$m(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$$

Buscamos las raíces de  $x^3+3x^2-4x-12$

Probemos con 1:  $1+3-4-12 \neq 0$ , 1 no es raíz

Probemos con  $-1$ :  $(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 12 \neq 0$ ,  $-1$  no es raíz

Probemos con 2:  $2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 0$  es raíz, 2 es raíz

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$$m(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$$

factorizamos el trinomio de segundo grado:  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

$$m(x) = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$$

$$\text{II] } m(x) = 3x^3 + 8x^2 - 2x - 4 \quad a_n = 3 \quad a_0 = -4$$

Buscamos los divisores de 4 y de 3.

Cualquier raíz debe estar entre los números:  $\pm \frac{2}{3}, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm 1, \pm 4, \pm \frac{4}{3}$

De estas 12 posibles sólo 3 pueden ser raíces de la ecuación  $3x^2 + 8x^2 - 2x - 4 = 0$

$$m\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

	3	8	-2	-4
-0,67		-2	-4	4
	3	6	-6	0

$$m(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 6)$$

Factorizamos el trinomio de segundo grado

$$3x^2 + 6x - 6 = 3\left(x - (-1 + \sqrt{3})\right)\left(x - (-1 - \sqrt{3})\right)$$

y vemos que sus raíces no son racionales, no hubieran surgido de Gauss: se puede probar que ninguno de los otros 11 valores es raíz del polinomio.

$$m(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right)\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)$$

### **Ejercicios**

26) Factorizar

a)  $x^2 - 2x + 3 + (x + 1)^2$

b)  $x^4 - 5x^2 + 4$

c)  $-4x^4 + 12x^2 - 9$

d)  $x^4 - 64$

e)  $x^6 + 2x^3 + 1$

f)  $8x^4 - x$

g)  $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

h)  $x^5 - 2x^4 + 3x - 6$

i)  $\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{6}$

27) Determinar las raíces reales de

a)  $t(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$

b)  $r(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 8x + 8$

28) Determinar las raíces de los polinomios, establecer la multiplicidad de cada raíz y graficar aproximadamente.

a)  $p(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2$

b)  $t(x) = x^3(x^2 - 4)^2$

c)  $q(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

d)  $r(x) = (2x^2 - 4x + 2)(x^4 - x^2 - 12)$

## Unidad 5: Funciones racionales no enteras o fraccionarias y funciones irracionales

### Expresiones y funciones racionales

La expresión  $\frac{p(x)}{q(x)}$  con  $p(x)$  y  $q(x)$  polinomios, se denomina expresión algebraica racional.

Una función racional es una función que asigna a través de una expresión racional.

$f : A \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  siendo  $p(x)$  y  $q(x)$  dos polinomios tales que  $q(x)$  es de grado mayor o igual que 1 y  $A = \{x / x \in \mathfrak{R} \text{ y } q(x) \neq 0\}$

Ejemplo de función racional:

$$f : \mathfrak{R} - \{-2; 2\} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 7}{x^2 - 4}$$

1] Hallar el dominio más amplio en  $\mathfrak{R}$ , ceros y representar:

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

b)  $f(x) = \frac{x - 3}{-x^2 + 9}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^3 - x^2 - 12x + 4}$

### Casos particulares de funciones racionales:

a) Cuando el numerador y el denominador tienen raíces comunes, pueden factorizarse y simplificarse, obteniendo una expresión más sencilla. Sin embargo, el dominio mayorante de la función sigue siendo el conjunto de los números Reales de los cuales se excluyen los puntos que anulan el denominador de la función dada.

Por ejemplo:  $f : \mathfrak{R} - \{3\} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$

Esta fracción puede simplificarse pues  $x \neq 3$   $f(x) = x + 3$ . Tiene por gráfica a una **recta** de ecuación  $y = x + 3$  excluido el punto (3,6).

b) **Función homográfica:**  $f : \mathfrak{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad c \neq 0$

La consideramos función homográfica siempre que no pueda reducirse a una función constante. ¿En qué caso se produciría esta situación?

Notemos que  $\mathfrak{R}$  no es el conjunto imagen. Hallar el conjunto imagen.

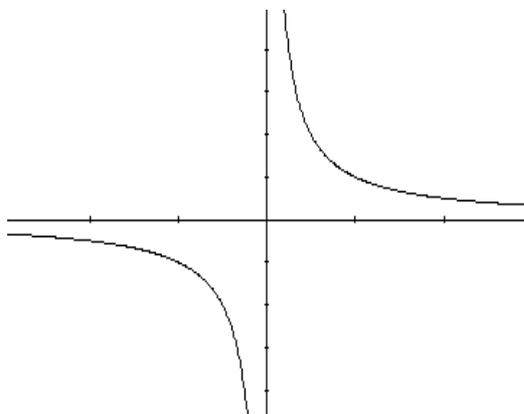
La gráfica de la función homográfica es una curva llamada **hipérbola equilátera**.

## Estudio de la función homográfica

Sea la función homográfica que surge de la definición con  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $c=1$  y  $d=0$

$$y = \frac{1}{x}$$

x	y
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2



Conforme los valores de  $x$  están más próximos a cero el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que el valor absoluto de  $f(x)$  tiende a infinito cuando  $x$  se acerca a cero), en símbolos

$$|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$$

Entonces diremos que el eje  $y$ , de ecuación  $x=0$ , es asíntota vertical de la curva.

diremos que el eje  $y$ , de ecuación  $x=0$ , es

**En general, diremos que la recta de ecuación  $x=a$  es una asíntota vertical de la curva gráfica de  $f$ , cuando**

$$|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$$

Volviendo al gráfico, vemos que a medida que  $x$  crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a cero.

$$f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

Diremos que el eje  $x$ , de ecuación  $y=0$ , es asíntota horizontal al gráfico de  $f(x)$ .

**En general, diremos que la recta de ecuación  $y=b$  es una asíntota horizontal de la curva gráfica de  $f$ , cuando**

$$f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} b$$

Las asíntotas (en este caso los ejes coordenados) son perpendiculares, por eso se llama hipérbola equilátera (sólo este tipo de hipérbola será objeto de estudio en este curso) y se cortan en un punto que es el centro de simetría de la curva. La hipérbola tiene 2 ramas que en este caso están situadas en el 1<sup>er</sup> y 3<sup>er</sup> cuadrante (recordemos que los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del semieje positivo de las  $x$ )

Si representamos  $f(x) = -\frac{1}{x}$  las ramas estarían en el 2<sup>do</sup> y 4<sup>to</sup> cuadrante.

Conociendo la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$  puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos la gráfica de :

$$f(x) = \frac{k}{x - x_0} + y_0 \text{ (forma canónica)}$$

La gráfica de esta función es una hipérbola que se obtiene de la gráfica de  $f(x) = \frac{k}{x}$  desplazándola  $x_0$  unidades en el sentido positivo de  $x$  (si  $x_0 > 0$ ) y  $y_0$  unidades en el sentido positivo de  $y$  (si  $y_0 > 0$ )

Si la función está dada en la forma  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  puede llevarse a la forma canónica

$$f(x) = \frac{k}{x-x_0} + y_0 \quad \text{de dos maneras:}$$

Veamos un ejemplo:

$$f(x) = \frac{x+1}{3x+2}$$

- **Completando los términos para simplificar y obtener la forma canónica**

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}(3x+3)}{3x+2} = \frac{\frac{1}{3}(3x+2+1)}{3x+2} = \frac{\frac{1}{3}(3x+2) + \frac{1}{3}}{3x+2} = \frac{\frac{1}{3}(3x+2)}{3x+2} + \frac{\frac{1}{3}}{3x+2}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{3x+2}, \text{ sacando factor comun 3 y operando}$$

$$\text{con el numerador } 1/3:3=1/9, \text{ tenemos } f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

- **O bien, dividiendo los polinomios se obtiene cociente  $\frac{1}{3}$  y resto  $\frac{1}{3}$**

$$\text{Por ser una división entera } x+1 = \frac{1}{3}(3x+2) + \frac{1}{3}$$

**Dividiendo miembro a miembro por  $3x+2$**

$$f(x) = \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{3x+2} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$av: x = -\frac{2}{3} \quad ah: y = \frac{1}{3} \quad D_f = \Re - \left\{ -\frac{2}{3} \right\} \quad I_f = \Re - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

## Ejercicios

2] Dadas las funciones:

a)  $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

b)  $f(x) = \frac{x-2}{5x-10}$

$$c) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$e) f(x) = \frac{5}{x} + \frac{8+2x}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{2,5x+20}{5x+50}$$

$$f) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$g) f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$$

Se pide: a) Graficarlas b) Dominio e imagen c) Ceros d) En los casos de funciones homogáficas: pasaje a la forma canónica y ecuaciones de las asíntotas

3] Dadas las siguientes funciones, se pide forma canónica, ecuaciones de las asíntotas, gráficos correspondientes, ceros, intervalos donde la función es positiva y creciente.

$$a) f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$$

$$b) f(x) = \frac{-2x-3}{x-1}$$

4] Sea  $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{x-3}$

¿Para qué valores de  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ :

a)  $f(x) > 2$ ?

b)  $f(x) > -1$ ?

c)  $-1 < f(x) < 2$  ?

Resolver analítica y gráficamente.

5] Sea  $f : A \rightarrow B / f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Hallar A y B mayorantes para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

6] Representar, determinar el conjunto imagen y clasificar en  $\mathbb{R}$ . En el caso de no ser biyectiva, buscar una restricción que lo sea y hallar la inversa.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

7] Graficar:

$$a) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$d) f(x) = \left| \frac{-2}{x-2} \right| + 3$$

$$b) f(x) = \left| \frac{1}{x-2} + 3 \right|$$

$$e) f(x) = \frac{1}{|x|-2}$$

$$c) f(x) = \left| \frac{-2}{x-2} + 3 \right|$$

8] Hacia un tanque de agua que contiene agua pura fluye agua salada de modo tal que la concentración de sal en un tiempo  $t$  está dada por la función  $c(t) = \frac{t}{10t+100}$  ( $t > 0$ )

Graficar  $c$  y discutir el comportamiento de la función cuando  $t \rightarrow \infty$ . Interpretar

9] La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar la dosis de medicamentos para adultos (representada por "a" y medida en mg) a fin de que sirvan para niños:

$$f(t) = \frac{at}{t+12} \quad t > 0 \quad a \text{ en mg}$$

Hasta qué edad un niño debe consumir menos de la mitad de la dosis máxima. Suponiendo  $a=2$  mg. ¿Cuál es el gráfico que permite visualizar la variación de la dosis con el tiempo?

10] Sea  $f : A \rightarrow B / f(x) = \frac{2x(x+1)}{x^2-1}$

Hallar A y B máximos para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

### Operatoria con expresiones racionales

11] Reducir a su mínima expresión haciendo las restricciones necesarias:

a)  $\frac{1}{x+1} + \frac{x-2}{x^3+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}$

d)  $\left(\frac{x-2}{x-1} - \frac{x-3}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2-x+3(x-1)}{25x^2-81}$

b)  $\frac{\frac{x^3}{8}-1}{\frac{x^2}{4}-1} : \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)$

e)  $\frac{x^2-21x-7}{7-x} : \left(\frac{4x+1}{7+x} + \frac{2x+1}{7-x}\right)$

c)  $\left(x + \frac{2}{x-1}\right) \left(\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+2x}\right)$

f)  $\frac{\left(-\frac{1}{1-x^2} + \frac{1+x}{1-x}\right) \left(\frac{2(1-x)^2}{x^2+4x+4} + \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}\right)}{\frac{x}{4-x^2}}$

12] Efectuar:  $\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

13] Hallar A y B para que:

a)  $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{3x-1}{x^2+x-2}$

b)  $\frac{2A}{2x-1} - \frac{B}{x+3} = \frac{2x+13}{2x^2+5x-3}$

14] (Optativo) Descomponer en fracciones simples:

- a)  $\frac{x}{x^2 - 1}$   
 b)  $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2}$   
 c)  $\frac{x^4}{x^2 - 1}$   
 d)  $\frac{x^5 - 1}{x^2 + x}$

### Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con expresiones racionales

15] Resolver las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta en cada caso el dominio de definición

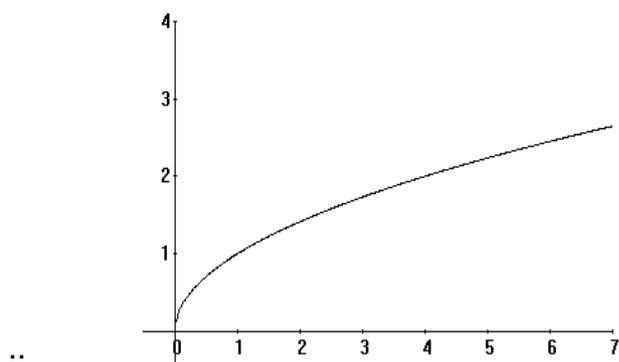
- c)  $\frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}$   
 d)  $\frac{x}{x^2 - 9} = \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-3}$   
 e)  $\frac{x-6}{x+4} + \frac{x-3}{x+2} = \frac{13x-48}{x^2 + 6x + 8}$

16] Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones analítica y gráficamente:

- a)  $\begin{cases} y = \frac{x+3}{x-1} \\ y = x-3 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} y = \frac{2x+4}{x+3} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$       c)  $\begin{cases} y = \frac{1}{x+1} \\ y = -1 \end{cases}$

### Funciones cuyas fórmulas contienen expresiones irracionales

a)  $f: \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \sqrt{x}$ ,  $I_f = \mathfrak{R}_0^+$  ceros:  $x=0$ . Es estrictamente creciente



## Ejercicios

17] Teniendo en cuenta la gráfica de  $f : A \rightarrow R(A \subset R) / f(x) = \sqrt{x}$  y mediante simetrías y/o desplazamientos.

Graficar:

- a)  $f(x) = -\sqrt{x}$
- b)  $f(x) = \sqrt{x-1}$
- c)  $f(x) = \sqrt{x+1}$

En todos los casos obtener: dominio máximo, ceros, conjunto imagen. Analizar si son biyectivas y obtener las funciones inversas (si es necesario restringir).

18] Dada  $f : A \rightarrow R(A \subset R) / f(x) = \sqrt{1-x^2}$  se pide: a) Dominio máximo, b) Conjunto imagen, c) Ceros, d) Gráfica, e) Clasifique, f) Buscar una restricción biyectiva, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

19] Sea  $f : A \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \sqrt{|x|+1}$  se pide:

- a) Dominio máximo, b) conjunto imagen, c) ceros, d) gráfico, e) clasificación, f) intervalo en que la función es positiva y creciente simultáneamente, g) si no es biyectiva buscar una restricción que lo sea, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

20] Sea  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ . Clasificar. Hallar la inversa (si es necesario restringir). Graficar ambas.

$$21] f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

Se pide: representar, conjunto imagen, ceros, clasificar, inversa (si es necesario buscar una restricción).

22] Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, teniendo en cuenta las restricciones:

a)  $\sqrt{1-x} = \sqrt{x^2-5}$

b)  $x+2 = 13 - \sqrt{x-5}$

c)  $\sqrt{x^2-5} + 7 = x^2$

d)  $x^2 + \sqrt{x^2+9} = 21$

e)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

## ALGEBRA DE FUNCIONES

### IGUALDAD

Dos funciones  $f: D_f \rightarrow B$  y  $D_g \rightarrow C$  son iguales cuando:

$D_f = D_g$  ;  $B = C$  y para todo  $x$ :  $f(x) = g(x)$

Por ejemplo:

Las funciones  $f: R - \{2\} \rightarrow R / f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  y  $g: R \rightarrow R / g(x) = x + 2$

no son iguales ya que  $D_f \neq D_g$ , sin embargo, notemos que para todo  $x \neq 2$ ,  $f(x) = g(x)$ . Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual  $f$  no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo  $g(2) = 4$

Si definimos una función  $h: R \rightarrow R / h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ , resulta  $h = g$

### SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

$f+g(x) = f(x)+g(x)$  para todo  $x$ , siendo  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$  para todo  $x$ , siendo  $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  para todo  $x$ , siendo  $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in R / g(x) \neq 0\}$

Ejemplo :

Sean  $f(x) = \frac{1}{x-1}$   $D_f = R - \{1\}$  y  $g(x) = \sqrt{x}$   $D_g = R_0^+$  entonces,

$(f + g)(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$   $D_{f+g} = R_0^+ - \{1\}$

$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \sqrt{x}$   $D_{f \cdot g} = R_0^+ - \{1\}$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{(x-1) \cdot \sqrt{x}}$   $D_{\frac{f}{g}} = R^+ - \{1\}$

### COMPOSICION DE FUNCIONES

Analicemos la siguiente situación: el área de un círculo depende del radio. Si a su vez el radio aumenta al transcurrir el tiempo según la función  $r(t) = 3t$ , resulta:

$$A(r) = \pi \cdot r^2 \text{ con } r(t) = 3t$$

El área del círculo, depende entonces del tiempo a través de la función  $A(r(t)) = \pi \cdot (3t)^2$

**Definición:** Dadas dos funciones  $f: D_f \rightarrow I_f$  y  $g: D_g \rightarrow I_g$  y tales que  $I_f \subset D_g$ , llamamos función compuesta  $g$  sobre  $f$ , a  $g \circ f: D_f \rightarrow I_g$  para todo  $x$ ,  $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Observaciones:

\* La imagen de  $f$  debe estar incluida en el dominio de  $g$  para que todos los elementos de  $D_f$  tengan imagen a través de la función compuesta  $g \circ f$ .

\* La imagen de  $g$  es, en general, el codominio (conjunto de llegada) de la compuesta y no su conjunto imagen, ya que puede haber elementos en el dominio de  $g$  que no sean imagen de ningún elemento de  $D_f$  (si la inclusión es estricta)

\* Si la inclusión pedida en la definición no se verifica, pueden hacerse las restricciones necesarias para la composición.

Veamos un ejemplo para aclarar estos puntos:

$$\text{Sean } f(x) = 2x+1 \quad \text{y } g(x) = \frac{1}{x-1} \quad \begin{array}{ll} D_f = \mathbb{R} & I_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} - \{1\} & I_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array}$$

Para realizar la composición  $g \circ f$  debemos verificar que la imagen de la primera función a aplicar ( $f$ ) esté incluida en el dominio de la segunda función a aplicar ( $g$ ). Esto no se verifica, entonces realizamos la siguiente restricción:

Como necesitamos que 1 no pertenezca a  $I_f$ , para eliminarlo, restringimos  $D_f$ . Notemos que  $2x+1=1$  cuando  $x=0$ . Bastará entonces tomar como  $D_f^* = \mathbb{R} - \{0\}$ , luego la

Imagen correspondiente será  $I_f = \mathbb{R} - \{1\}$  que coincide (y por lo tanto está incluida) en  $D_g$ .

A pesar de que, hechas las restricciones las funciones no son las mismas, usaremos por comodidad las mismas letras para nombrarlas.

$$\text{Ahora; } g \circ f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} / g \circ f(x) = g[f(x)] = g[2x+1] = \frac{1}{2x+1-1} = \frac{1}{2x}$$

Para hallar  $f \circ g$ , debemos analizar si el  $I_g$  está incluida en el  $D_f$ .

Como  $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ , podemos realizar la composición:

$$f \circ g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} / f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2 \cdot \frac{1}{x-1} + 1 = \frac{1+x}{x-1}$$

Notemos que como la inclusión es estricta, el conjunto  $\mathbb{R}$  es el codominio (conjunto de llegada) y no la imagen de la función compuesta  $f \circ g$

Como vemos,  $f \circ g \neq g \circ f$ . La composición de funciones no es un operación conmutativa.

Puede demostrarse que la composición de funciones es asociativa.

### Composición de funciones inversas:

Sean las funciones biyectivas  $f: A \rightarrow B$  y  $f^{-1}: B \rightarrow A$

a través de  $f$  a cada  $x$  de  $A$  le corresponde un  $y$  de  $B$

a través de  $f^{-1}$  a cada  $y$  de  $B$  le corresponde un  $x$  de  $A$

O sea  $f^{-1}(f(x)) = x$  que se denomina función identidad y está definida de  $A$  en  $A$

Análogamente, si aplicamos primero  $f^{-1}$ , diremos:

a través de  $f^{-1}$  a cada  $x$  de  $B$  le corresponde un  $y$  de  $A$

a través de  $f$  a cada  $y$  de  $B$  le corresponde un  $x$  de  $A$

Entonces;  $f(f^{-1}(x)) = x$  que es la identidad, pero ahora definida de  $B$  en  $B$ .

Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto de la recta  $y=x$  (gráfica de la función identidad).

### Ejercicios

23] Dados los siguientes pares de funciones  $f$  y  $g$  indicar para cada una dominio mayorante e imagen y hallar  $f+g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  indicando el dominio mayorante de cada una.

a)  $f(x) = x^2$                        $g(x) = 2x-1$   
b)  $f(x) = x^2$                        $g(x) = \sqrt{x}$   
c)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$                        $g(x) = 3x+2$

24] Dadas  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2 - 1$ , hallar:

a)  $f(g(1))$     b)  $g(f(1))$     c)  $g(f(2))$     d)  $f(g(2))$     e)  $f \circ g$     f)  $g \circ f$

25] Dados los pares de funciones del ejercicio 23, hallar,  $f \circ g$  y  $g \circ f$  haciendo restricciones a los conjuntos si fuese necesario

26] Dada  $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \circ g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ .

Hallar  $g$ , siendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2x-1$ .

27] Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo.

a) Escribir la función de medida del radio respecto del tiempo.

b) Sabiendo que la función de medida del volumen respecto del radio para la esfera

es  $V(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$ , hallar la función de medida del volumen respecto del tiempo.

Calcular el volumen para  $t=3$

28] Dadas las siguientes funciones, indicar dominio e imagen, buscar su inversa (restringiendo si es necesario para la biyectividad) y componer para obtener la identidad. Indicar en todos los casos, dominios e imágenes.

a)  $f(x) = x^2+2$     b)  $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$     c)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

29] (Optativo) Indicar si es V o F, expresando un argumento que justifique la respuesta.

a) La composición de funciones inyectivas, es inyectiva

b) La composición de funciones sobreyectivas, es sobreyectiva

## RESPUESTAS

### Unidad 1

- 1) Ej 6: i) Intersecciones con los ejes: Con el eje x : ( 0,0) y ( 3,0); con el eje y : ( 0,0 )  
Ceros:  $x = 0$  ;  $x = 3$   
ii) Intersecciones con los ejes: Con el eje x : ( -2,0) y ( 2,0); con el eje y : ( 0,-2 )  
Ceros:  $x = -2$  ;  $x = 2$

Ej 7: Intersecciones con los ejes: Con el eje x : ( -1/2,0); con el eje y : ( 0,-1 )  
Ceros:  $x = -1/2$

2) Ceros: a)  $x = 0$ ;  $x = 1$ ; b)  $x = 0$ ,  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; c)  $x = 1$

5) b) i) Intervalos de crecimiento: ( 0 ; 1,5)      ii) Intervalos de crecimiento: ( 0 ; +∞ )  
Intervalos de decrecimiento: ( 1,5; 3)      Intervalos de decrecimiento: ( -∞ ; 0)

6) a) V ; b) F

7) i) par    ii) impar    iii) ni par ni impar    iv) par.

8) a) par; b) impar; c) ni par ni impar.

10) b) Dominio mayorante:  $A = \mathbb{R} - \{ 2 \}$ ;       $g ( x ) = f ( x - 2 )$

11) b) Las funciones son respectivamente: No inyectiva, no sobreyectiva  
Inyectiva, no sobreyectiva  
No es función

c) Los conjuntos A y B no son únicos, una posibilidad es:  $A = \mathbb{R}_0^+$      $B = [0; +\infty)$

12) Son funciones i) ii) iv) v) . i) y iv) son sobreyectivas pero no inyectivas; ii) es biyectiva; v) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

13) a) a.1) por ejemplo  $f ( 1 ) = 3$  ;  $f ( 2 ) = 3$ ;  $f ( 3 ) = 7$   
a.2) imposible.

b) No, porque no puede definirse una función inyectiva.

c) Ambos conjuntos deben tener la misma cantidad de elementos.

14) Biyectiva.  $f^{-1} : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ / f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

15) Biyectiva.  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

### Unidad 2

1) Son polinomios: a) d) e) g) h) i) k)

2) a)  $x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$       grado 4      e)  $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}$       grado 2

b)  $x - 1$       grado 1      f)  $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}$       grado 2

c) -3      grado 0      g)  $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}$       grado 2

d)  $-\frac{3}{4}x^5$  grado 5

3) a) La recta forma un ángulo de  $45^\circ$  con el semieje positivo de las x.

b) Las tangentes son 2 y  $\frac{2}{3}$  respectivamente. Coinciden con el coeficiente m o sea con la pendiente de la recta.

c)  $-3$  y  $-\frac{1}{2}$  respectivamente.

4) a)  $y = -2x$     b)  $y = \frac{1}{2}x$     c)  $y = \frac{2}{3}x$

6) a) sí; b)  $m > 0$ ;  $m < 0$ .

8) c) Simetría respecto de la recta  $y=x$ .

10) a)  $y = -3x + 7$     b)  $y = 3x - 4$     c)  $y = 3x - 9$

11) b) Ceros :  $x = 2$     c) biyectiva. Estrictamente creciente    d)  $f^{-1}(x) = 2x + 2$

12)  $m \neq 0$  biyectiva;     $m = 0$  constante, ni inyectiva, ni sobreyectiva.

13) a)  $x = -\frac{2}{5}$     b)  $A = [-\frac{2}{5}; +\infty)$     c)  $B = [-\frac{12}{5}; \frac{13}{5})$

d)  $D = (\frac{7}{5}; +\infty)$     e)  $E = (\frac{2}{5}; \frac{19}{10}]$

14)  $y = -\frac{1}{7}x + \frac{33}{7}$

15) a)  $y = x + 7$     b)  $y = -\sqrt{3}x + 7$

16) a)  $y = x - 10$     b)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{28}{3}$     c)  $y = -11x + 2$     d)  $y = -9x$

17)  $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$  o  $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

18) No, las rectas paralelas al eje Y no representan funciones.

19) a) No están alineados.    b)  $(6; -2)$

20) El punto de intersección es respectivamente: a)  $\{(-1; 2)\}$     b)  $\emptyset$     c)  $y = \frac{3}{4}x + \frac{10}{3}$ ;

$x, y \in \mathbb{R}$

21)  $y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{2}$

22)  $y = -3x - 1$

23)  $y = -3x - 1$



### Unidad 3

- 1) 1.1)  $x=3$ ; eje de simetría  $x=3$  intersección con el eje  $y$  (0;9)  
 1.2)  $x \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ ; eje de simetría  $x=0$  intersección con el eje  $y$  (0;-2)  
 1.3)  $x = -2 \pm \sqrt{3}$ ; eje de simetría  $x=-1$  intersección con el eje  $y$  (0;1)  
 1.4)  $x_1=4$   $x_2=0$ ; eje de simetría  $x=2$  intersección con el eje  $y$  (0;0)  
 1.5)  $\emptyset$ ; eje de simetría  $x=1$  intersección con el eje  $y$  (0;-2)  
 1.6)  $x_1=3$   $x_2=1$ ; eje de simetría  $x=2$  intersección con el eje  $y$  (0;12)  
 1.7)  $\emptyset$ ; eje de simetría  $x=-2$  intersección con el eje  $y$  (0;5)  
 1.8)  $x_1=1$   $x_2=0$  de simetría  $x=0.5$  intersección con el eje  $y$  (0;0)

3) a) b) c) d) e)

	Ecuación canónica	vértice	Eje de simetría	Imagen	$\{x/f(x) \geq 0\}$
1	$y = (x - 3)^2$	(3,0)	$x = 3$	$[0, +\infty)$	$\mathbb{R}$
2	$y = 3x^2 - 2$	(0,-2)	$x = 0$	$[-2, +\infty)$	$(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$
3	$y = (x + 2)^2 - 3$	(-2,-3)	$x = -2$	$[-3, +\infty)$	$(-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty)$
4	$y = 3(x - 2)^2 - 12$	(2, -12)	$x = 2$	$[-12, +\infty)$	$(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$
5	$y = -(x - 1)^2 - 1$	(1,-1)	$x = 1$	$(-\infty, -1]$	$\emptyset$
6	$y = 4(x - 2)^2 - 4$	(2,4)	$x = 2$	$[4, +\infty)$	$(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
7	$y = (x + 2)^2 + 1$	(-2,1)	$x = -2$	$[1, +\infty)$	$\mathbb{R}$
8	$y = -(x - 1/2)^2 + 1/2$	(1/2;1/2)	$x = 1/2$	$(-\infty, 1/2]$	(1/2, 2)

	Paridad	crece	decrece	clasificación
1	-----	$(3, +\infty)$	$(-\infty, 3)$	No iny, no sobre
2	Par	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	No iny, no sobre
3	----	$(-2, +\infty)$	$(-\infty, -2)$	No iny, no sobre
4	----	$(2, +\infty)$	$(-\infty, 2)$	No iny, no sobre
5	----	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$	No iny, no sobre
6	----	$(2, +\infty)$	$(-\infty, 2)$	No iny, no sobre
7	----	$(-2, +\infty)$	$(-\infty, -2)$	No iny, no sobre
8	-----	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$	No iny, no sobre

f) La restricción no es única, una posible para la primer función es:

$$f: (3, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow (3, +\infty) \quad f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x}$$

4) a) p1:  $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$     p2:  $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$

b) p1:  $y = (x+1)^2 + 4$     p2:  $y = -x^2 - 1$

5) a) p2:  $y = \frac{5}{4}(x-2)^2$      $a_1 = \frac{5}{2}$

b)  $y = -2x^2 + 4x + 6$      $V = (1, 8)$     Ceros:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 3$      $\text{Im } f = (-\infty, 8]$   
 Positiva y decreciente:  $(1, 3)$     Negativa y creciente:  $(-\infty, -1)$

6)  $x = 2, y = 2$

7)  $x = 18, y = 18$

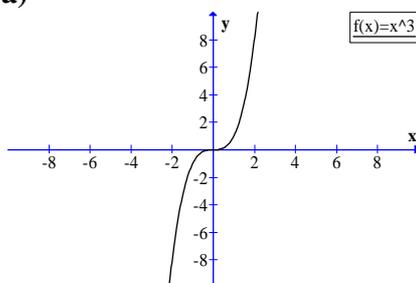
8)  $x = 150$

9) a)  $t = 3$  y  $t = 18$     b) sí, cuando  $t=25$

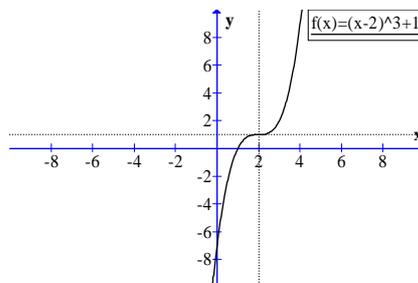
- 10)  $x \approx 1,68$ ;  $y \approx 1,68$
- 11) a)  $e = f(t) = 6 - 3t + t^2$        $v = g(t) = -3 + 2t$        $a = h(t) = 2$   
 c) En  $t = 1,5$  velocidad cero    En  $[0; 1,5)$  retardado y en  $(1,5; 5]$  acelerado  
 d) 2  
 e)  $e = t + 2$  tangente a la parábola.  
 La pendiente de la recta tangente en  $t_0$  es la velocidad en  $t_0$ .  
 f) pendiente cero  $\Rightarrow$  velocidad cero.
- 12) b)  $t = 5$
- 13) a) asciende  $(0, 600/49)$     desciende  $(600/49; 1200/49)$   
 b) altura máxima : 734,7 m cuando  $t = 600/49 = 12,24$  seg  
 c)  $1200/40 = 24,49$  seg  
 d)  $t_1 = 0,424$  seg       $t_2 = 24,065$  seg
- 14) V, V, F, V, V
- 15)  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$        $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- 16)  $x^2 + 2x - 35 = 0$
- 17) a)  $2(x-2)(x-8)$     b)  $1/2(x+6)(x+1/2)$     c)  $-5x(x+3/5)$     d)  $-1/2(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$
- 18) a)  $m = 1/32$     b)  $m = 1$     c)  $m = 12$
- 19) a)  $a = 3$  o  $a = -1$     b)  $a = 3 + 2\sqrt{2}$  o  $a = 3 - 2\sqrt{2}$
- 20) a)  $k = 3$     b)  $k = 1$
- 21) a)  $k = 1/4$     b)  $k = 1$
- 22)  $k = 12$
- 23) a)  $y = 2(x-2)(x+1/2)$     b)  $y = (x-5)(x+9)$     c)  $y = 4(x-\sqrt{3}/2)(x+\sqrt{3}/2)$   
 d)  $y = 3(x+1)(x-1/3)$     e)  $y = -2(x-10)(x+9)$
- 25) a)  $x_1 = \sqrt{3}$ ;  $x_2 = -\sqrt{3}$ ;  $x_3 = 1/2$ ;  $x_4 = -1/2$       b)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = 1/2$ ;  $x_4 = -1/2$   
 c)  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -3$ ;  $x_3 = 1/2$ ;  $x_4 = -1/2$       d)  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 1/2$ ;  $x_4 = -1/2$   
 e)  $x_1 = \sqrt{2}$ ;  $x_2 = -\sqrt{2}$ ;  $x_3 = 2$ ;  $x_4 = -2$
- 26) a)  $A = (2,0)$      $B = (1,2)$   
 b)  $A = (6, -42)$      $B = (-1,0)$
- 27)  $y = -3x + 5$
- 28)  $m = 0$  o  $m = -4$
- 29) Todo valor real de  $m$
- 30) a)  $k = \pm\sqrt{3}$     b)  $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$
- 31) a)  $y = 5x - 12$       b)  $y = 4x - 9$
- 32)  $k = -2$

## Unidad 4

1. a)



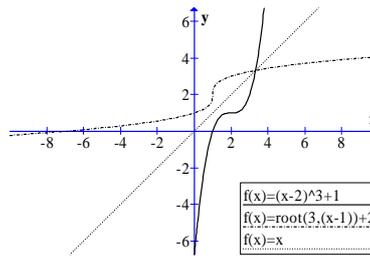
b)



- c)  $g$  es inyectiva (pues es estrictamente creciente)  
 $g$  es sobreyectiva  
 (porque la imagen coincide con el conjunto de llegada, ambos son  $\mathbb{R}$ )

$g$  es biyectiva (por ser inyectiva y sobreyectiva simultáneamente)

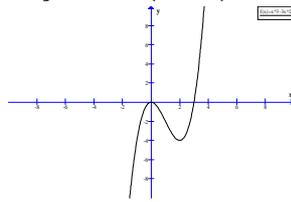
$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$



2. a) F b) F c) V d) V

3. En  $x=-2$  la función tiene un cero de orden impar y en  $x=3$  de orden par.

$$4. C^0 = \{0(\text{doble}); 3(\text{simple})\}; C^+ = (3; +\infty); C^- = (-\infty; 3) - \{0\}$$



5. Sea  $f$  definida en  $\mathbb{R}$ .

	$C^0$	$C^+$	$C^-$	gráfico	par	impar	imagen
a	$\{-\sqrt[3]{2}\}$	$(-\sqrt[3]{2}; +\infty)$	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$		No	No	$\mathbb{R}$
b	$\{-2\}$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2)$		No	No	$\mathbb{R}$
c	$\{1 - \sqrt[3]{2}\}$	$(1 - \sqrt[3]{2}; +\infty)$	$(-\infty; 1 - \sqrt[3]{2})$		No	No	$\mathbb{R}$
d	$\{0\}$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$		No	Si	$\mathbb{R}$
e	$\{0\}$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$		No	Si	$\mathbb{R}$
f	$\{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\emptyset$		Si	No	$[0; +\infty)$
g	$\{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$	$(-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3})$	$(-\infty; -\sqrt[4]{3}) \cup (\sqrt[4]{3}; +\infty)$		Si	No	$(-\infty; 3]$

7. a)  $a=-1$     $b=-1$     $c=0$

b)  $a=15/4$   $b=2$     $c=3/4$

8.a)  $-2x^4 + 4x^2 + x - 2$

b)  $2x^4 - 3$

c)  $-2\sqrt{3}$

d)  $p(0)=1/2$     $p(\sqrt{2})=1/2$     $|s(0)|=3$     $t(-1)=3/4$

$q(-1)+p(-2)=\sqrt{2}-\sqrt{3}+1/2$

9.  $C^0 = \{1; -1\}$

10.  $x^2 - 1$

11.a)  $C(x) = -2x^2 + 1; R(x) = -6x^2 - x + 3$

b)  $C(x) = 2x^2 + 2/3x - 1/9; R(x) = 1/9x + 1$

c)  $C(x) = x^2 - cx + c^2; R(x) = 0$

d)  $C(x) = x^2 + (1-2c)x + 1 - 2c + 4c^2; R(x) = -9c^3 + 4c^2 - 2c$

e)  $C(x) = x^2 - c^4; R(x) = 0$

f)  $C(x) = -1/3x^3 - 1/3x^2 - 1/3x + 1/3; R(x) = -1/3x$

g)  $C(x) = x^2 - x; R(x) = 1$

h)  $C(x) = -cx^2 - x; R(x) = 2c^2 - 1$

12.a)  $C(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 20; R = 41$

b)  $C(x) = -1/2x^2 + x - 1; R = 1$

c)  $C(x) = x^2 - 2x + 4; R = m^3 - 8$

d)  $C(x) = 16x^3 - 16x^2 + 16x - 16; R = 17$

e)  $C(x) = x^4 + 1/2x^3 + 1/4x^2 - 7/8x - 23/16; R = 41/32$

f)  $C(x) = mx^3 + m^2x^2 + m^3x + m^4; R = 0$

g)  $C(x) = x - 9; R = 16$

h)  $C(x) = x^3 + m^2x^2 + m^4x + m^6; R = m^8 - m^2$

13. Aplicar el teorema del resto (ver las respuestas del ej 12)

14. a)  $m=2$                       b)  $m=-3/2$

15. a) SI   b) SI   c) SI   d) SI   e) SI   d) NO

Conclusiones:

- La suma (resta) de potencias de igual grado, con grado par o impar, es divisible por la suma (resta) de sus bases
- La resta de potencias de igual grado par es divisible por la resta de sus bases
- La suma de potencias de igual grado par no es divisible por la resta de sus bases, ni tampoco por la suma (PROBARLO)

16.  $k=1$

17.  $m_1 = \sqrt{2}/2$     $m_2 = -\sqrt{2}/2$

Para armar  $a(x)$  reemplazar  $m$  por cada uno de los valores, hay dos posibilidades.

18.  $m=1$     $t=1$

19. a)  $a=0$  b)  $a=12$

20.  $2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 6$

21.  $k=-1$

22. a)  $a(x-2)(x+1)(x-1/2)$ , a real distinto de cero

b) Hay varias posibilidades

$a(x+1)^3(x-2); a \in R; a \neq 0$

$a(x+1)(x-2)^3; a \in R; a \neq 0$

$a(x+1)^2(x-2)^2; a \in R; a \neq 0$

c) Hay infinitas posibilidades:  $a(x+1)(x-2)(x-h)(x-k)$  con h y k reales, a real no nulo

23.  $a(x+1)^3 x^5; a \in R; a \neq 0$

24. Aplicar Ruffini 3 veces consecutivas y obtener resto cero (las tres veces)

La otra raíz se halla igualando a cero el último cociente:  $x=-4$

25.  $-3/16(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$ , hay infinitas posibilidades porque el último factor, si bien tiene que ser un polinomio sin raíces reales, puede elegirse en forma diversa.

26. a)  $2(x^2+2)$

b)  $(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$

c)  $-4(x-\sqrt{6}/2)^2(x+\sqrt{6}/2)^2$

d)  $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x^2+8)$

e)  $(x+1)^2(x-1)^4$

f)  $8x(x-1/2)(x^2+1/2x+1/4)$

g)  $(x-3)(x+3)(x-1)^2$

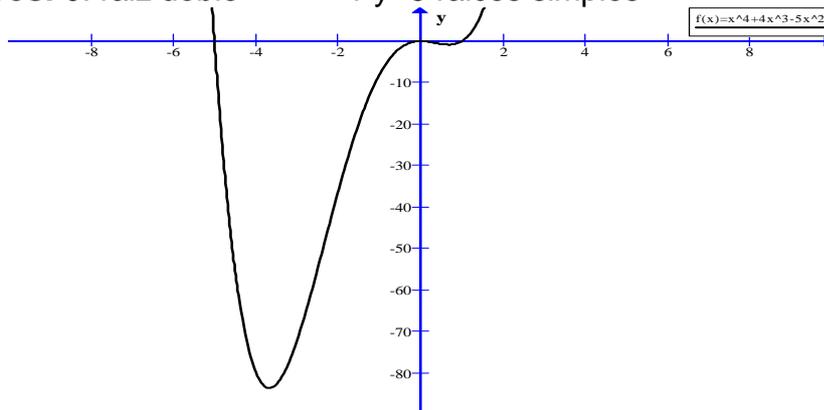
h)  $(x^4+3)(x-2)$

i)  $2/3(x+1/2)(x+1/4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

27. a) 2; -2; 1/3

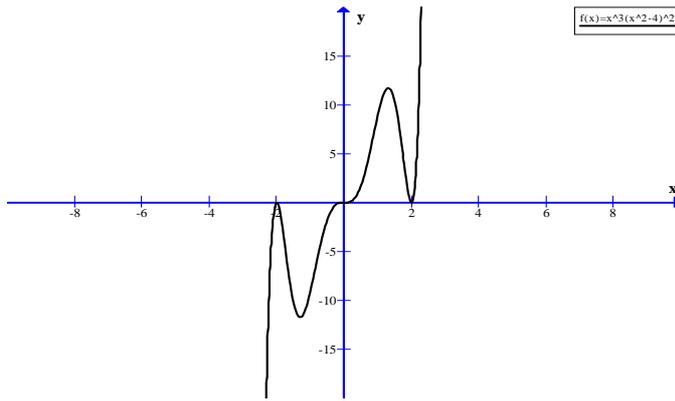
b) 2; -2; 1

28. a) Ceros: 0: raíz doble      1 y -5 raíces simples

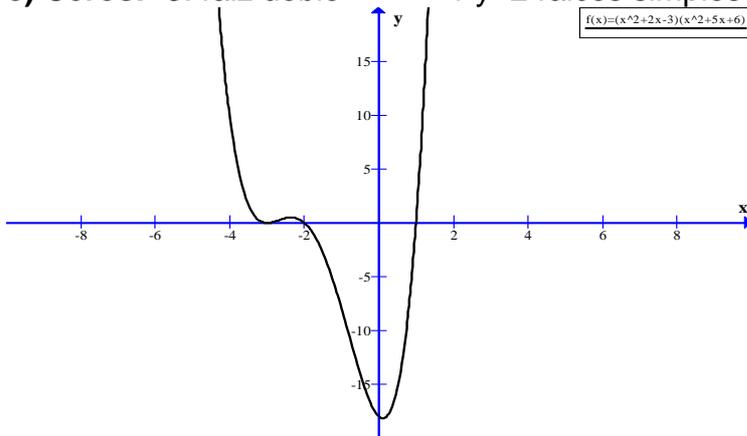


La gráfica “rebota” en 0 y “atraviesa” el eje x en -5 y 1

b) Ceros: 0: raíz triple      2 y -2 raíces dobles

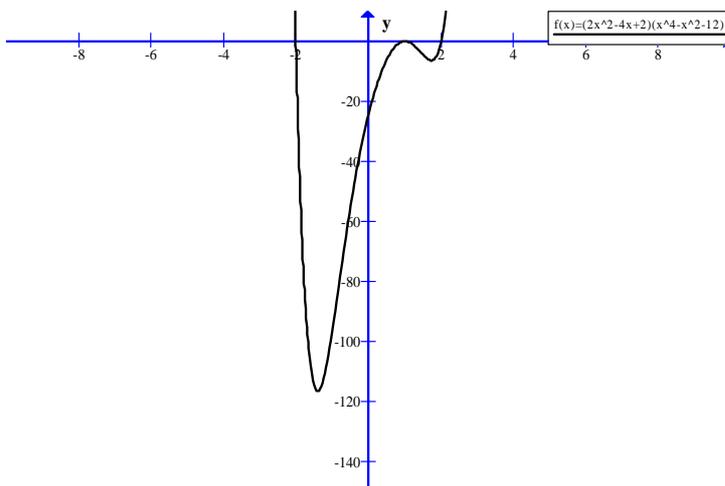


La gráfica “rebota” en -2 y 2 y “atraviesa” el eje x en 0  
**c) Ceros:** -3: raíz doble      1 y -2 raíces simples



La gráfica “rebota” en -3 y “atraviesa” el eje x en -2 y 1

**d) Ceros:** 1: raíz doble      2 y -2 raíces simples      y hay dos raíces no reales.



La gráfica “rebota” en 1 y “atraviesa” el eje x en -2 y 2

## Unidad 5

1. a)  $\mathbb{R} - \{1\}$ , no tiene ceros
- b)  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ , no tiene ceros
- c)  $\mathbb{R} - \{-2, 1/3, 2\}$ , no tiene ceros
- d)

2.

	Dominio	Imagen	Ceros	F. Canónica	Asíntotas
a)	$\mathbb{R} - \{-3/2\}$	$\mathbb{R} - \{2\}$	1/4	$y = \frac{-\frac{7}{2}}{x + \frac{3}{2}} + 2$	AV: $x = -3/2$ AH: $y = 2$
b)	$\mathbb{R} - \{2\}$	$\{1/5\}$	No tiene		
c)	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$	$\mathbb{R} - \{0, 1/4\}$	No tiene	$y = \frac{1}{x+2} \forall x \neq 2, x \neq -2$	AV: $x = -2$ AH: $y = 0$
d)	$\mathbb{R} - \{10\}$	$\mathbb{R} - \{1/2\}$	-8	$y = \frac{-1}{x+10} + \frac{1}{2}$	AV: $x = -10$ AH: $y = 1/2$
e)	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{2\}$	-13/2	$y = \frac{13}{x} + 2$	AV: $x = 0$ AH: $y = 2$
f)	$\mathbb{R} - \{1\}$	$\mathbb{R} - \{2\}$	-1		
g)	$\mathbb{R} - \{1\}$	$\mathbb{R}$	No tiene		

3.

	Ceros	F. Canónica	Asíntotas	Int de Posit.	Crecente
a)	1/4	$y = \frac{-\frac{7}{2}}{x + \frac{3}{2}} + 2$	AV: $x = -3/2$ AH: $y = 2$	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	$\mathbb{R} - \{-3/2\}$
b)	-3/2	$y = -2 - \frac{5}{x-1}$	AV: $x = 1$ AH: $y = -2$	$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$	$\mathbb{R} - \{1\}$

4a) (3;7/2)

b)  $(-\infty, 2) \cup (3; +\infty)$

c)  $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$

5. A:  $\mathbb{R} - \{1\}$  B:  $\mathbb{R} - \{2\}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$   $f^{-1}; \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} / f^{-1}(x) = \frac{2}{x-2} + 1$

6.  $D_f : \mathbb{R}$   
 $I_f : (-\infty, 1]$  No sobreyectiva, no inyectiva

8. Al transcurrir el tiempo tendiendo a infinito la concentración tiende a 0,10, aunque nunca alcanza ese valor.

9. 12 años

10. A:  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  B:  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1, -1\} / f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$

11 a) 0  $x \neq -1$  d)  $\frac{1}{5x+9}$   $x \neq 1; -3; 9/5; -9/5$

$$b) \frac{2}{x+2} \quad x \neq 2 \quad x \neq -2$$

$$e) -1/2 (7+x) \quad x \neq 7, -7; \frac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$$

$$c) \frac{x-1}{x} \quad x \neq 1$$

$$f) -3x+2+x^2 \quad x \neq -2; -1; 0; 1; 2$$

$$12. \text{Rta: } 0 \quad x \neq 0 \quad x \neq -1; 1$$

$$13. a) A=2/3 \quad B=7/3 \quad b) A=2 \text{ y } B=1$$

$$14. \quad a) \frac{0.5}{x-1} + \frac{0.5}{x+1} \quad b) 2 + \frac{5}{x-2} \quad c) x^2 - 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

$$d) x^3 - x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$$

15.

$$a) S = \{-3; 18\}$$

$$b) S = \{-2\}$$

$$c) S = \{2, 6\}$$

$$16. a) S = \{(0, -3) (5; 2)\} \quad b) S = \{(-1, 1) (-5; 3)\} \quad c) S = \{(-2, -1)\}$$

17.

a) Dominio máximo reales positivos con el cero, cero :  $x=0$ . Conjunto Imagen; reales negativos con el cero, no es biyectiva

$$f^{-1} : \mathfrak{R}_0^- \rightarrow \mathfrak{R}_0^+ / f^{-1}(x) = x^2$$

b) Dominio máximo reales mayores o iguales que 1, cero:  $x=1$ . Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva

$$f^{-1} : \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow [1, +\infty) / f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

c) Dominio máximo reales mayores o iguales que -1, cero:  $x=-1, 0$  Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva

$$f^{-1} : \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow [-1, +\infty) / f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

18.

Dominio maximo :  $[-1; 1]$ ; Imagen  $[0; 1]$ , No es biyectiva restricción para que lo sea Dom :  $[0; 1]$ , Im :  $[0; 1]$

$$f^{-1} : [0; 1] \rightarrow [0; 1] / f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$$

19. Dominio máximo:  $\mathfrak{R}$

Imagen  $[1, +\infty)$ , no tiene ceros. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom :  $\mathfrak{R}_0^+$  e Im :  $[1, +\infty)$

$$f^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}_0^+ / f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

La  $f$  es creciente y positiva en todo su dominio

20. Es biyectiva.  $f^{-1} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f^{-1}(x) = x^3 + 1$

21. Cero:  $x=2$ ,

Imagen  $[0, +\infty)$ . No es biyectiva restricción para que lo sea Dom :  $[2, +\infty)$  Imagen  $[0, +\infty)$ .

$$f^{-1} : \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow [2, +\infty) / f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

22.

a)  $S = \{-3\}$

b)  $S = \{9\}$

c)  $S = \{-3, 3\}$

d)  $S = \{4, -4\}$

e)  $S = \{3\}$

23) a)  $Dom f = R; Im f = R_0^+ \quad Dom g = R; Im g = R$

- $f + g(x) = x^2 + 2x - 1; Dom = R; Im = [-2; +\infty)$

- $f \cdot g(x) = 2x^3 - x^2; Dom = R; Im = R$

- $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{2x-1}; Dom = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}; Im = R$

b)  $Dom f = R; Im f = R_0^+ \quad Dom g = R_0^+; Im g = R_0^+$

- $f + g(x) = x^2 + \sqrt{x}; Dom = R_0^+; Im = R_0^+$

- $f \cdot g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}; Dom = R_0^+; Im = R_0^+$

- $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}; Dom = R^+; Im = R^+$

c)  $Dom f = R - \{2\}; Im f = R - \{0\} \quad Dom g = R; Im g = R$

- $f + g(x) = \frac{3x^2 - 4x - 3}{x-2}; Dom = R - \{2\}; Im = R$

- $f \cdot g(x) = \frac{8}{x-2} + 3; Dom = R - \{2\}; Im = R - \{3\}$

- $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{(x-2)(3x+2)}; Dom = R - \left\{2; -\frac{2}{3}\right\}; Im = R - \{0\}$

24) a) 0   b) 0   c) -1   d) no existe   e)  $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$    f)  $g \circ f(x) = x - 1$

25) a)  $f \circ g(x) = (2x - 1)^2; Dom = R; Im = R_0^+$

Para  $g \circ f$  debemos restringir  $Dom g = R_0^+$

$$g \circ f(x) = 2x^2 - 1; Dom = R; Im = [-1; +\infty)$$

b) Para  $f \circ g$  debemos restringir  $Dom f = R_0^+$

$$f \circ g(x) = x; Dom = R_0^+; Im = R_0^+$$

$$g \circ f(x) = |x|; Dom = R; Im = R_0^+$$

c)  $f \circ g(x) = \frac{1}{3x}; Dom = R - \{0\}; Im = R - \{0\}$

$$g \circ f(x) = \frac{3}{x-2} + 2; Dom = R - \{2\}; Im = R - \{2\}$$

26)  $g: R \rightarrow R / g(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

27) a)  $f: R_0^+ \rightarrow R_0^+ / f(t) = 1 + \frac{1}{10}t$

$$b) V : R_0^+ \rightarrow R_0^+ / V(t) = \frac{4}{3} \pi \left(1 + \frac{1}{10}t\right)^3 \quad V(3) = \frac{13^3}{750} \pi$$

$$28) a) \text{Dom} f = R; \text{Im} f = [2; +\infty); f^{-1} : [2; +\infty) \rightarrow [0; +\infty) / f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$$

$$f \circ f^{-1} : [2; +\infty) \rightarrow [2; +\infty) \quad f^{-1} \circ f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$$

$$b) \text{Dom} f = R; \text{Im} f = R; f^{-1} : R \rightarrow R / f^{-1}(x) = x^3 + 3$$

$$f \circ f^{-1} : R \rightarrow R \quad f^{-1} \circ f : R \rightarrow R$$

$$c) \text{Dom} f = R - \{3\}; \text{Im} f = R - \{2\}; f^{-1} : R - \{2\} \rightarrow R - \{3\} / f^{-1}(x) = \frac{5}{x-2} + 3$$

$$f \circ f^{-1} : R - \{2\} \rightarrow R - \{2\} \quad f^{-1} \circ f : R - \{3\} \rightarrow R - \{3\}$$

29)a) VERDADERO

Para demostrar la inyectividad de  $g \circ f$  partiendo de  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

debemos inferir que  $x_1 = x_2$

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$  por ser  $g$  inyectiva.

Como  $f$  es inyectiva se puede inferir la igualdad de las abscisas:

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Por lo cual la composición de funciones inyectivas, es inyectiva.

b) FALSO

Para que la composición  $g \circ f$  sea posible, se debe verificar que

$\text{Im} f \subset \text{Dom} g$ .

Si la inclusión es estricta existe al menos un elemento del dominio de  $g$ , que no pertenece a la imagen de  $f$ :  $x_0 \in \text{Dom} g / x_0 \notin \text{Im} f$ , dicho de otro modo,

$x_0$  nunca será alcanzado por  $f$ . Entonces  $y_0 = g(x_0) \notin \text{Im} f \circ g$ .

Por lo tanto, aunque las dos funciones sean sobreyectivas, la composición no siempre lo es.

## TRABAJO PRÁCTICO 0 para 4to año

1. Resolver en  $\mathbb{R}$  las siguientes ecuaciones:

a)  $(-x + 2)^3 = 1$  b)  $x^3 = x$  c)

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

d)  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$  e)  $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$

f)  $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{18})x = -6$

g)  $(x-1)^4 - 3(x-1)^2 = -2$  h)  $(m^2 - 1)(m^2 + 3) = 2m^2$  i)

$4a^2(1 - a - a^2) = -a^4 + a^3$

j)  $3(x^4 - 16)(x^3 - 2x^2 + x) = 0$  k)  $\frac{7}{5}\left(1 - \frac{3}{10}y\right)\left(\frac{7}{3} + \frac{14}{9}y\right) = 0$

l)  $(x^3 - 8)(x^3 + 8)(6x^2 + 7x + 8)(1 - x) = 0$  m)  $9p^9 - 7p^7 = 6p^9 + 2p^7$

2. Encontrar el conjunto solución en  $\mathbb{R}$  de estas ecuaciones:

a)  $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$  b)  $\frac{x+11}{x} = 7 - \frac{9+4x}{x^2}$  c)  $4x - \frac{2}{x} = 2x + \frac{35}{3}$

d)  $x + \frac{1}{x-3} = 5$  e)  $(x - 5\sqrt{x})^2 + 10(x - 5\sqrt{x}) + 24 = 0$  f)  $\frac{t+1}{t^2-1} = \frac{1}{t-1}$

3. Resolver en  $\mathbb{R}$  las siguientes inecuaciones:

a)  $\left(x + \frac{1}{5}\right)(-3x + 9) \geq 0$  b)  $(2x+1) \cdot (3x-2) < 0$  c)  $3x^2 + 15x \geq 0$  d)

$(x + 10)^2 \geq -4$

e)  $x^4 \leq -5$  f)  $|x - 2| \cdot (x^2 - 5) \geq 0$  g)  $x^2 - x < 0$

h)  $x^2 - \frac{1}{2} \leq 4 - x^2$

i)  $(2x-3)^2 > 4(x+1)(x+2)$  j)  $x^2 + 2x + 1 \leq 4$  k)  $x^3 > x$

4. Encontrar el conjunto solución en  $\mathbb{R}$  de estas inecuaciones:

a)  $\frac{25x^2 - 9}{3 + \sqrt{x^2 - 5}} < 0$  b)  $\frac{2}{x} < -\frac{3}{5}$  c)  $-\frac{2}{x} > \frac{3}{5}$  d)

$\frac{27 - x^3}{|x+3|} < 0$

e)  $\frac{|x-2|}{x^2-5} \leq 0$       f)  $\frac{x^2-5}{|x-2|-2} \leq 0$       g)  $\frac{x^2-5}{|x-2|+2} \leq 0$       h)  $\frac{2x-4}{x^2-9} \geq 0$

i)  $\frac{2}{x}-3 < -1$       j)  $\frac{1}{x} \geq \frac{6}{x}$       k)  $\frac{3}{x+2} < -2$       l)  $\frac{3x+2}{x+1} < 1$

5. Dada la recta  $r: y = -\frac{1}{2}x + 1$ , obtener la ecuación de la recta  $s$  que cumple con

la condición establecida en cada ítem:

- a)  $s \parallel r$  y contiene al origen de coordenadas;      b)  $s \perp r$  y tiene ordenada al origen -3;
- c)  $s \perp r$  e interseca al eje de abscisas en -3;      d)  $s \parallel r$  y contiene al punto (2/3; 9).

6. ¿Para qué valor de  $m$ , las rectas  $r: (5m - 1)x - y + 2 = 0$  y  $s: 3x - 6y + 9 = 0$  son perpendiculares?

7. Un auto circula por la ruta 2 y la distancia (en km) que lo separa de Buenos Aires en función del tiempo (en hs) está dada por una función lineal. Se sabe que a las dos horas de haber partido de la ciudad de origen se encontraba en el km 150 y que media hora más tarde se encontraba a 100 km de Bs. As.

- a) Encontrar la fórmula de la función lineal de la que habla el enunciado.
- b) ¿Qué parámetro de la fórmula hallada en el ítem a) indica que el auto se acerca a Buenos Aires? ¿Por qué?
- c) ¿A qué distancia de Bs. As. se encontraba el automóvil en el momento de partir? ¿A qué velocidad circula?
- d) ¿En qué momento pasó por el km 225 de la ruta?
- e) Graficar e indicar un dominio que dé cuenta de la situación.

8. Escribir la fórmula de una función cuadrática definida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  que verifique lo pedido en cada caso:

- a) su vértice es el punto (-6; 0) y tiene concavidad positiva.
- b) su vértice es el punto (-1; -3) y contiene al punto (1; -2).
- c) sus raíces son 0 y -2 y tiene concavidad negativa.
- d) sus raíces son 3 y -1 y contiene al punto (0; 1).
- e) tiene un máximo en  $x = -3$ ,  $f(-3) = 6$  y  $f(0) = 0$ .

f) es creciente en  $(-\infty; -3)$ ,  $f(-3) = 6$  y  $f(0) = 0$ .

9. Se están haciendo pruebas desde un submarino lanzando misiles desde cierta profundidad y registrando su altura, medida en metros respecto del nivel del mar, en función del tiempo, medido en segundos.

Un misil fue lanzado desde una profundidad de 160 m, atravesó la superficie a los 2 seg. de haber sido lanzado y explotó contra el blanco que flotaba en el mar 6 seg. después.

- a) ¿Cuál es la variable independiente del problema? ¿Y la dependiente?
- b) Definir la función que permite calcular su altura en función del tiempo sabiendo que se trata de una función cuadrática. (**Nota:** Dar un dominio que sea coherente con la situación planteada.)
- c) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó el proyectil? ¿En qué momento sucedió?
- d) ¿A qué altura se encontraba 1 seg. después de haber sido lanzado? ¿Y a los 3 seg.?
- e) ¿En qué intervalo de tiempo estuvo por encima del nivel del mar? ¿Y por debajo?

10. Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) 
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 10 = 3x \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y = -3x(x + 2) \\ y = 4(x - 1)(x - 3) \end{cases}$$

11. Factorizar cada uno de estos polinomios:

a)  $P(x) = x^3 - x$

b)  $S(x) = \frac{1}{27}x^3 - 8$

c)  $Q(x) = x^2 - 5$

d)  $T(x) = (2x + 1)^2 - 9$

e)  $R(x) = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2$  f)

$U(x) = 25x^4 - 16$

g)  $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$

h)  $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

i)  $S(t) =$

$$-\frac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 + 2t$$

j)  $T(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

k)  $M(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$  l)

$N(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

12. Indicar para que valores están definidas las siguientes expresiones y simplificarlas.

$$a) \frac{x^4 - 16}{x^4 - 2x^2 - 8}$$

$$b) \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$

c)

$$\frac{2t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{t^2 + t}$$

$$d) \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2}$$

$$e) \frac{-x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$f) \frac{3x^2 - 3x}{2x^3 - 2x^2}$$

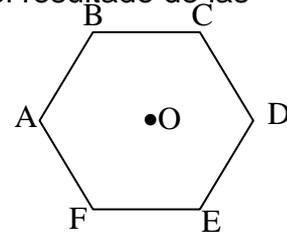
13. Si ABCDEF es un hexágono regular de centro O, obtener el resultado de las siguientes operaciones:

$$a) \overline{CB} + \overline{CD}$$

$$b) \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

$$c) 2 \cdot \overline{AO} + \overline{OB}$$

$$d) \overline{AB} - \overline{FA}$$



14. Dada la recta de ecuación  $y = 2x - 3$ , expresar en forma canónica un vector de módulo 5 paralelo a ella.

15. Sean  $\vec{u} = \left( \frac{x - \sqrt{2}}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  y  $\vec{w} = \left( \frac{1}{x + \sqrt{2}}; \sqrt{y} - \sqrt{2} \right)$ , encontrar todos los valores de x e y para que  $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u}$ .

16. Indicar si los siguientes pares de vectores son o no perpendiculares.

$$a) \vec{a} = (1, 1) \text{ y } \vec{b} = (1, -1)$$

$$b) \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ y } \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

17. Encontrar el valor de  $\lambda$  para que el vector  $\vec{i} + 3\vec{j}$  sea perpendicular al vector  $6\vec{i} + \lambda\vec{j}$ .

18. Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  verifican que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$ , calcular  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

19. a) ¿Cuáles son las componentes del vector  $\vec{v}$ , si  $|\vec{v}| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$  y el ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las x es de  $60^\circ$ ? (Nota:  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{y } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

b) Escribir en forma canónica un vector  $\vec{w}$  tal que  $|\vec{w}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  y  $\vec{w}$  sea paralelo a la

$$\text{recta de ecuación } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}.$$

c) Verificar analíticamente que  $\vec{v} \perp \vec{w}$ .

### Respuestas

1. a)  $\{1\}$  b)  $\{0; 1; -1\}$  c)  $\{1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$  d)  $\{3; 2; -2; -1\}$

e)  $\{1/2; -1/2\}$  f)  $\{-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$  g)  $\{2; 0; \sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1\}$

h)  $\{\sqrt[4]{3}; -\sqrt[4]{3}\}$  i)  $\left\{0; \frac{5+\sqrt{73}}{-6}; \frac{5-\sqrt{73}}{-6}\right\}$  j)  $\{2; -2; 0; 1\}$  k)  $\{10/3; -3/2\}$

l)  $\{2; -2; 1\}$  m)  $\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

2. a)  $\{-10; 10\}$  b)  $\{3; -1/2\}$  c)  $\{6; -1/6\}$  d)  $\{4\}$  e)  $\{16; 1; 9; 4\}$

f)  $\mathbf{R} - \{-1; 1\}$

3. a)  $[-1/5; 3]$  b)  $(-1/2; 2/3)$  c)  $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$  d)  $\mathbf{R}$  e)  $\emptyset$

f)  $(-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty) \cup \{2\}$  g)  $(0; 1)$  h)  $[-3/2; 3/2]$  i)  $(-\infty; 1/24)$  j)  $[-3;$

$1]$  k)  $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

4. a)  $\emptyset$  b)  $(-10/3; 0)$  c)  $(-10/3; 0)$  d)  $(3; +\infty)$  e)

$(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$  f)  $[-\sqrt{5}; 0) \cup [\sqrt{5}; 4)$  g)  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$  h)  $(-3; 2] \cup (3; +\infty)$  i)  $(-$

$\infty; 0) \cup (1; +\infty)$  j)  $(-\infty; 0)$  k)  $(-7/2; -2)$  l)  $(-1; -1/2)$

5. a)  $y = -0,5x$  b)  $y = 2x - 3$  c)  $y = 2x + 6$  d)  $y = -0,5x + 28/3$

6.  $-1/5$

7. a)  $y = -100 \text{ km/h } x + 350 \text{ km}$  c)  $350 \text{ km}; 100 \text{ km/h}$  d) A las 1,25 h (1 h 15 min.) de haber partido.

8. a) Una respuesta posible es  $y = (x+6)^2$  b)  $y = 1/4 (x + 1)^2 - 3$  c) Una respuesta posible es  $y = -x(x + 2)$ .

d)  $y = -1/3 (x - 3)(x + 1)$  e) y f)  $y = -2/3 (x + 3)^2 + 6$

9. b)  $f(t) = -10(t - 2)(t - 8)$ ;  $\text{Dom}(f) = [0; 8]$  c) 90m a los 5seg. d) A 70m bajo el mar.

e)  $(2; 8)$  y  $[0; 2)$

10. a)  $\{(2; 4); (-1; 1)\}$  b)  $\{(2; 4)\}$  c)  $\emptyset$

11. a)  $x(x - 1)(x + 1)$  b)  $1/27 (x - 6)(x^2 + 6x + 36)$  c)  $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

d)  $4(x - 1)(x + 2)$  e)  $4x^2(x - 3/2)^2$  f)  $25(x - 2\sqrt{5}/5)(x + 2\sqrt{5}/5)(x^2 + 4/5)$

g)  $8(x + 1/2)(x + 1)(x - 3/4)$ , h)  $4(x + 1)(x - 1/2)(x - 2)$  i)  $-1/2 t(t + 2)(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$  j)  $(x - 1)(x + 3)^2$  k)  $(x - 2)^2(x + 3)$  l)  $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 9)$

12. a)  $\{x \in \mathbf{R} / x \neq 2 \wedge x \neq -2\}; \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2}$  b)  $\{x \in \mathbf{R} / x \neq 1 \wedge x \neq -1\}; (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

c)  $\{t \in \mathbf{R} / t \neq 0 \wedge t \neq -1\}; \frac{2(t^2 + 1)}{t}$  d)  $\{x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq 2\}; \frac{(x-1)(x+1)}{x}$

e)  $\{x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -3\}; \frac{-(x+1)(x-2)}{x(x+3)}$  f)  $\{x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq 1\}; \frac{3}{2x}$

13. a)  $\overline{CO}$  b)  $\overline{AE}$  c)  $\overline{AC}$  d)  $\overline{AO}$  14. Una solución posible es  $\sqrt{5}\check{i} + 2\sqrt{5}\check{j}$ .

15.  $(x; y) = (\sqrt{3}; 8)$  o  $(x; y) = (-\sqrt{3}; 8)$  17.  $\lambda = -2$  18. 2

19 a)  $\vec{v} = (\frac{3}{4}\sqrt{3}; \frac{9}{4})$  b) Una solución posible es  $\vec{w} = \check{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\check{j}$ .

## Problemas interesantes (Segundo nivel Olimpiadas)

1. ¿Cuántas formas hay de embaldosar un pasillo de  $2 \times 7$  con baldosas de  $2 \times 1$ ?
  2. Dos bicicletas se encuentran en una ruta recta a 40 kilómetros de distancia. A partir de un momento ambas empiezan a andar en sentidos contrarios, acercándose. Cada bicicleta tiene a una velocidad constante de 20km/h. En el mismo instante de partida, una mosca sale de una de las bicicletas rumbo hacia la otra con una velocidad de 40km/h. Al encontrarse la mosca con la otra bicicleta, instantáneamente se da vuelta y comienza a volar para el otro lado hasta encontrarse con la primera bicicleta, momento en el cual se da vuelta nuevamente, y así sigue hasta que las bicicletas se juntan. ¿Qué distancia recorre la mosca?
  3. Sean  $ABC$  y  $ABD$  dos triángulos unidos por su lado  $AB$  ( $C$  y  $D$  están en semiplanos distintos respecto de la recta  $AB$ ). El triángulo  $ABC$  tiene  $\angle BAC = 90^\circ$  y  $AB = 2AC$ . El triángulo  $ABD$  tiene  $\angle ADB = 90^\circ$  y  $AD = BD$ . El segmento  $CD$  corta al segmento  $AB$  en  $O$ . Calcular  $BO$  si se sabe que  $AC = 4$ .
  4. Con una pesa de 2 y una de 5, en una balanza de platillos podemos pesar los valores 2, 3, 5 y 7. Si queremos poder pesar todos los valores enteros entre 1 y 4, ¿cuál es la mínima cantidad de pesas necesarias? ¿y si necesitamos pesar todos los números del 1 al 13? ¿Por qué con esa misma cantidad de pesas no se pueden formar todos los números del 1 al 14?
1. Probar que en el mundo hay dos personas que conocen a la misma cantidad de gente. (Suponemos que si  $A$  conoce a  $B$  entonces  $B$  conoce a  $A$ ).
  2. Se tiene un hexágono regular. Cada segmento con extremos en dos vértices del hexágono se pinta de rojo o de azul. Probar que hay un triángulo que tiene sus tres lados del mismo color.
  3. Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $BC = 10$ . Sean  $M, N, P$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CA$  respectivamente. Sobre la prolongación de  $NP$  se considera  $E$  tal que  $EP = PN$ . Sobre la prolongación de  $CM$  se considera  $D$  tal que  $DM = CM$ . Hallar la longitud del segmento  $DE$ .
  4. De los números naturales  $A$  y  $B$  se sabe que  $B = (A^2 - 1) / 8$  y que el mínimo común múltiplo entre  $A$  y  $B$  es igual a 3720. Hallar  $A$  y  $B$ .
  5. La suma de dos números es 30 y su producto es 10, ¿cuánto vale la suma de los inversos multiplicativos de los dos números?

6. Los sucesión de Fibonacci se definen de la siguiente manera:

$$F_0=1$$

$$F_1=1 \quad \text{y para } n \geq 2 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Probar que la cantidad de formas de embaldosar un pasillo de  $2 \times N$  con baldosas de  $2 \times 1$  es  $F_N$ .

7. Sea ABCD un trapecio con AB paralela a CD.  $\angle DAB=100^\circ$ ,  $\angle ABC=130^\circ$ ,  $AD=10$  y  $AB=15$ . ¿Cuánto mide CD?
8. Alberto se encuentra en el centro de una circunferencia de radio 20. Berenice está afuera. En cada paso, Alberto se desplaza un metro en línea recta. Él puede elegir, antes de cada paso, la recta por la que se va a mover pero Berenice decide en cuál de los dos sentidos ha de moverse. ¿Puede Alberto salir de la circunferencia?
9. Demostrar que hay infinitos enteros positivos impares  $n$  para los cuales el número  $2^n+n$  es un número compuesto (es decir, tiene algún divisor distinto de 1 y de sí mismo).
10. En el espacio hay  $n$  planos de modo que cada uno de ellos interfecta a exactamente otros 19. Determinar todos los posibles valores de  $n$ .
11. Sea ABC un triángulo y  $r$  la recta paralela a BC que pasa por A. Sea P el punto de intersección entre  $r$  y la bisectriz del ángulo ABC. Sea Q el punto de intersección entre  $r$  y la bisectriz del ángulo ACB. AB mide 7 y AC mide 8. Hallar la medida de PQ.