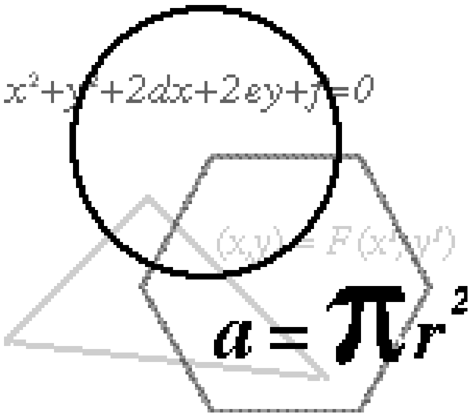
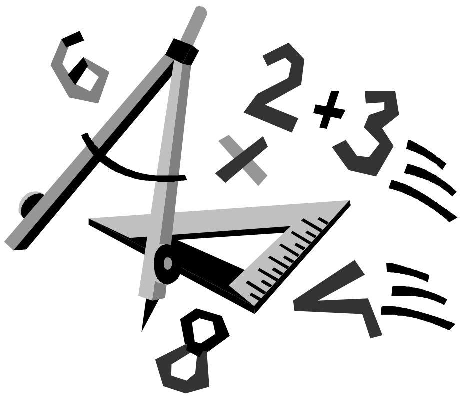
Universidad de Buenos Aires.

Colegio Nacional de Buenos Aires

Guía de Trabajos Prácticos
Matemática – 5º Año





$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Programa de la Asignatura

UNIDAD 0. Revisión de ecuaciones e inecuaciones en R. Revisión del concepto de función. Función inversa. Composición de funciones

UNIDAD 1- Limite funcional. Continuidad.
Limite de una función en un punto. Limite en el infinito. Cálculo de límites. Casos de indeterminación. El número e.. Límites trigonométricos. Límites laterales. Asíntotas. Continuidad de una función en un punto. Clasificación de discontinuidades.

UNIDAD 2- Derivadas.
Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica y física. Recta tangente y normal. Derivabilidad y continuidad. Función derivada. Cálculo de derivadas. Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremos locales. Concavidad. Puntos de inflexión. Estudio de funciones. Aplicación de las derivadas a la resolución de problemas de optimización.

UNIDAD 3- Integrales.
Concepto de primitiva. Linealidad del proceso de cálculo de primitivas.
Primitivas inmediatas. Cálculo de primitivas.
Concepto de integral definida. Regla de Barrow. Aplicación al cálculo de áreas

UNIDAD 4- Sucesiones numéricas.
Monotonía. Acotación. Límite de una sucesión. Aplicaciones. Sucesiones aritméticas y geométricas finitas e infinitas. Problemas de aplicación.

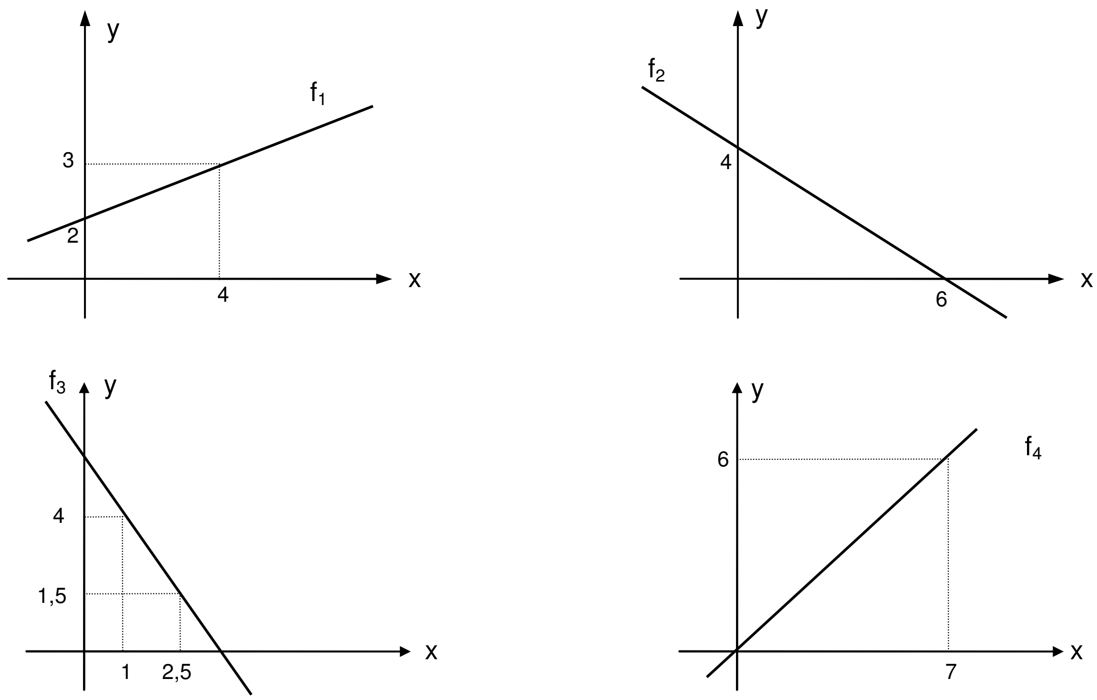
UNIDAD 5- Combinatoria y probabilidad.
Variaciones, permutaciones y combinaciones simples y con repetición. Binomio de Newton. Aplicación al cálculo de probabilidades. Definición axiomática de probabilidad. Propiedades. Probabilidad condicional. Sucesos independientes. Probabilidad total. Teorema de Bayes. Variable aleatoria discreta. La distribución Binomial y la Hipergeométrica.

<u>TRABAJO PRACTICO Nº0:</u> Temas generales de introducción.

Para poder abordar esta asignatura es imprescindible por parte del alumno, un fluido manejo de la operatoria en el campo real como así también, de las expresiones algebraicas y la construcción de gráficas de funciones elementales. Todos estos conceptos han sido desarrollados en los años anteriores y se dedicará tan sólo dos semanas a un repaso de ello con la correspondiente evaluación y calificación para el primer trimestre del año lectivo.

<u>Funciones</u>

1) Las siguientes, son cuatro gráficas correspondientes a funciones lineales de dominio real. Acorde con los datos indicados en cada caso. Hallar sus respectivas formas explícitas.



2) De una función lineal "f" se saben los siguientes datos: Pasa por los puntos $A = (8\,;-1)$ y $A = (10\,;-2)$. A partir de ello, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones resultan verdaderas:

a) Su ordenada al origen es b=3 y su conjunto de ceros es $C_0 = \{6\}$

b) El punto $P_0 = (5\,;\frac{1}{2})$ pertenece a gráfica de la misma

c) La recta "r" de ecuación $y = 2x + 4$ es perpendicular a ella

d) La expresión de la función inversa es $f^{-1}(x) = -2x + 6$

e) El conjunto de positividad de f es el intervalo $C^{+} = (6;+\infty)$

f) La función y su inversa se interceptan en el punto $M = (2;2)$

3) Hallar la expresión de la función cuadrática de $\Re \to \Re$ que cumple en cada caso con los requisitos pedidos:

a) $V = (1;3)$ y contiene al punto $P_0 = (0;2)$

b) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$ y contiene al punto $P_0 = (3;3)$.

c) La suma de sus raíces es -2, su producto es -24 y pasa por $P_0 = (0;12)$

d) Pasa por los puntos $A = (2;3)$; $B = (-2;-9)$; $C = (0;5)$

e) Intercepta al eje y en el punto $A = (0;5)$; la $x_v = 2$ y el coeficiente del término cuadrático y el lineal difieren en 1.

4) Dadas las funciones $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - k \\ g(x) = x + 2k \end{cases}$. Analizar, para qué valores de “k”, la recta resulta secante, tangente o exterior a la parábola.

5) Sea “f” la función lineal que tiene pendiente -2 y pasa por el punto $A = (4;2)$ y la parábola definida por $g(x) = (x-3).(x-5)$. Representar gráficamente ambas curvas y analizar en qué intervalo o unión de intervalos se verifica que $f(x) \geq g(x)$.

6) Factorizar el polinomio $P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$ y hallar sus intervalos de positividad y negatividad.

7) Hallar la expresión polinómica de grado 4 que cumple las siguientes condiciones: El conjunto de ceros es $C_0 = \left\{\frac{1}{2}; -1; 1; 3\right\}$ y además contiene al punto; $A = (-\frac{1}{2}; -\frac{21}{4})$.

8) En el polinomio $A(x) = x^4 - ax^3 + bx^2$ dos de sus raíces son $x = 3$ y $x = -1$. ¿Qué valores toman a y b? ¿Cuál es su expresión factorizada?

9) Al dividir $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por $Q(x) = x - 3$ se obtuvo 10 como resto. Hallar el valor de a.

10) Dadas las funciones definidas por las fórmulas:

a) $f_1 : A \to \Re \;/\; f_1(x) = 1 - \frac{1}{2}.\,2^x$

b) $f_2 : A \to \Re \;/\; f_2(x) = 4 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f_3 : A \to \Re \;/\; f_3(x) = 2\,\log_2(2x-4) - 1$

d) $f_4 : A \to \Re \;/\; f_4(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$

Se pide, para cada una de ellas, hallar: Dominio, ecuación de la recta asíntota, ceros, gráfico aproximado, crecimiento, decrecimiento, positividad, negatividad y calcular la función inversa. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

11) Calcular ceros, máximos y mínimos y graficar aproximadamente las funciones dadas a continuación en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

a) $f_1(x) = \text{sen}(2.x - \pi)$

b) $f_2(x) = -3\cos\left(\frac{3x}{2} - \pi\right)$

c) $f_3(x) = 1 - 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $f_4(x) = \sqrt{2} - 2\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

ALGEBRA DE FUNCIONES
IGUALDAD
Dos funciones f: Df → B y g: Dg → C son iguales cuando:
Df = Dg ; B = C y para todo x: f(x) = g(x)
Por ejemplo:

Las funciones $f: R-\{2\} \to R / f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y g: R→R/ g (x) = x+2

no son iguales ya que $D_f \neq$ Dg , sin embargo, notemos que para todo x≠2, f(x) = g(x). Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo g(2) = 4

Si definimos una función h: R→R/ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, resulta h = g

SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE
Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

$$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \text{, siendo } D(f+g) = Df \cap Dg$$

$$(f\,.\,g)_{(x)} = f(x).g(x) \quad \forall\, x \text{, siendo } D(f\,.\,g) = Df \cap Dg$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall\, x \text{, siendo } D\left(\tfrac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{x \in R / g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo:

Sean $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ D_f = R-{1} y g(x)= $\sqrt{x}$ D_g= R_0^+ entonces,

$(f+g)_{(x)} = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ $\qquad D_{f+g} = R_0^+ - \{1\}$

$(f.g)_{(x)} = \dfrac{1}{x-1}.\sqrt{x}$ $\qquad D_{f.g} = R_0^+ - \{1\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)_{(x)} = \dfrac{1}{(x-1).\sqrt{x}}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = R^+ - \{1\}$

COMPOSICION DE FUNCIONES
Analicemos la siguiente situación: el área de un círculo depende del radio. Si a su vez el radio aumenta al transcurrir el tiempo según la función r(t) = 3t, resulta:

$$A(r) = \pi.r^2 \text{ con } r(t)=3t$$

El área del círculo, depende entonces del tiempo a través de la función $A[r(t)] = \pi.(3t)^2$

Definición: Dadas dos funciones f:Df→Im f y g:Dg → Im g y tales que Im f ⊂ Dg, llamamos función compuesta g sobre f, a gof: Df → Im g / para todo x , gof(x) = g[f(x)]
Observaciones:

* La imagen de f debe estar incluida en el dominio de g para que todos los elementos de Df tengan imagen a través de la función compuesta gof.
* La imagen de g es, en general, el codominio de la compuesta y no su conjunto imagen, ya que puede haber elementos en el dominio de g que no sean imagen de ningún elemento de Df (si la inclusión es estricta)

* Si la inclusión pedida en la definición no se verifica, pueden hacerse las restricciones necesarias para la composición.

Ejemplo:

Sean f(x) = 2x+1 y g(x)= $\frac{1}{x-1}$ Df=R Im f=R

Dg=R-{1} Im g=R-{0}

Para realizar la composición "gof" debemos verificar que la imagen de la primer función a aplicar "f" esté incluida en el dominio de la segunda función a aplicar (g) .
Esto no se verifica, entonces realizamos la siguiente restricción:
Como necesitamos que "1" no pertenezca a Im f, para eliminarlo, restringimos Df.
Notemos que 2x+1=1 cuando x=0. Bastará entonces tomar como Df * =R-{0}, luego la
Imagen correspondiente será Im f=R-{1} que coincide (y por lo tanto está incluida) en Dg.
A pesar de que, hechas las restricciones las funciones no son las mismas, usaremos por comodidad las mismas letras para nombrarlas.

Ahora; gof:R-{0} → R-{0} / gof(x) = g[f(x)] = g[2x+1]= $\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$

Para hallar fog, debemos analizar si la Im g está incluida en el Df.
Como R-{0} $\subset$ R, podemos realizar la composición:

$$\text{fog:R-}\{1\}\to \text{R / fog(x) = f[g(x)]=} f\left(\frac{1}{x-1}\right)=2.\frac{1}{x-1}+1=\frac{1+x}{x-1}$$

Notemos que como la inclusión es estricta, el conjunto R es el codominio y no la imagen de la función compuesta fog

Como vemos, fog ≠ gof. La composición de funciones no es una operación conmutativa.
Puede demostrarse que la composición de funciones es asociativa.

Composición de funciones inversas:
Sean las funciones biyectivas f:A → B y f^{-1}:B → A
a través de f a cada x de A le corresponde un y de B
a través de f^{-1} a cada y de B le corresponde un x de A
O sea f^{-1} (f(x))= x que se denomina función identidad y está definida de A en A

Análogamente, si aplicamos primero f^{-1}, diremos:
a través de f^{-1} a cada "x" de B le corresponde un "y" de A
a través de f a cada "y" de A le corresponde un "x" de B

Entonces; $f(f^{-1}(x))$ = x que es la identidad, pero ahora definida de B en B.

Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto de la recta y=x (gráfica de la función identidad).

Ejercicios

12) Dados los siguientes pares de funciones f y g indicar para cada una dominio mayorante e imagen y hallar f+g, f.g y f/g indicando el dominio mayorante de cada una.

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2$ $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $g(x) = 3x + 2$

d) $f(x) = \ln(x-1)$ $g(x) = e^x$

e) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad g(x) = (x-1)^2$

13) Dadas f(x)= $\sqrt{x}$ y g(x)= $x^2 - 1$, hallar: a) f(g(1)) b) g(f(1)) c)g(f(2)) d) f(g(2)) e) fog f) gof

14) Dados los pares de funciones del ejercicio 12, hallar, fog y gof haciendo restricciones a los conjuntos si fuese necesario

15) Dadas las siguientes funciones, indicar dominio e imagen, buscar su inversa (restringiendo si es necesario para la biyectividad) y componer para obtener la identidad. Indicar en todos los casos, dominios e imágenes.

a) $f(x) = x^2+2$ b)$f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ d) $f(x) = \ln(x+1)$

16) Dada fog: $R \to R$ / $fog(x)= x^3 + 3x - 2$.
a) Hallar f, siendo g: $R \to R$/ g(x)= 2x-1.
b) Hallar g, siendo f: $R \to R$/ f(x)= 2x-1.

17) Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo.
a) Escribir la función de medida del radio respecto del tiempo.
b) Sabiendo que la función de medida del volumen respecto del radio para la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi.r^3$, hallar la función de medida del volumen respecto del tiempo. Calcular el volumen para t=3

18) Indicar si es V o F, expresando un argumento que justifique la respuesta.
a) La composición de funciones inyectivas, es inyectiva
b) La composición de funciones sobreyectivas, es sobreyectiva

19) Hallar el conjunto de ceros, conjunto positividad, negatividad y a partir de ello esbozar una gráfica de las siguientes funciones cuyas fórmulas se indican a continuación..

a) $f(x) = \left(x^2 + \frac{2}{3}\right)x$ b) $g(x) = \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ c) $h(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right).\left(x^2 + 1\right)$

20) Representar gráficamente, en un sistema cartesiano de ejes las gráficas de las funciones que se indican

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le 2 \\ x^2 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -1 \\ -x & \text{si } |x| < 1 \\ -x^2 & \text{si } |x| \ge 1 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

21) a)Sean las funciones "f" y "g" definidas por las fórmulas dadas a continuación: $f(x) = \frac{5}{x+4}$ y $g(x) = \frac{3}{x-8}$. Se pide: Graficar ambas funciones en un mismo sistema cartesiano de ejes. Hallar gráfica y analíticamente los puntos donde se verifica la condición $f(x) = g(x)$.

b)Dadas las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación se pide: Definir "$f - g$" y hallar su conjunto de ceros. $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$ y $g(x) = \frac{2x5}{x+9}$

22) Dadas f y g hallar el conjunto de todos los $x / f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = x+2$ y $g(x) = \sqrt{2x+7}$

b) $f(x) = 2-x$ y $g(x) = \sqrt{2x-5}$

c) $f(x) = 1+\sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{2x+3}$

23) Dadas las funciones indicadas a continuación hallar, en forma analítica y gráfica (cuando se indique, el conjunto $A \subset Df$ que satisface:

a) $f(x) \geq g(x)$ si $f(x) = 3 + 2x$ y $g(x) = 4x - 5$. Graficar.

b) $f(x) < 8$ si $f(x) = 5 - x^2$

c) $f(x) > 4$ si $f(x) = x^2 - 3x$

d) $|f(x)| \leq g(x)$ si $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = 2 - 2x$. Graficar.

e) $|f(x)| \geq |g(x)|$ si $f(x) = 3x$ y $g(x) = 6 - 3x$

e) $f(x) \geq g(x)$ si $f(x) = \frac{x-2}{x-4}$ y $g(x) = \frac{x+2}{x}$. Graficar.

24) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{\frac{x}{2}} = 27$ c) $2^{x+1} + 4^x = 80$ e) $2^{x+3} + 4^x = 48$

b) $2^{\log x} = 16$ d) $4^{x+1} = 2^x + 3$ f) $4^{x+1} - 3.4^x - 1 = 0$

25) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2(x-2) - \log_2 5 + \log_2 3 = 1$ b) $\log_3\left(x^2 - 4x - 2\right) = 1$

c) $(\log x)^2 = \log x^2$ d) $(\log_x 2)^2 + \log_{x^3} 4 = \frac{1}{3}$

e) $(3 . \log x)^2 + 1 = 10 \log x$ f) $\frac{\log_5 \frac{125}{x^2}}{(\log_5 x)^2} = 1$

26) Hallar, en el intervalo $[0;2\pi)$, los ceros de las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación.

a) $f(x) = \text{sen } x - 1$ b) $g(x) = 2 .\cos(2x) - 1$

c) $h(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x - 1$ d) $t(x) = -2 . \cos x - 2$

UNIDAD 1: Límite funcional.

Bernard Bolzano *(Praga: 1781 / Praga: 1848)*
Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/bolz.html

Bernard Bolzano, liberó al cálculo del concepto infinitesimal. También dio ejemplos de la correspondencia de las funciones 1-1. Fue un filósofo, matemático y teólogo quien hizo significantes contribuciones tanto a las matemáticas como a la Teoría de la Ciencia, en algunos aspectos constituye un interesante precedente de la lógica matemática. En su obra póstuma "Paradojas de lo infinito" presenta conceptos que aparecen como una anticipación de la Teoría de Cantor acerca de los números transfinitos.

Bolzano ingresó a la facultad de filosofía en la Universidad de Praga en el 1796, estudió filosofía y matemática. Allí escribió :*Mi especial placer por las matemáticas*

En la rama de la metafísica se opuso a Kant, reivindicando el carácter constructivo, y no simplemente regulativo de algunas ideas metafísicas como las relativas a Dios y a la mortalidad del alma. Por interesantes que sean las especulaciones metafísicas y teológicas de Bolzano es hoy común acuerdo que la más importante e influyente contribución de este pensador se halla en sus ideas sobre lógica y teoría de conocimiento. Bolzano influyó sobre muchos que intentaron depurar la lógica de todo psicologismo y fundarla en el análisis de preposiciones. Según Bolzano, la lógica tiene como misión estudiar las proposiciones como tales, es decir las proposiciones en si. Las proposiciones son enunciados mediante los cuales se declara que algo es o no es, con independencia de que sea verdadero o falso.
Bolzano, se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX, a saber: en el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series, y en la existencia de funciones continuas sin derivadas; pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o de permanecer inéditos, como su importante Teoría de Funciones, que apareció en 1830, la influencia de sus ideas fue escasa.

1.1 – Cálculo de límites.

1) Mediante las aproximaciones indicadas en cada caso verificar el valor indicado en los límites siguientes:

a - $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

x	1,9	1,995	1,9992	2	2,004	2,01	2,1
f(x)							

b - $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x - 3} = \infty$

x	2,92	2,994	2,9996	3	3,002	3,03	3,1
f(x)							

c- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

x	0,9	0,994	0,9992	1	1,004	1,01	1,1
f(x)							

d - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x+1} = \infty$

x	10^3	10^4	10^5	10^6	$\to\infty$
f(x)					

e - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$

x	10^3	10^4	10^5	10^6	$\to\infty$
f(x)					

f - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

x	10^3	10^4	10^5	10^6	$\to\infty$
f(x)					

2) Calcular los límites indicados a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-9}$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$ e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+5}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-1}{5x^3+2}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5}{x^3-4}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{3x^2+1}$

3) Calcular los límites indicados a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ i) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ k) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000x}{x^2-1}$ ñ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$

o) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+3}{x^3-8x+5}$ p) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(3x-2)^2}{3x^3+1}$ q) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

r) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ s) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x+2)}-x$ t) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2+x}{3+x}\right)^x$

u) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$ v) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ w) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$

x) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ y) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ z1) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

z2) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

4) Calcular los siguientes límites trigonométricos:

a) $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}(3x)}{x}$ b) $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}^2x}{4x^2}$ c) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\text{sen}x}$

d) $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x}$ e) $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}(4x)}{x}$ f) $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}^2\frac{x}{3}}{x^2}$

g) $\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ h) $\lim_{x\to0} \frac{\text{tg}\,x-\text{sen}\,x}{x^3}$ i) $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}(a+x)-\text{sen}(a-x)}{x}$

5) Analizar cuáles de los siguientes límites laterales poseen respuesta correcta.

a) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ b) $\lim_{x\to3^+} \sqrt{x-3} = 0$ c) $\lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{2x-2} = -\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{16x^2+1}}{\sqrt{25x^2+9}+3x} = -2$ e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$ f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{x+1}\right)^{5x} = +\infty$

g) $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ h) $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = -\infty$ i) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

j) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$ k) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x-3} = +\infty$ l) $\lim_{x\to0^+} \frac{2^{1/x}-1}{5^{1/x}-4} = \frac{2}{5}$

m) $\lim_{x\to0^-} \frac{2^{1/x}+6}{2^{1/x}+3} = 1$ n) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5^{1/x}+6}{5^{1/x}+3} = 2$ ñ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5^{1/x}+6}{5^{1/x}+3} = 1$

1.2 - <u>Continuidad</u>.

1) Analizar cuáles de las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados. En aquellos casos que presente discontinuidad clasificarla y de ser factible, redefinirla para que sea continua en $\Re$. Graficar en cada caso.

a) $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $x_0 = 1$

b) $f_3(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

c) $f_4(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ |x+1|+1 & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

d) $f_5(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ |x| & \text{si} \quad -1<x<1 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ en $x_0 = -1 \wedge x_1 = 1$

2) Hallar, si existen, valores de "k" para que las funciones dadas a continuación sean continuas en todo $\Re$

a) $f_1(x)=\begin{cases} x^2+k & \text{si} \quad x \geq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

b) $f_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ (2x-k)^2 & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$

c) $f_3(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(3x)}{5x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -x+k & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

d) $f_4(x)=\begin{cases} 4-kx^2 & \text{si} \quad x<1 \\ |2-kx|+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

3) En un determinado país, el impuesto a las ganancias se paga sobre todo salario que, en bruto, supere los 1500 $. Hasta los primeros 2000$ de ganancias imponibles, se paga el 12% y sobre el resto, el 15%. Escribir analíticamente la función Impuesto en función del salario. Indicar si es una función continua y qué significa la continuidad en este contexto. Cuánto debe corresponder pagar a una persona que gana exactamente 3500$?. Representar gráficamente la función.

1.3 – <u>Calculo de rectas asíntotas</u>.

1) Hallar, si existen, las ecuaciones de las rectas asíntotas a las funciones definidas por:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ b) $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ e) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ f) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-1}$

<u>Resolución de a)</u>

Como $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ está definida $\forall x, x \in \Re$ el dominio de la función es el conjunto de los números reales, lo que nos indica que la función no presenta asíntotas verticales.
Para saber si tiene asíntotas horizontales se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$.

En nuestro caso $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}} = 0$. Luego y = 0 es A.H.

Resolución de f)

Como $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-1}$ no está definida para x = 1 el dominio de la función es $D_f=\Re-\{1\}$ lo que nos indica que es una probable asíntota vertical. Para asegurarnos de que realmente lo sea hay que comprobar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{4x^2+1}^{\to 5}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}=\infty$$. Por lo tanto x = 1 es A.V.

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overbrace{4x^2+1}^{\to\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to\infty}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2/x^2+1/x^2}{x/x^2-1/x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\overbrace{1/x^2}^{\to 0}}{\underbrace{\underbrace{1/x}_{\to 0}-\underbrace{1/x^2}_{\to 0}}_{\to 0}}=\infty$ podemos asegurar que la función no presenta A.H.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Para ello hacemos lo siguiente:

Hacemos la división entre polinomios $(4x^2+1)$ / (x - 1)

$4x^2$	$+\ 0x$	$+\ 1$	$x - 1$	D(x)	d(x)
$-\ 4x^2$	$+\ 4x$		$4x+4$	r(x)	C(x)
0	$+\ 4x$	$+\ 1$			
	$-\ 4x$	$+\ 4$			
	0	$+\ 5$			

Como D(x) = C(x) . d(x) + r(x) entonces $\dfrac{D(x)}{d(x)}=\dfrac{C(x).d(x)}{d(x)}+\dfrac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow$

$$\frac{D(x)}{d(x)}=C(x)+\frac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow\frac{4x^2+1}{x-1}=(4x+4)+\frac{5}{x-1}$$

Por lo tanto: y = 4x + 4 es la A.O.

Nota: Este procedimiento se puede aplicar, solamente cuando se trata de funciones racionales, en cuyo caso aseguramos que si el cociente obtenido es una expresión del tipo "mx+b" y además el resto es *no nulo* entonces esa expresión lineal obtenida es la ecuación de la asíntota oblicua. Para que el cociente sea lineal es condición necesaria, que el grado del polinomio numerador exceda en una unidad al grado del polinomio denominador.

2) En un tanque que tiene 500 l de agua se inyecta una solución con sal (de concentración 5 gr/ l) a razón de 1 litro por cada minuto. Supongamos que se mezcla con el agua instantáneamente. ¿Cómo evoluciona la concentración de sal dentro del tanque? ¿Qué sucede con esa concentración cuando el proceso se mantiene en el tiempo? Escribir analíticamente la función concentración de sal dentro del tanque en función del tiempo y graficarla.

<u>UNIDAD 2</u>: Derivadas y sus aplicaciones.

Gottfried Wilhelm von Leibnitz (Leipzig – 1646 / Hannover - 1716)
Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/leib.html

Leibnitz era hijo de un profesor de filosofía moral en Leipzig. Aprendió el mismo Latín y algo de Griego a la edad de 12 años, para así poder leer los libros de su padre. Desde 1661 al 1666 estudió leyes en la Universidad de Leipzig. En 1666 le fue rechazado el ingreso para continuar con un curso de doctorado, y fue a la Universidad de Altdorf, recibiendo su doctorado en leyes en el 1667.

Continuó su carrera de leyes trabajando en la corte de Mainz hasta 1672. En ese año visitó París para tratar de disuadir a Luis XIV del ataque al territorio Alemán. Permaneció en París hasta 1676, donde continuó practicando leyes. Sin embargo en París estudió matemáticas y física. Fue durante este periodo que las características fundamentales del cálculo fueron desarrolladas.

Fue un verdadero precursor de la lógica matemática. Persiguiendo una idea que le acosa desde la juventud es pos de un *“alfabeto de los pensamientos humanos”* y de un *“idioma universal”* se propone el proyecto de construir *“una característica universal”*, especie de lenguaje simbólico capaz de expresar, sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos, de manera que al surgir una controversia entre dos filósofos, éstos la zanjasen a la manera de los calculistas; bastaría en efecto, sentarse ante los ábacos, pluma en mano, y como buenos amigos decirse, en mutuo acuerdo: calculemos.

Las ideas de Leibniz, que contiene muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta este siglo. Igual destino tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del XIX. Agreguemos que las ideas de Kant, de gran influencia en su tiempo y para quien no era necesaria “ninguna nueva invención en la lógica”, han contribuido sin duda al estancamiento de esta disciplina. Las cosas cambiaron cuando llegó Boole, el cual se convirtió en el verdadero fundador de la lógica simbólica.

El resto de su vida desde 1676 hasta su muerte, permaneció en Hannover.

El 21 de Noviembre de 1675 escribió un manuscrito usando por primera vez la notación de la integral ò f(x)*d(x). En el mismo manuscrito estaba dada la regla para la diferenciación. Esta regla fue dada a conocer dos años después, en Julio de 1677.

2.1 - <u>Derivada de una función en un punto</u>.

1) Calcular aplicando la definición la derivada en el punto indicado y verificar el resultado por regla práctica.

$f_1(x) = 3x^2$ en $x_0 = -2$ $\qquad$ $f_2(x) = 2x^2 + 1$ en $x_0 = -1$ $\qquad$ $f_3(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

2.2 - <u>Función derivada. Cálculo de derivadas y derivadas sucesivas - Gráficos</u>.

1) Calcular aplicando propiedades y reglas prácticas la función derivada primera de las funciones dadas a continuación.

a) $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ $\qquad$ b) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ c) $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

d) $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ $\qquad$ e) $y = (1-5x)^6$ $\qquad$ f) $y = \sqrt{3 + 4x - x^2}$

g) $p(r) = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ $\qquad$ h) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^5$ $\qquad$ i) $g(x) = 2x^2\sqrt{2-x}$

j) $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ k) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ l) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

m) $y = \frac{1}{2}.e^{4x-2}$ n) $f(r) = \frac{1}{2}.e^{2r} + \dfrac{3}{e^{3r}}$ ñ) $f(t) = \ln^2(4t-8)$

o) $f(x) = sen^2(2x)$ p) $f(x) = sen\left(\frac{2}{x}\right)$ q) $y = \frac{1}{2}\,tg\,x\;sen(2x)$

2) Dadas las funciones siguientes calcular el valor de la derivada del orden indicado en el punto x_0.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ $f''_{(-1)}$

b) $f(x) = x^5 + 7x^4 - 5x + 4$ $f'''_{(0)}$

c) $f(x) = (2x-3)^5$ $f'''_{(3)}$

3) Encontrar, si existe, una fórmula que permita generalizar la derivada de la función indicada para $n \in N$.

a) $f(x) = x.e^x =$ b) $g(x) = \ln(1+x)$

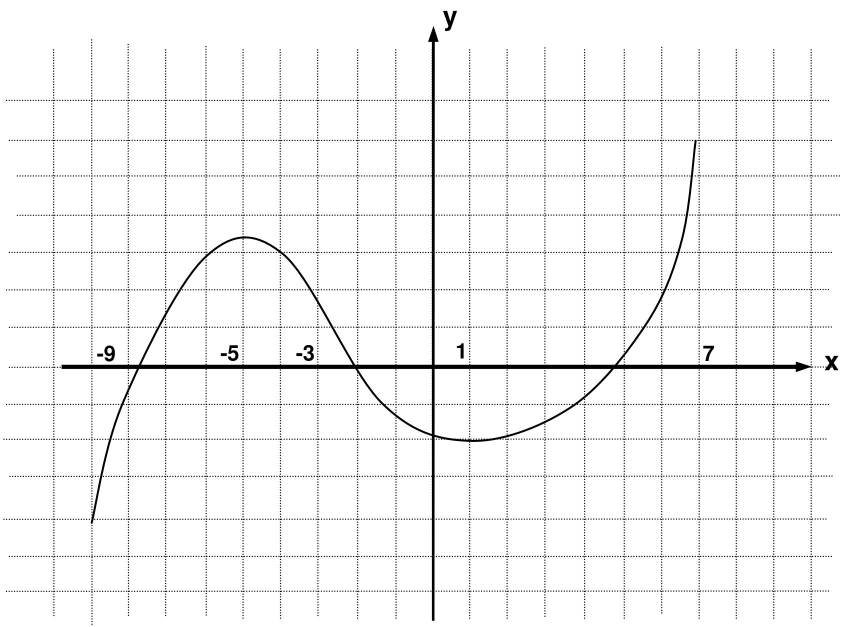
4) Dada $f(x) = 3\,sen(2x+3)$ demostrar que se verifica la igualdad: $y'' + 4y = 0$

5) Dada $f(x) = sen\,x - x.\cos x$ demostrar que se verifica la igualdad: $y'' + y = 2\,senx$

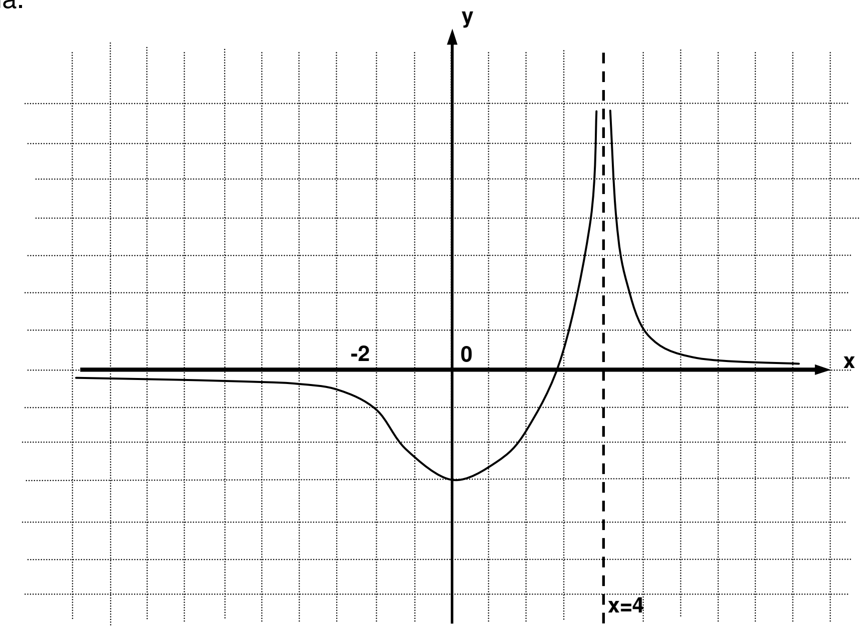
6) **a)** Demostrar que la función $y = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero allí, no es derivable. Extraer conclusiones al respecto.

b) Analizar si la función definida por la fórmula $y = \sqrt[3]{x}$ es derivable en $x_0 = 0$.

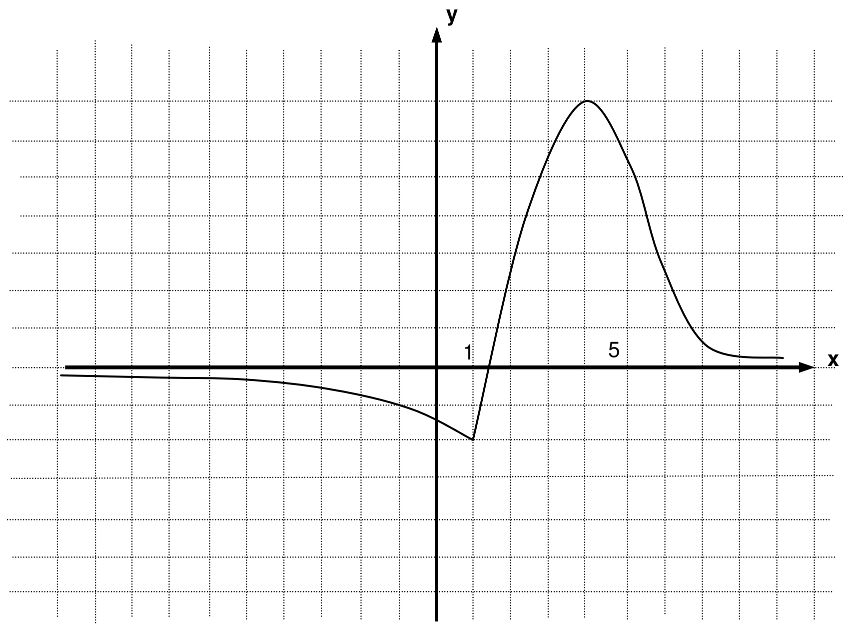
7) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función polinómica en el intervalo $[-9;7]$. Se sabe que en $x = -5$ y en $x = 1$ presenta extremos relativos. Asimismo, en $x = -3$ podemos encontrar un punto de inflexión. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



8) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función que presenta una asíntota vertical en $x = 4$ y una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Se sabe que en $x = 0$ presenta un mínimo. Asimismo, en $x = -2$ podemos encontrar un punto de inflexión Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



9) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función continua. La misma, que además de poseer una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$ presenta un punto en $x = 1$donde no es derivable y un punto de inflexión en $x = 5$. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



2.3 Aplicaciones geométricas y físicas de las derivadas. Variaciones con respecto al tiempo.

1) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-3}$ en el punto de abscisa $x_0=4$.

Resolución: Siendo $x_0=4 \quad\Rightarrow\quad y_0=f(4)=1$.

Como:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-3)-\left(\sqrt{x}-1\right)1}{(x-3)^2} \quad\Rightarrow\quad f'(4)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)(4-3)-\left(\sqrt{4}-1\right)1}{(4-3)^2}=\frac{\frac{1}{4}-1}{1^2}=-\frac{3}{4}.$$

Así resultan:

Recta tangente: $y-1=-\frac{3}{4}(x-4) \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{3}{4}x+4$

Recta normal: $y-1=\frac{4}{3}(x-4) \quad\Rightarrow\quad y=\frac{4}{3}x-\frac{13}{3}$

2) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva de ecuación $y=x^3-2x^2+4$ en el punto de abscisa $x_0=2$.

3) Hallar, si existen, las coordenadas "x" e "y" de los puntos sobre la curva definida por la fórmula $f(x)=\dfrac{5x-1}{2-x}$ donde la recta tangente, es paralela a la recta "r" cuya ecuación es $r:\ 2x-2y=1$

Resolución: Como el problema nos pide que la recta tangente sea paralela a una recta dada, se debe cumplir que la función derivada se iguale a la pendiente de la misma. Siendo $2x-2y=1 \quad\Rightarrow\quad -2y=-2x+1 \quad\Rightarrow\quad y=x-\frac{1}{2}$. Pediremos entonces como condición que: $f'_{(x)}=1$.

Luego: $f'(x)=\dfrac{5\,(2-x)-(5x-1)\,(-1)}{(2-x)^2}=\dfrac{10-5x+5x-1}{(2-x)^2}=\dfrac{9}{(2-x)^2}$

Igualando a "1" tenemos que:

$$\frac{9}{(2-x)^2}=1 \quad\Rightarrow\quad (2-x)^2=9 \quad\Rightarrow\quad |2-x|=3 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}2-x=3\Rightarrow x=-1\\ 2-x=-3\Rightarrow x=5\end{cases}$$

Sabidos los valores de abscisa podemos calcular las ordenadas:

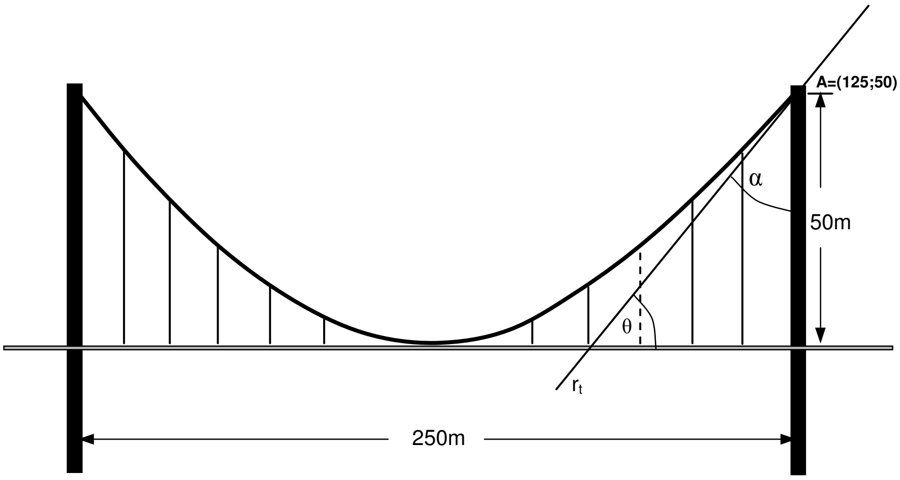
Siendo: $x=-1\Rightarrow y=f_{(-1)}=\frac{5.(-1)-1}{2-(-1)}=-2$. De donde uno de los puntos es el $P_0=(-1;-2)$. En forma idéntica, siendo $x=5\Rightarrow y=f_{(5)}=\frac{25-1}{2-5}=-8$ y el otro punto es el $P_1=(5;-8)$

4) Hallar en qué punto de la curva $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}}$ la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $x-2y=5$.

5) El cable de un puente colgante está unido a dos pilares separados entre sí una distancia de 250m como se indica en la figura. Suponiendo que adquiere forma de parábola con su punto más bajo a 50m del punto de suspensión. Hallar la ecuación de la parábola asociada y calcular el ángulo "α" que forma el cable con el pilar.

Ayuda: Tomando como referencia un sistema de ejes cartesianos con origen en "O". Buscar acorde con ello la ecuación de la parábola. Como r_t es tangente en el punto "A" podemos hallar el ángulo "θ" que es complementario al ángulo "α" pedido.

Nota: La función matemática que define a la forma del cable no es precisamente una parábola sino que se llama catenaria (forma que toma una cadena, cable o hilo sometido a la acción de su propio peso). Sin embargo la aproximación entre ambas es bastante precisa.



6) La ecuación de la recta tangente al gráfico de "f " en el punto $P_0 = (1;3)$ es $y = 6x - 3$. Determinar "f" sabiendo que es polinómica y que su derivada segunda es $f''(x) = 36x - 16$.

7) ¿En qué punto/s de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ la recta tangente corta al eje de abscisas en x_0=3?

8) Determinar para qué abscisas de la curva cuya ecuación es $y = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 9$ sus rectas tangentes pasan por el origen.

9) Desde una plataforma ubicada a 20m de altura se arroja, en el vacío, un proyectil verticalmente y hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/seg. Si la ecuación horaria del mismo es: $s(t) = 20 + 50t - 5t^2$ donde el tiempo "*t*" se mide en segundos y la posición *s(t)* en metros. Calcular:
a) La velocidad del proyectil en el instante t_0 = 2 seg.
b) El tiempo necesario para llegar a la altura máxima.
c) La altitud máxima alcanzada.
d) La aceleración en cada instante

10) Un globo esférico deja escapar gas a razón de 2m^3/min. Hallar la disminución de su superficie en la unidad de tiempo cuando el radio es de 12m. (Recordar que: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$; $Sup_{esfera} = 4\pi r^2$)

11) De un embudo cónico, sale agua a razón de 1cm^3/seg. Sabiendo que el radio de 4cm y la altura es 8cm, calcular el descenso de nivel en la unidad de tiempo en el instante en que la superficie libre se encuentra a una distancia de 2cm de la base del embudo. (Recordar que: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2.h$)

12) Un barco "A" navega, en línea recta, hacia el Sur a razón de 16Km/h. A 32Km al sur lo hace otro barco "B" que navega hacia el Este a razón de 12Km/h. Hallar (a) la velocidad a la que dichos barcos se aproximan o separan, al cabo de 1h de haberse iniciado el movimiento. (b) Ídem, después de 2 hs. (c) el momento en que dejan de aproximarse y comienzan a separarse así como la distancia a la que se encuentran en dicho instante.

13) Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2cm/seg mientras que los otros dos se van acortando de manera tal de mantener el área constante e igual a 50cm^2. Calcular la variación del perímetro "P" en la unidad de tiempo cuando la longitud de los lados extensibles es de: (a) 5cm. (b) 10cm. (c) Hallar las dimensiones del rectángulo en el momento en que el perímetro deja de disminuir.

2.4 - Aplicación de las derivadas al estudio de funciones.

Nota: Dado lo extenso del desarrollo para un estudio completo de función daremos algunos ejercicios previos a modo de ejemplo. Aquí solamente estudiaremos las funciones racionales ya que, las que no lo son requieren de algunos conocimientos adicionales que están fuera del nivel del curso.

Hallar el dominio, analizar la existencia de rectas asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Acorde con los datos obtenidos realizar las gráficas de las funciones cuyas fórmulas son:

1) $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

a) Dominio: $\Re$ porque es una función polinómica.
b) Asíntotas no tiene porque es polinómica.
c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 \Rightarrow -15x^4 + 15x^2 = 0 \Rightarrow -15x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -15x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ó} \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \end{cases}$$

Entonces:

x	(-∞;-1)	-1	(-1;0)	0	(0; 1)	1	(1;+∞)
f ’(x)	(-) ↘	Mín	(+) ↗	P.I.	(+) ↗	Máx	(-) ↘

Máximos y mínimos relativos:

$\text{Mín} = (-1; -2)$ $\text{Máx} = (1; 2)$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -60x^3 + 30x \Rightarrow -60x^3 + 30x = 0 \Rightarrow -30\,x\,(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -30x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ó} \\ 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

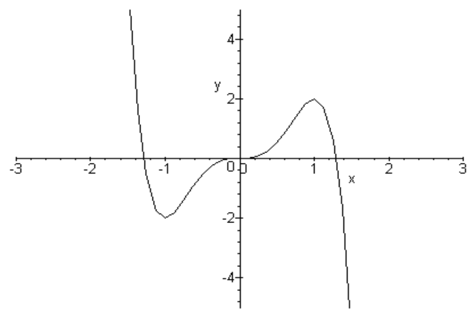
Entonces:

x	$(-\infty;-\sqrt{\frac{1}{2}})$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}};0)$	0	$(0;\sqrt{\frac{1}{2}})$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{\frac{1}{2}};+\infty)$
f”(x)	(+) ∪	P.I.	(-) ∩	P.I.	(+) ∪	P.I.	(-) ∩

Puntos de inflexión:

$PI_1 = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\, -\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $PI_2 = (0\,;0)$ $PI_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\, \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

Gráfico:



2) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

a) Dominio: $D=\Re$. b) Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales porque el dominio es $D=\Re$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x}^{\infty}}{\underbrace{1+x^2}_{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+1}=0\Rightarrow y=0$$ es la ecuación de la asíntota horizontal con lo que, no hay A.O.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{1.(x^2+1)-x\ .2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

Entonces:

x	(-∞;-1)	-1	(-1;1)	1	(1;+∞)
f ’(x)	(-)	Mín.	(+)	Máx.	(-)
	↘		↗		↘

Máximos y mínimos relativos: $\text{Mín}=\left(-1\,;-\frac{1}{2}\right)$ $\text{Máx}=\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{-2x.(1+x^2)^2-(-x^2+1).2.(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(1+x^2).\left[-(1+x^2)-2(-x^2+1)\right]}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x\left[-x^2-1+2x^2-2\right]}{(1+x^2)^3}=\frac{x\left[x^2-3\right]}{(1+x^2)^3}\Rightarrow\frac{x\left[x^2-3\right]}{(1+x^2)^3}=0\Rightarrow x=0\ \vee\ x=\pm\sqrt{3}$$

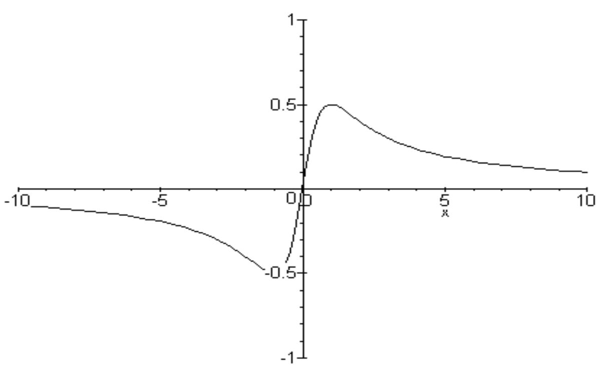
Entonces:

x	(-∞;$-\sqrt{3}$)	$-\sqrt{3}$	($-\sqrt{3}$;0)	0	(0;$\sqrt{3}$)	$\sqrt{3}$	($\sqrt{3}$;+∞)
f’’(x)	(-)	P.I.	(+)		(-)	P.I.	(+)
	∩		∪		∩		∪

Puntos de inflexión:

$PI_1=\left(-\sqrt{3}\,;-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $PI_2=(0\,;0)$ $PI_3=\left(\sqrt{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Gráfico aproximado:



3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

a) Dominio: $D=\Re-\{2\}$.

b) Asíntotas:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-2x+4}^{\to 4}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}}=\infty\Rightarrow x=2$$ es la ecuación de la asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^2-2x+4}^{\infty}}{\underbrace{x-2}_{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}=\infty$$

Entonces, no existe asíntota horizontal.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Para ello hacemos la división (x^2-2x+4) / $(x-2)$

					D(x)	d(x)
x^2	$-2x$	$+4$	$x-2$			
$-x^2$	$+2x$		x		r(x)	C(x)
0	0	$+4$				

Como $D(x) = C(x)\,.\,d(x) + r(x)$ entonces $\dfrac{D(x)}{d(x)}=\dfrac{C(x).d(x)}{d(x)}+\dfrac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow$

$\dfrac{D(x)}{d(x)}=C(x)+\dfrac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\dfrac{4}{x-2}$. Como el resto es $r\neq 0$ entonces el cociente $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4).1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x=0\vee x=4$$

Entonces:

x	(-∞ ; 0)	0	(0 ; 2)	2	(2 ; 4)	4	(4 ;+∞)
f ’(x)	(+)		(-)		(-)		(+)
	↗	Máx	↘	A.V.	↘	Mín	↗

Máximos y mínimos relativos:

$\text{Máx}=(0\,;-2)$ $\qquad$ $\text{Mín}=(4\,;6)$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

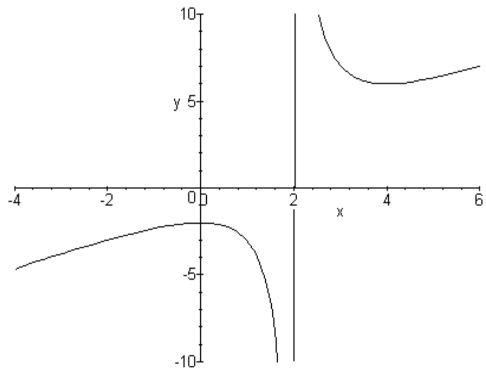
$$f''(x)=\frac{(2x-4).(x-2)^2-(x^2-4x).2.(x-2).1}{(x-2)^4}=\frac{2(x-2).\left[(x-2)(x-2)-(x^2-4x)\right]}{(x-2)^4}$$

$f''(x)=\dfrac{2\left[x^2-4x+4-x^2+4x\right]}{(x-2)^3}=\dfrac{8}{(x-2)^3}\Rightarrow\dfrac{8}{(x-2)^3}=0\Rightarrow 8=0$ absurdo: Por lo tanto no existen puntos donde se anule la derivada segunda

Entonces:

x	(-∞ ; -2)	2	(2 ; +∞)
f '(x)	(+)		(-)
	∩	A.V.	∪

Puntos de inflexión: No tiene
Gráfico:



4) Analizando la existencia de rectas asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión realizar las gráficas de las funciones cuyas fórmulas son:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

2.5 - Aplicación de las derivadas a problemas de optimización

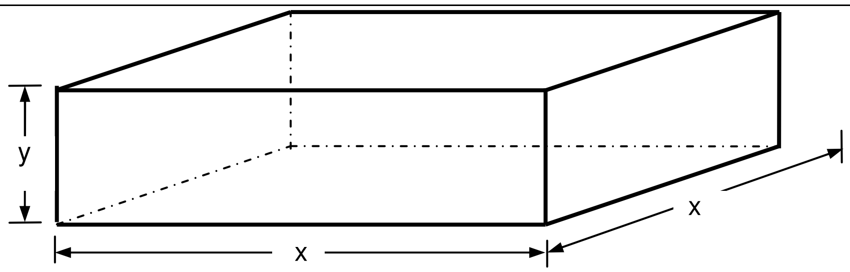
1) Hallar, si existen, dos números enteros positivos si se sabe que, cumplen la condición de sumar 20 y además el cubo de uno de ellos sumado al triple del otro resulta:

i) Máxima. ii) Mínima

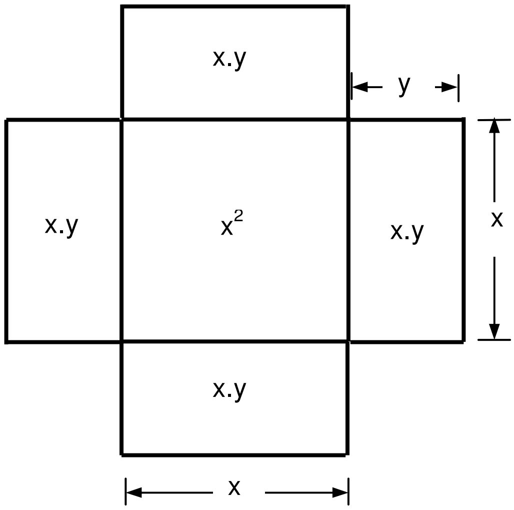
2) Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y además:

i) Su producto sea el máximo.
ii) La suma de sus cuadrados sea mínima.
iii) El producto entre el cuadrado de uno de ellos y el cubo del otro sea máximo

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma **de base cuadrada** sin tapa como el indicado en la figura. El mismo, Debe tener 125 m^3 de capacidad. Si el costo de las *caras laterales* es de \$2 el m^2 y el del *fondo* es de \$4 el m^2 ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo? ¿Cuál será ese costo mínimo?



Resolución: Supongamos que el depósito se encuentra desarmado como mostramos a continuación.



El volumen viene dado por la expresión: $V = x^2.y$. Como es condición necesaria que el mismo sea de 125 m^3 debe pasar que $x^2.y = 125 \Rightarrow y = \frac{125}{x^2}$

Como queremos minimizar los costos debe tener área mínima y así utilizar la menor cantidad posible de material. La expresión de la misma viene dada por:

$$C_T = \underbrace{\left[x^2\right]}_{\text{Área del fondo}} . \underbrace{(4)}_{\text{Costo del fondo}} + \underbrace{[4.x.y]}_{\text{Área caras laterales}} . \underbrace{(2)}_{\text{Costo de caras laterales}} = 4.x^2 + 8.x.y$$

Reemplazando por la relación entra variables resulta:

$$C_T = 4x^2 + 8.x.\frac{125}{x^2} = 4x^2 + \frac{1000}{x}$$

Derivando:

$$C'_T = 8x + \frac{0.x - 1000.1}{x^2} = 8x - \frac{1000}{x^2}$$

Para lograr un mínimo es preciso que la derivada se anule:

$$8x - \frac{1000}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x = \frac{1000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ m}$$

Como $x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{125}{5^2} \quad \Rightarrow \quad y = 5$

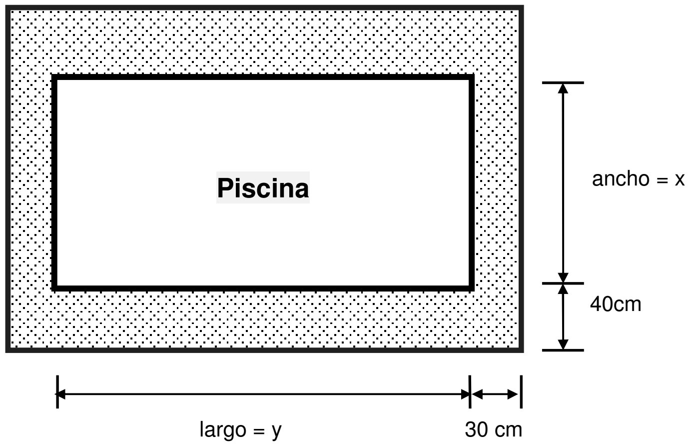
Ahora debemos demostrar que se trata de un mínimo y para ello usamos el criterio de la derivada segunda. La misma, evaluada en $x = 5$ que resulta:

$$C''_T = 8 - \frac{0.1000 - 1000.2x}{x^4} = 2 - \frac{-2000.x}{x^4} = 2 + \frac{2000}{x^3} \Rightarrow C''_T(5) = 2 + \frac{2000}{5^3} > 0$$

Como ello nos da un resultado positivo, estamos en condiciones de garantizar que esas dimensiones $x = 5 \quad \wedge \quad y = 5$ hacen que el costo del depósito sea mínimo.
Para saber el valor del costo mínimo basta reemplazar esos valores en la función de costos.
Así resulta:

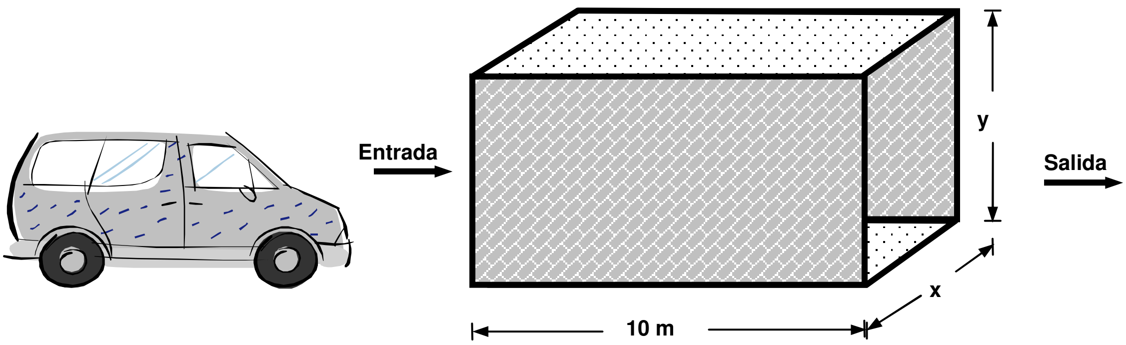
$$C_{mín} = 4.x^2 + 8.x.y = 4.(5)^2 + 8.(5).(5) = 300\ \$$$

4) Se desea construir una piscina de forma rectangular y área máxima en un terreno de $12m^2$ de superficie con la misma forma, como se indica en la figura. Si además debe cumplir con la condición de estar rodeada por un camino embaldosado de 30 cm. de ancho sobre los dos lados menores y de 40 cm. sobre los otros dos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la misma a los efectos de cumplir con lo pedido?

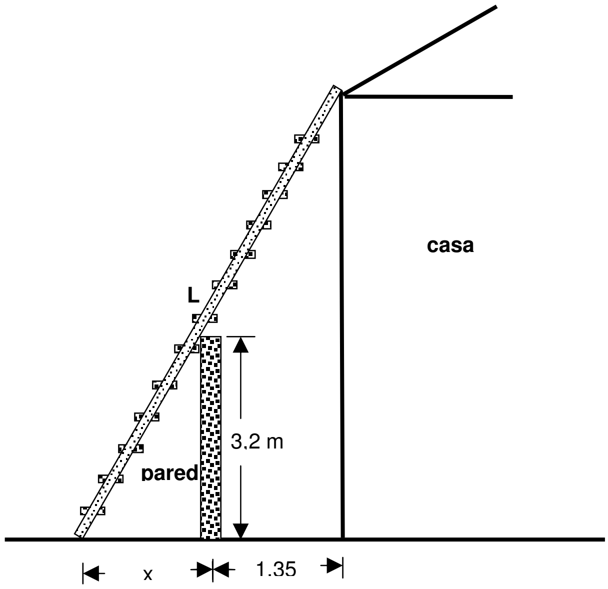


5) Determinar las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica **<u>sin tapa</u>** de $64\ cm^3$ de volumen para almacenar para que resulte lo más económica posible. (Nota: Aproximar $\pi = 3{,}14$)

6) Se desea construir un túnel para lavado de camionetas con un acceso abierto para la "Entrada" y otro para la "Salida". La forma debe ser de prisma recto como se indica en la figura. Las paredes deben estar azulejadas y tanto el piso como el techo deben ser de hormigón. Los materiales necesarios cotizan a razón de $8\$/m^2$ para el azulejo y $\$5/m^2$ para el hormigón. Si por ordenanzas municipales se le impone como condición es que posea un volumen de $400\ m^3$ ¿Qué dimensiones (ancho y alto) hacen que el costo sea mínimo posible? ¿Cuál es ese costo mínimo?



7) Una pared de 3,2m de altura está situada a 1,35m de una casa como se indica en la figura. Calcular la longitud de la escalera más corta que apoyada en un extremo sobre la pared y en otro sobre la casa alcance un nivel más alto.



Ayuda: Comparando los triángulos rectángulos de la figura podemos plantear la proporcionalidad siguiente:

$$\frac{L}{x+1{,}35} = \frac{\sqrt{x^2+3{,}2^2}}{x}$$

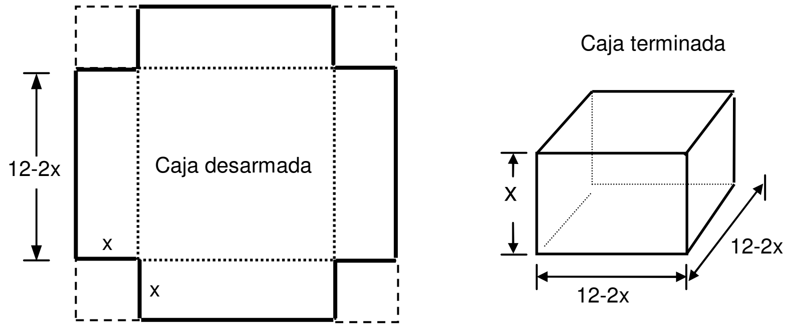
De allí resulta:

$$L = (x+1{,}35)\,\frac{\sqrt{x^2+3{,}2^2}}{x}$$

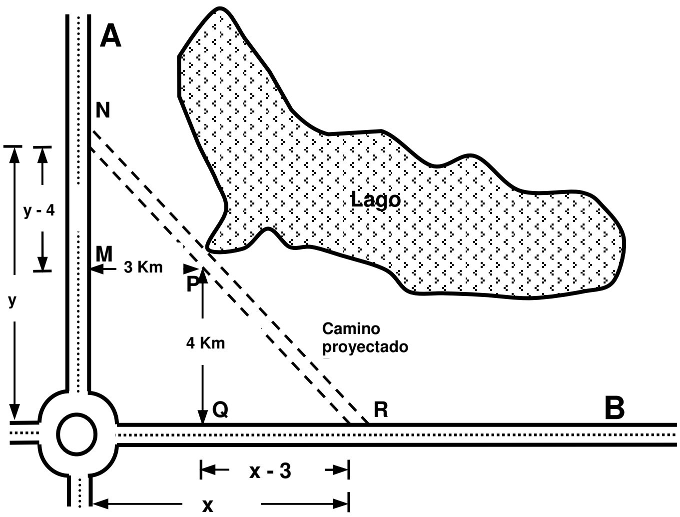
Que equivale a:

$$L = \left(1+\frac{1{,}35}{x}\right)\sqrt{x^2+3{,}2^2}$$

8) A partir de una hoja cuadrada de cartón de 12dm de lado se quiere construir una caja abierta recortando cuadrados iguales y luego plegando por la línea punteada como se indica en la figura. ¿Cuál será el volumen máximo del que se podrá disponer?



9) Dos tramos de carreteras rectas "A" y "B", que son perpendiculares entre sí, pasan por las cercanías de un lago como se indica en la figura.
La mínima distancia desde el punto "P" contiguo al mismo hasta las carreteras es de 3km y 4km respectivamente. Se desea construir un camino recto que una las carreteras <u>pasando por ese punto "P"</u> de manera tal que el predio triangular comprendido entre los tres tramos sea de costo mínimo.



¿Cuál será el aproximadamente el valor del terreno delimitado si cotiza a razón 1000$ por hectárea? (Nota: 1 hectárea = 10000m^2 = 0,01km^2)

Ayuda: Acorde con los datos aportados por la figura podríamos calcular el área del predio como $A=\frac{x.y}{2}$. Ahora es necesario saber la relación existente entre "x" e "y".

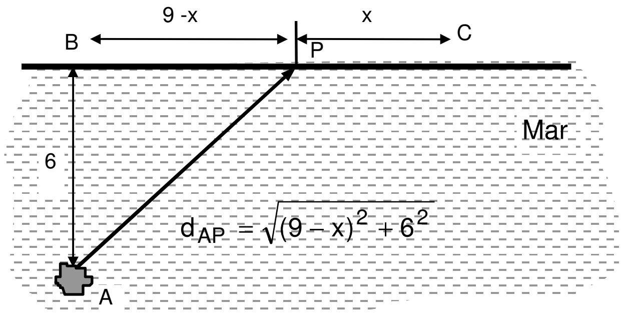
De la semejanza entre los triángulos $\overset{\Delta}{PQR}$ y $\overset{\Delta}{PMN}$ surge la relación $\frac{\left|\overline{PQ}\right|}{\left|\overline{QR}\right|}=\frac{\left|\overline{NM}\right|}{\left|\overline{MP}\right|}\Rightarrow$

$$\frac{4}{x-3}=\frac{y-4}{3}\Rightarrow\frac{12}{x-3}=y-4\Rightarrow\frac{12}{x-3}+4=y$$

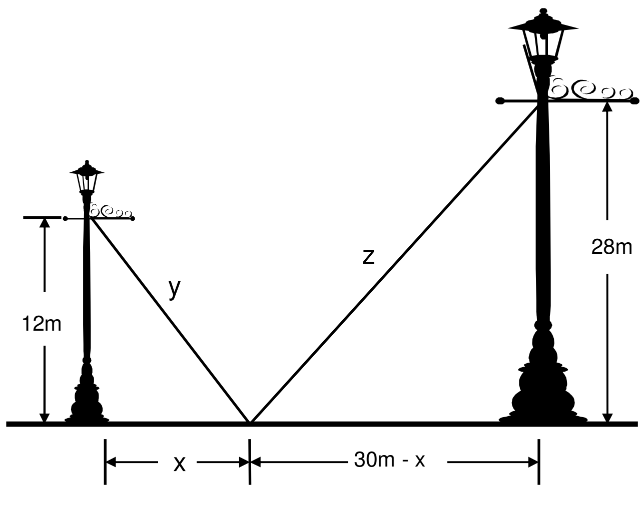
Reemplazando en la fórmula del área tenemos $A=\frac{x.\left(\frac{12}{x-3}+4\right)}{2}$ efectuando la propiedad distributiva queda: $A=\frac{6x}{x-3}+2x$.

10) Una isla está ubicada en el punto A, 6 Km mar adentro del punto más cercano B en una playa recta como se indica en la figura. Una persona que se encuentra en la isla desea ir hacia un punto C, 9 Km playa abajo de B.

El arrendar un bote cuesta \$15 cada Km recorrido y el alquiler de un auto con chofer \$12 cada Km. ¿Cómo se debe hacer el trayecto para que resulte lo más económico posible?



11) Dos faroles de iluminación de 12m y 28m de altura distan 30 m entre sí. Desea tenderse un cable recto, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto habrá que fijarlo para utilizar la menor cantidad de cable posible?



Ayuda: $L_{total}=y+z$ donde:

$$\begin{cases} y=\sqrt{12^2+x^2} \\ z=\sqrt{28^2+(30-x)^2} \end{cases}$$

12) Cuál de los puntos de la parábola $y=\frac{1}{x}$ se encuentra más cercano al origen de coordenadas?

Ayuda: Recordar que : $d_{AB}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$

2.6 - Regla de L`Hôpital.

1) Calcular mediante la regla de L´Hôpital los límites indicados a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\text{sen}(2x)}{x-\text{sen}(2x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\text{sen}\,x}{\sqrt{x}-\pi}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\text{sen}\,x)}{\ln(\text{tg}x)}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2.\ln(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\text{sen}\,x}$ i) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(2+x)}{x+1}$

2.7 - Diferencial de una función.

1) Calcular aproximadamente aplicando diferenciales:

a) $e^{0,002}$ **b)** sen 31º

2) Definiendo "Error relativo" como $E_r = \dfrac{dy}{y}$ y "Error porcentual" como $E_{\%} = E_r.100$ resolver los problemas dados a continuación:

a) Se mide el radio de un círculo y resulta $r = 13{,}8$. La incerteza de la medición, debido al instrumento utilizado es de 0,1cm. Calcular el error porcentual en la superficie.

b) Un observador mira el horizonte terrestre y puede calcular el radio de la Tierra con un error del 1%. Calcular el error porcentual cometido al estimar el volumen de la Tierra, si se la considera de forma esférica.

UNIDAD 3: Integrales

Isaac Newton

Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/dale.html

Sir **Isaac Newton**, (4 de enero de 1643, Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra – 31 de marzo, 1727 Kensington, Londres, Inglaterra) fue un científico, físico, filósofo, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en el Opticks) y el desarrollo del cálculo matemático.

Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la Revolución científica.

Entre sus hallazgos científicos se encuentran los siguientes: el descubrimiento de que el espectro de color que se observa cuando la luz blanca pasa por un prisma es inherente a esa luz, en lugar de provenir del prisma (como había sido postulado por Roger Bacon en el siglo XIII); su argumentación sobre la posibilidad de que la luz estuviera compuesta por partículas; su desarrollo de una ley de conducción térmica, que describe la tasa de enfriamiento de los objetos expuestos al aire; sus estudios sobre la velocidad del sonido en el aire; y su propuesta de una teoría sobre el origen de las estrellas.

Newton comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de las matemáticas, desarrollando el teorema del binomio. El matemático y físico matemático Joseph Louis Lagrange (1736–1813), dijo que *"Newton fue el más grande genio que ha existido y también el más afortunado dado que sólo se puede encontrar una vez un sistema que rija al mundo."*

3.1 - Cálculo de integrales indefinidas

1) Calcular las integrales inmediatas dadas a continuación.

a) $\int x^3.dx$ b) $\int \sqrt[3]{y}.dy$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ d) $\int \frac{dx}{x.\sqrt{x}}$

e) $\int (r^4 - 3r^3 + 5r^2).dr$ f) $\int (1-2x).(1+3x).dx$ g) $\int \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right).dt$ h) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).dx$

i) $\int \frac{2x+3}{x}.dx$ j) $\int \frac{(x+2)^2}{x}.dx$ k) $\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{x}}.dx$

2) Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de sustitución.

a) $\int (2x+1)^2.dx$ b) $\int \sqrt[3]{5x-2}.dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.dx$ d) $\int x^2.(1-x^3)^5.dx$

e) $\int \frac{dx}{1-4x}$ f) $\int e^{2x+3}.dx$

g) $\int \cos x . \operatorname{sen}^3 x \, . dx$ h) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} . dx$

i) $\int \frac{dx}{x . \ln^2 x}$ j) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}} . dx$

3) Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de partes. (**Tema Optativo)**

a) $\int x . e^x . dx$ b) $\int x^2 . \ln x . dx$ c) $\int \ln x . dx$

d) $\int \operatorname{arctg} x \, . dx$ e) $\int x^2 . \operatorname{sen} x . dx$ f) $\int \operatorname{sen} x . e^x . dx$

3.2 - Integral definida. Regla de Barrow

1) Calcular el valor de las integrales dadas a continuación.

a) $\int_0^3 5x^2 . dx$ b) $\int_1^3 \frac{x}{1+x^2} . dx$ c) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x . \cos x . dx$

2) Sabiendo que $\int_a^3 x^2 . dx = \frac{28}{3}$ calcular el valor de "a".

3) Hallar la expresión del polinomio de tercer grado que cumple con las condiciones siguientes dadas a continuación: $P(0) = P(-2) = 0$; $P(1) = 15$ y $\int_{-2}^{0} P(x) . dx = \frac{4}{3}$

4) La velocidad (en m/seg) de un cuerpo en un movimiento rectilíneo se expresa mediante la fórmula $v = .2 + t$. Hallar la distancia recorrida por el mismo, expresada en metros, entre los instantes $t_1 = 2 \text{ seg}$ y $t_2 = 5 \text{ seg}$

3.3 Aplicaciones geométricas - Cálculo de áreas – Volúmenes de revolución

1) Representar gráficamente y calcular el área limitada por las curvas siguientes:

a) $y = 2x;\ y = 0 ; x = 2$ b) $y = 2x + 1 ; y = 0 ; x = 3$

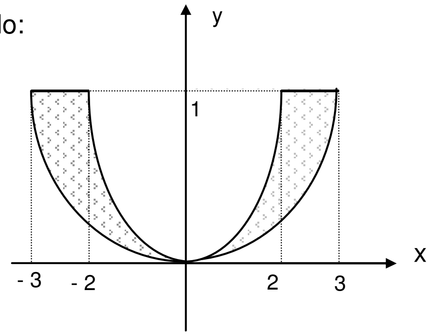
c) $y = 2x - x^2 ; y = 0$ d) $y = x^3 ; y = x$

e) $y = 2x - x^2 ; y = -x$ f) $y = x^2 ; y = \frac{1}{4} x^2 ; y = 1$

g) $y = x^3 - 6x^2 + 8x ; y = 0$ h) $y = 6x - x^2 ; y = x^2 - 2x$

Ejemplos ilustrativos: ***i***) Representar gráficamente y calcular mediante integrales el área limitada por las curvas de ecuaciones: $y = \frac{1}{4}x^2 ; y = \frac{1}{9}x^2 ; y = 1$

Graficando:



Para calcular los puntos de intersección hacemos las igualaciones correspondientes:

$$\tfrac{1}{4}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\tfrac{1}{9}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

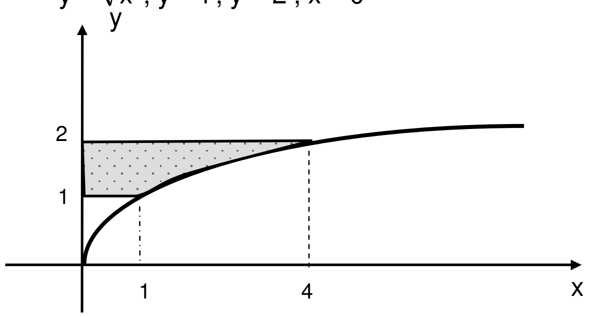
Para hacer el cálculo del área hay varios mecanismos. Podemos calcular lo que sucede en el primer cuadrante y luego duplicar la respuesta. Recordemos que el área encerrada entre una curva y el eje “x” es $A = \int_a^b f(x)dx$. Si deseamos hacerlo de esta manera es necesario calcular dos integrales. Así es:

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{9}x^2\right)dx + \int_2^3 \left(1 - \tfrac{1}{9}x^2\right)dx$$

$$\frac{A}{2} = \left[\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[x - \frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \left[\frac{1}{15}x^3\right]_0^2 + \left[x - \frac{1}{27}x^3\right]_2^3$$

$$\frac{A}{2} = \left(\frac{8}{15}\right) + \left[(3-1) - \left(2 - \frac{8}{27}\right)\right] = \frac{8}{15} + 2 - \frac{46}{27} = \frac{72 + 270 - 230}{135} = \frac{112}{135} \quad \Rightarrow \quad A = \tfrac{224}{135}$$

ii) Representar gráficamente y calcular mediante integrales el área encerrada por las curvas: $y = \sqrt{x}$; $y = 1$; $y = 2$; $x = 0$



Resolución: Hagamos un gráfico para poder interpretar el área a calcular. Como y = 1 e y = 2 son rectas horizontales y x = 0 es el eje de ordenadas la región cuya área queremos calcular

La escala es aproximada solamente sirve a los efectos del cálculo.

Lo resolveremos de dos maneras diferentes, con “x” como variable y con “y” como variable.

Obviamente la respuesta no depende del camino pero ayuda a realizarlo de manera más corta

1ª forma: Efectuando el cálculo de $A = \int_a^b f(x)dx$

$$A = \int_0^1 (2-1)dx + \int_1^4 \left(2 - \overbrace{\sqrt{x}}^{x^{1/2}}\right)dx = \underbrace{x\Big|_0^1}_{1} + \left(2x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_1^4 = 1 + \left(2x - \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)_1^4$$

$$A = 1 + \left[\left(8 - \tfrac{16}{3}\right) - \left(2 - \tfrac{2}{3}\right)\right] = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$$

2ª forma: Efectuando el cálculo de $A = \int_c^d g(y)dy$

Como $\boldsymbol{y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2}$ resulta: $A = \int_1^2 y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

2) Hallar el área limitada por la gráfica de la curva $y = \frac{1}{2}x^2$ y la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x_0 = 2$ y el eje "x".

3) <u>Volumen de Revolución</u> - Tema Optativo

Representar gráficamente y calcular el volumen engendrado por la rotación de las siguientes curvas alrededor del eje de abscisas entre los valores indicados.

a) $y = 2x^2$ si $0 \le x \le 5$

b) $y = \sqrt{x}$ si $0 \le x \le 4$

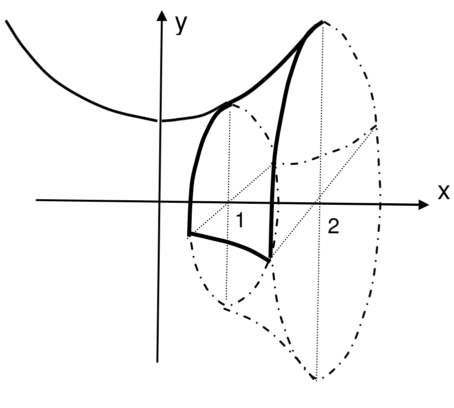
c) $x^2 + y^2 = r^2$ si $-r \le x \le r$

d) $y = \sqrt{x^3}$ si $0 \le x \le 2$.

Ejemplo ilustrativo: Dada $f(x) = x^2 + 1$ con $1 \le x \le 2$

Se pide graficar la rotación de la misma alrededor del eje x, y calcular su volumen.

Resolución: Graficando tenemos.



El volumen será

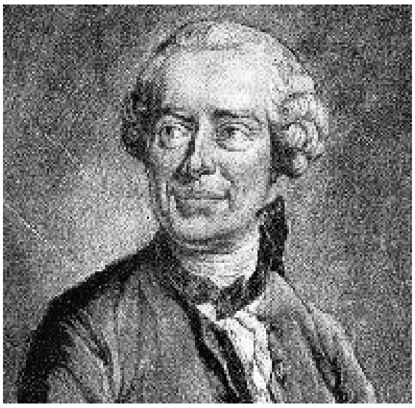
$$V = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 1\right)^2 dx$$

Resolviendo el cuadrado de binomio resulta que:

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^4 + 2x^2 + 1\right)dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x\right)_1^2 = \pi \cdot \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right)\right] = \frac{178}{15}\pi$$

UNIDAD 4: Sucesiones numéricas.

Jean Le Rond D'Alembert *(1717-1783)*
Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/dale.html



D'Alembert era hijo ilegítimo de Mme. de Tencin y de un oficial de artillería Luis-Camus Destouches. La madre había sido monja, pero una dispensa papal le permitió abandonar el convento.

Cuando nació fue abandonado en las escaleras de la iglesia de Jean Le Rond (por eso lleva esa nombre) y fue entregado a un hospicio. Su padre no estaba en Paris cuando nació y cuando regresó localizó a su hijo y arregló que un matrimonio lo cuidase. Él siempre consideró a su madre adoptiva (Mme. Rousseau) como su verdadera madre.

Su educación fue dirigida por su padre biológico, y a la muerte de éste, cuando ya tenía 9 años, le dejó dinero y la familia del padre se siguió ocupando de su educación. Inició sus estudios en un colegio privado y después entró en el Colegio Jansenista de las Cuatro Naciones. D'Alembert creció en París y en 1739 D'Alembert leyó su primer trabajo en la Academia de las Ciencias donde dos años más tarde fue admitido como miembro. Allí trabajó por el resto de su vida. Fue un gran amigo de Voltaire.

Ayudó a resolver la controversia en física sobre la conservación de la energía cinética mejorando la definición de Newton de la fuerza en su "Tratado de Dinámica" (1742), que articula el principio de mecánica de D'Alembert. En el año 1744 aplicó los resultados obtenidos en el equilibrio y movimientos de fluidos. Fue pionero en el estudio de ecuaciones diferenciales y pionero en el uso de ellas en la física. Fue uno de los primeros en comprender la importancia de las funciones y en este artículo definió la derivada de una función como el límite de los cocientes de incrementos. En realidad escribió la mayor parte de los artículos matemáticos en su trabajo, llamado "Volumen 28".

D'Alembert fue el que más se acercó a una definición precisa de límite y de derivada. Más en realidad toda duda se desvanecía ante el éxito de sus aplicaciones, de manera que el cálculo infinitesimal, más que una rama de la matemática, se convertía en una especie de doncella de la ciencia natural, en un auxiliar muy valioso, pero auxiliar al fin de las varias ramas de la física. D'Alembert también estudió hidrodinámica, mecánica de los cuerpos, problemas de Astronomía y circulación atmosférica. Rechazó un gran número de ofertas en su vida; una de ellas fue de Frederick II para ir a Prusia como presidente de la Academia de Berlín. También rechazó una invitación de Catherine II para ir a Rusia como tutor de su hijo.

4.1 - Sucesiones.

1) Escribir los primeros cinco términos de cada una de las sucesiones:

$a_n = \sqrt{2n+1}$ $\quad b_n = \dfrac{3n-1}{2^n}$ $\quad c_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$ $\quad d_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^n$

2) Escribir un término general apropiado para cada una de las siguientes sucesiones:

a) $A = \{1\,;\,-2\,;\,3\,;\,-4\,;\ldots\}$ $\quad$ b) $B = \{0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,-\frac{3}{4}\,;\ldots\}$

c) $C = \{-4\,;\,9\,;\,-16\,;\,25\,;\ldots\}$ $\quad$ d) $D = \{0{,}9\,;\,0{,}99\,;\,0{,}999\,;\,0{,}9999\,;\ldots\}$

3) Analizar acorde con los primeros términos de las siguientes sucesiones, la tendencia y calcular si es posible su límite. Estudiar la existencia de cotas superiores e inferiores.

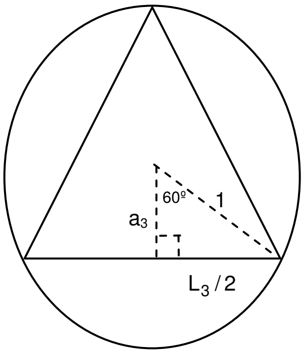
a) $a_n = \dfrac{2n}{1+n}$ $\quad$ b) $b_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ $\quad$ c) $c_n = \dfrac{-3n+4}{6n+1}$

d) $d_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad$ e) $e_n = \dfrac{(-2)^n}{1+n}$ $\quad$ f) $f_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n^2+1}$

g) $g_n = (-1)^n.\text{sen}\left(n.\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ h) $h_n = 2^{1/n}$ $\quad$ i) $i_n = a^{1/n}$ $\quad a > 0\,;\, a \neq 1$

4) En una circunferencia de 1cm. de radio se inscribe primero un triángulo equilátero, luego un cuadrado, luego un pentágono regular y así sucesivamente. Analizar la tendencia de las sucesiones generadas por los perímetros de los polígonos inscriptos y las áreas.

Resolución: Si inscribimos un triángulo equilátero tenemos que:



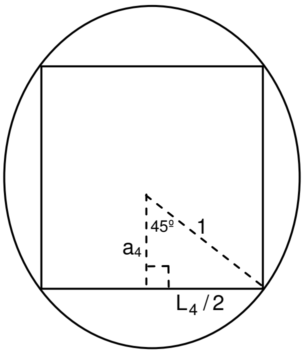
$$\alpha_3 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{L_3}{2} \Rightarrow L_3 = 2.\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = a_3$$

Luego:

$$P_3 = 3.L = 3.\left(2.\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = 6.\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad A_3 = \frac{P_3 . a_3}{2} = \frac{\left(6.\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right).\cos\frac{\pi}{3}}{2} = 3.\text{sen}\,\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{3}$$



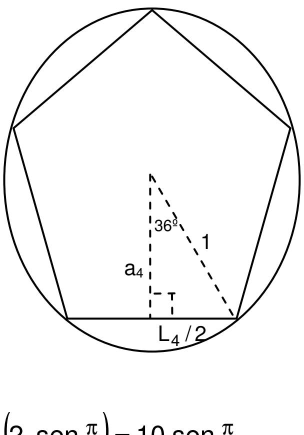
$$\alpha_4 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{L_4}{2} \Rightarrow L_4 = 2.\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = a_4$$

Luego:

$$P_4 = 4.L = 4.\left(2.\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = 8.\text{sen}\,\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad A_4 = \frac{P_4 . a_4}{2} = \frac{\left(8.\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right).\cos\frac{\pi}{4}}{2} = 4.\text{sen}\,\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4}$$



$$\alpha_5 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{5} = \frac{L_5}{2} \Rightarrow L_5 = 2.\text{sen}\,\frac{\pi}{5}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = a_5$$

Luego:

$$P_5 = 5.L = 5.\left(2.\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right) = 10.\text{sen}\,\frac{\pi}{5}$$

$$A_5 = \frac{P_5 . a_5}{2} = \frac{\left(10.\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right).\cos\frac{\pi}{5}}{2} = 5.\text{sen}\,\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}$$

Generalizando tenemos que:

$P_n = 2n.\text{sen}\frac{2\pi}{2n} = 2n.\text{sen}\frac{\pi}{n}$ y $A_n = n.\text{sen}\frac{2\pi}{2n}.\cos\frac{2\pi}{2n} = n.\text{sen}\frac{\pi}{n}.\cos\frac{\pi}{n}$

A partir de los resultados anteriores analizar las tendencias de estas sucesiones a medida que "n" crece.

4.2 - Sucesiones aritméticas.

1) Hallar la suma de los últimos 5 términos de una sucesión aritmética de 12 términos si el primero de todos es -3 y la diferencia entre un término y el siguiente es 4

2) La suma de los 3 términos consecutivos de una sucesión aritmética es 30 y la suma de sus cuadrados es 318. Calcular sus términos. Rta.:7; 10; 13.

3) Hallar el octavo término de la sucesión aritmética: $\div 2^{-2}; 2^{-3};...$

4) La suma de los cuatro términos del centro de una sucesión aritmética es 12 términos es 74. El producto de sus extremos es 70. Hallar la progresión.

5) En una sucesión aritmética el primer término es $a_1 = 4$; si la suma de todos los términos es $S_n = n+1$ veces la mitad del último. Calcularla

6) Calcular los valores de k que hacen que la siguiente sea una progresión aritmética:
$\div 3k^2 + k + 1; 2k^2 + k; 4k^2 - 6k + 1.$

7) Cinco números enteros forman una sucesión aritmética. Si la suma de todos ellos es 50 y su producto es 30.240. ¿Cuál es la sucesión aritmética?.

8) Supongamos que un alumno entra a 1er año de la escuela secundaria en los primeros días del mes de Marzo de un determinado año y a partir de ese instante comienza ahorrar para poder a en 5º año, a concurrir al viaje de egresados. El ahorro lo hace de esta manera: Todos los meses se guarda $5 y va incrementando mensualmente 50 ctvs. ¿Con cuánto dinero podrá contar al momento del viaje? (considerar que el ahorro lo hace durante un período de cuatro años y medio)

9) Interpolar:
a) 3 medios aritméticos entre 70 y 86.
b) 5 medios entre 2 y 47.

10) En una sucesión aritmética $\div 3;.......; 23;........; 59$ el número de términos que hay entre 3 y 23 es la mitad del número de términos comprendidos entre 23 y 59. Hallar la razón, el número de términos y la suma de todos.

11) Sabiendo que el 5º término de una progresión aritmética es 1 y que el 7º es $\frac{7}{4}$. Determinar el lugar que ocupa en la sucesión el término igual a $\frac{47}{8}$.

4.3 - Sucesiones geométricas.

1) En una sucesión geométrica de cinco términos el 1º y el 3º suman 20, el 3º y el 5º suman 180. Hallar la progresión.

2) La suma de los tres números positivos que forman una sucesión aritmética es igual a 21. Si a estos les restamos respectivamente 2, 3 y 2 se obtiene una sucesión geométrica. Encontrar cuál es la sucesión aritmética.

3) En una sucesión geométrica de seis términos los que ocupan lugares impares suman 182 y los que ocupan lugares pares suman 546. ¿Cuál o cuáles es/son esa/s sucesiones?.

4) El volumen de un prisma rectángular es $27cm^3$. Calcular sus aristas si están en sucesión geométrica y suman 9,5 cm.

5) Calcular el valor de la suma: $S = \dfrac{1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}}{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

6) Utilizando sucesiones geométricas infinitas convertir en fracciones los siguientes números periódicos:

i) $2,\widehat{3}$ ii) $5,1\widehat{2}$ iii) 3,292929...

7) Un cliente de un banco pide un préstamo de \$600 al 12% de interés compuesto mensualmente. Si tiene planeado saldar el préstamo en un único pago al final de 36 meses ¿A cuánto ascenderá la deuda?

8) Un trabajador piensa ahorrar dinero a través de un banco para cuando llegue el momento de jubilarse. Para ello deposita al comienzo de cada año \$1000 que dan un interés del 14% compuesto anualmente. ¿Con cuánto dinero podrá contar al cabo de 40 años de trabajo?

9) Se deja caer una pelota desde una altura de 12m y en cada rebote alcanza $\frac{1}{3}$ de la distancia previa. ¿Qué distancia total recorrerá la misma?

10) Los lados de un cuadrado miden 16cm. Se inscribe un cuadrado dentro de él uniendo los puntos medios de los lados consecutivos; repetimos ese proceso inscribiendo otro cuadrado y así sucesivamente. Calcular la suma de las áreas de todos esos cuadrados

11) Se construye un triángulo equilátero. Con los puntos medios de esos lados se construye otro triángulo equilátero inscripto y así sucesivamente. ¿Es posible decir que las áreas de los mismos forman una sucesión? En caso afirmativo ¿Cuál es su suma?

12) Dados los sistemas lineales: $\begin{cases} x-y=a \\ x-3y=b \end{cases}$ $\begin{cases} 6y-x=c \\ x+y=24 \end{cases}$. Hallar los valores de a; b y c, sabiendo que están en sucesión geométrica de razón positiva y que ambos sistemas tienen la misma solución.

13) Demostrar que si tres números x,y,z son términos consecutivos de una sucesión geométrica entonces los números $\dfrac{1}{y-x};\dfrac{1}{2y};\dfrac{1}{y-z}$ son términos consecutivos de una sucesión aritmética

UNIDAD 5- Combinatoria y Probabilidad

Blaise Pascal – (Clermont Fr.1623 – París Fr.1662)

Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html

Pascal trabajó en las secciones cónicas y desarrolló importantes teoremas en la geometría proyectiva. En su correspondencia con Fermat dejó la creación de la Teoría de la Probabilidad.

El padre de Pascal, Étienne Pascal, tenía una educación ortodoxa y decidió educar el mismo a su hijo. Decidió que Pascal no estudiara matemáticas antes de los 15 años y todos los textos de matemáticas fueron sacados de su hogar.

Pascal, sin embargo, sintió curiosidad por todo esto y comenzó a trabajar en geometría a la edad de 12 años. Descubrió que la suma de los ángulos de un triángulo corresponden a dos ángulos rectos y cuando su padre comprobó esto se enterneció y en-tregó a Pascal un texto de Euclídes. A la edad de 14 años Pascal acudía a las reuniones con Mersenne. Mersenne pertenecía a una orden religiosa de Minims y su cuarto en París era un lugar frecuente de reuniones para Fermat, Pascal, Gassendi, y otros.

A la edad de 16 años Pascal presentó sólo un trozo de papel con escritos a las reuniones con Mersenne. Contenía un número de teoremas de geometría proyectiva, incluyendo incluso el hexágono místico de Pascal.

Pascal inventó la primera calculadora digital (1642). El aparato llamado Pascaline, se asemejaba a una calculadora mecánica de los años 1940. Fomentó estudios en geometría, hidrodinámica e hidroestática y presión atmosférica, dejó inventos como la jeringa y la presión hidráulica y el descubrimiento de la Ley de Presión de Pascal. Su más famoso trabajo en filosofía es Pensées, una colección de pensamientos personales del sufrimiento humano y la fe en Dios. *"Si Dios no existe, uno no pierde nada al creer en él, mientras que si existe uno pierde todo por no creer".*

Su último trabajo fue el cycloid, la curva trazada por un punto en la circunferencia de un rollo circular.

5.1 Cálculo combinatorio

1) Hallar, si existen, los valores de "x" que verifican las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{3}.V^{4}_{x+2} - \frac{1}{2}.V^{4}_{x+1} = 3.V^{2}_{x+1}$ b) $C^{x-4}_{x-1} - C^{x-6}_{x-3} = \frac{5}{3}.C^{x-4}_{x-2}$

2) a) ¿Cuántos números de 5 cifras distintas pueden escribirse con los diez números dígitos?.
b) ¿Cuántos de ellos son pares?.
c) ¿En cuántos de los que comienzan con 2 el 5 ocupa el tercer lugar?.
d) ¿Cuántos son menores de 90000?.

3) En una lotería hay 100000 billetes numerados del 00000 al 99999. ¿Cuántos de esos billetes poseen todas sus cifras diferentes?

4) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un estante los 3 tomos de un libro de física, los cuatro tomos de uno de geografía y los 3 tomos de uno de inglés si todos los de una misma asignatura deben estar juntos?.

5) En una bolsa hay 8 bolillas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bolilla 6 veces y se escriben sucesivamente los números obtenidos. Determinar cuántos números pueden obtenerse si: a) La bolilla no se repone. b) La bolilla se repone.

6) Se dispone de cinco dados de diferentes colores.
a) ¿De cuántas maneras distintas se puede lograr una generala servida?

b) ¿Cuántos póker servidos existen?
c) ¿Y fouls servidos?

7) ¿De cuántas maneras se puede dividir una baraja de 40 naipes en dos mitades, de manera tal que en cada una de ellas haya exactamente dos de cada número.

8) En el juego del Truco:
a) ¿Cuántas posibles flores (tres naipes del mismo palo) existen?
b) ¿Cuántos envido (exactamente dos naipes del mismo palo) existen?
c) ¿De cuántas maneras se pueden lograr exactamente dos ases?

9) Los cajeros automáticos, en nuestro país, poseen claves de acceso de cuatro números dígitos.
a) ¿Cuántas claves existen?
b) ¿De ellas, cuántas tienen todas las cifras diferentes?
c) Entre las que tienen todas las cifras diferentes ¿Cuántas comienzan y terminan en número par?

5.2 Binomio de Newton.

1) Sin desarrollar calcular el término independiente del binomio: $\left(\frac{3}{x} - x^2\right)^6$

2) Hallar el 5º término del desarrollo $\left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}\right)^{25}$.

3) Sin efectuar el desarrollo. ¿Cuáles son los términos que poseen grado entero de la expresión $\left(3.x^{2/3} - x^{3/2}\right)^{10}$?

4) Calcular el valor de n para que el 5º término del desarrollo $\left(\frac{2}{x} + x\right)^n$ sea de grado cero.

5) Hallar el 6º término y el de grado 4 en el desarrollo $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{16}$.

5.3 - Cálculo de probabilidades

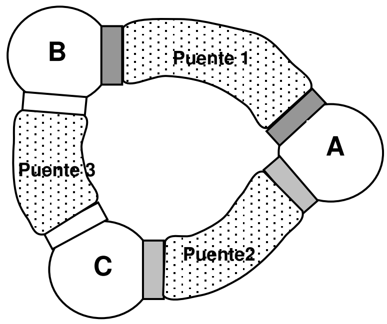
1) Calcular la probabilidad de obtener al menos un as si se arroja al aire un dado normal tres veces.

2) Se lanzan simultáneamente cuatro monedas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro caras?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos caras?

3) Hallar la probabilidad de que al arrojar dos dados normales al aire, se obtenga: a) suma 8. b) Números iguales.

4) Para completar sus estudios, un alumno debe aprobar dos materias que tiene previas; matemática y literatura. Si tiene una probabilidad 0,7 de aprobar matemática y 0,8 de aprobar literatura. ¿Cuál es la probabilidad de que complete sus estudios si se sabe que aprobó alguna de las materias? (Suponemos que el rendimiento en una asignatura es independiente del rendimiento en la otra)

5) Las ciudades A, B y C están comunica-das por los puentes 1, 2 y 3 como se indica en la figura. En caso de bombar-deo aéreo la probabilidad de que un puente sea derribado es 1/3. Hallar la probabilidad de que después de un bombardeo no haya paso de A hacia C.



6) En un cuatrimestre de una carrera terciaria, se dictan Matemática, Física e Idioma. El 80% de los alumnos habiliitados cursa matemática, el 70% física y el 2,4% ninguna de las tres asignaturas. Calcular la probabiidad de que un alumno elegido al azar curse las tres materias. (Suponer independencia en la elección de las materias a cursar.

7) Se dispone de dos bolilleros:
Bolillero A: Contiene 2 bolillas rojas y 8 bolillas negras.
Bolillero B**:** Contiene 4 bolillas rojas y 6 bolillas negras.
Si de cada uno de ellos se extrae una bolilla, calcular:
La probabilidad de que ambas sean del mismo color.
La probabilidad de que al menos una sea roja.

Resolución: Definimos previamente cada suceso:
R: “La bolilla extraída es roja”
N: “La bolilla extraída es negra”
Como de cada bolillero se extraerá una bolilla los resultados obtenidos en cada uno de ellos son independientes y en consecuencia la probabilidad de que se den los dos sucesos será el producto de las probabilidades.

a) Probabilidad de que las dos sean del mismo color

$$P(\text{dos de igual color}) = P(R_A \cap R_B) + P(N_A \cap N_B)$$

$$P(\text{dos de igual color}) = P(R_A).P(R_B) + P(N_A).P(N_B)$$

$$P(\text{dos de igual color}) = \frac{2}{10}.\frac{4}{10} + \frac{8}{10}.\frac{6}{10} = \frac{8}{100} + \frac{48}{100} = \frac{56}{100}$$

b) Probabilidad de que al menos una sea roja.

$$P(\text{al menos una roja}) = 1 - P(\text{las dos negras})$$

$$P(\text{al menos una roja}) = 1 - P(N_A).P(N_B) = 1 - \frac{8}{10}.\frac{6}{10} = \frac{52}{100}$$

8) En una baraja de 40 naipes se han suprimido varias cartas. Entre las que quedan se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas al azar. P(As) = 0,15 ; P(Oro) = 0,3; P(naipe que no sea ni As ni Oros) = 0,6. a) ¿Está entre ellos el As de Oro?
En caso afirmativo dé su probabilidad.
¿Cuántas cartas se han suprimido?

9) En una carrera de caballos intervienen cuatro participantes A, B, C y D. Según los entrenamientos previos A y B tienen la misma probabilidad de ganar mientras que C tiene la mitad de probabilidades que estos y D la tercera parte.
a) ¿Qué probabilidad hay de que gane cada caballo?

b) ¿Qué probabilidad hay de que ganen C ó D?

Resolución: a) Supongamos que a la probabilidad de que gane A la llamamos "p". Escribiéndolo en la notación habitual sería $P(A)=p$.

Acorde con el enunciado se estarían dando las siguientes probabilidades:

$P(A)=P(B)=p$

$P(C)=\frac{p}{2}$

$P(D)=\frac{p}{3}$

Como debe ocurrir que $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 \quad \Rightarrow \quad p+p+\frac{p}{2}+\frac{p}{3}=1$

De esto surge que: $\frac{17}{6}p=1 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{6}{17}$

Luego: $P(A)=P(B)=\frac{6}{17}$ $\qquad P(C)=\frac{3}{17}$ $\qquad P(D)=\frac{2}{17}$

b) Como se trata de sucesos mutuamente excluyentes ya que los dos juntos no pueden ganar resulta:

$P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\frac{6}{17}+\frac{3}{17}=\frac{9}{17}$

10) En la misma fecha del campeonato juegan Independiente y San Lorenzo, éste último como local. Se sabe que la probabilidad de que Independiente no pierda es el triple de la probabilidad de que pierda y que la probabilidad de que gane es el cuádruplo de la probabilidad de empate. ¿Cuáles son las probabilidades de obtener local, empate, visitante?

11) Un avión trimotor puede volar con solamente el motor central o bien con los dos motores laterales. La probabilidad de fallar el motor central es p_1 y la de fallar cada uno de los motores laterales es p_2. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión se caiga?

12) Un test detecta la presencia de un cierto tipo T de bacterias en el agua con probabilidad 0,90 en caso de haberlas. Si no las hay detecta la ausencia con probabilidad 0,80. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de tipo T es 0,20, calcular la probabilidad de que:

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test dio positivo.
b) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test dio negativo.
c) Haya bacterias y el test dé positivo.
d) O haya bacterias o el test dé positivo.

13) La probabilidad de que una medición de cierta magnitud física se cometa un error mayor que la precisión prefijada es igual a 0,4. Se han realizado tres mediciones independientes. Hallar la probabilidad de que en una de ellas el error cometido supere la medición prefijada.

14) El departamento de auditoria de una empresa está constituido por 10 profesionales (6 varones y 4 mujeres). Ante la necesidad de enviar 3 auditores al interior, se decide elegirlos aleatoria-mente. Calcular la probabilidad de que: a) Viajen 3 mujeres. b) Viajen 2 mujeres y 1 varón.

15) Un arquero de fútbol ataja en promedio 3 de cada 10 penales que le patean. En un partido el resultado se define por penales. ¿Cuántos penales deben patearle para que haya un 80% de probabilidad de atajar uno?

16) Un lote consta de 10 artículos buenos, 4 con pequeños defectos y 2 con defectos graves. Se elige un artículo al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) No tenga defectos.
b) Tenga un defecto grave.
c) Sea bueno o tenga un defecto grave.

17) Una caja contiene 20 lámparas de las cuales 3 no funcionan. Otra caja contiene 50 lámparas de las cuales 7 no funcionan. Si se saca una lámpara de cada caja ¿Cuál es la probabilidad de que no funcione ninguna de las dos?

18) La probabilidad de que llueva en un día del año en una ciudad determinada es 0,25. El pronóstico es correcto en el 60% de las veces en que el pronóstico es de lluvia y en el 80% de las veces en que se hacen otros pronósticos. Determinar la probabilidad de que el pronóstico sea correcto en un día seleccionado al azar.

19) En un hospital se determinó que la causa de una enfermedad virósica puede provenir por tres tipos distintos de virus. Las estadísticas han demostrado que el 50% de los enfermos han sido atacados por el virus A, el 30% por el virus B y el 20% por el virus C. La probabilidad que un enfermo se recupere es la siguiente: Para el virus "A" 70%; para el virus "B" 80% y para el virus "C" 90%. Un enfermo es dado de alta. Calcular la probabilidad que haya sido atacado por el virus "A".

5.4 Variable aleatoria. (Tema optativo)

1) Considérese un par de dados normales donde la variable aleatoria de interés es la suma de los números obtenidos. Hallar la función de probabilidad. En base a ello calcular el valor esperado de la suma.

2) Un juego de apuestas callejeras consiste en extraer sucesivamente y sin reposición dos naipes de una baraja española de 40. Si se logran obtener dos Ases la banca paga un premio de $20, si se obtiene un solo As el premio es de $8. En cualquier otro caso se pierde $ 1. Definir la variable aleatoria "Ganancia" (Premio – Apuesta) asociada a este juego y calcular su esperanza matemática.

Resolución: Como cada uno de los posibles sucesos tiene un valor de pérdida o ganancia de dinero, vamos a construir una tabla que muestre las situaciones posibles. Ello es definir la variable aleatoria asociada.
Las tablas dadas a continuación muestran cada una de las situaciones posibles y sus correspondientes pérdidas o ganancias.

	Variable	**Ganancia o Pérdida "x"**	**Probabilidad P(x)**
Se extraen dos Ases	Premio: $20 – Apuesta: $1	**+$19**	$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{12}{1560}$
Se extrae un único As	Premio: $8 – Apuesta: $1	**+$7**	$\left(\frac{4}{40}\cdot\frac{36}{39}\right).2=\frac{288}{1560}$
Otro caso	Premio: $0 – Apuesta: $1	**-$1**	$1-\frac{12}{1560}-\frac{288}{1560}=\frac{1260}{1560}$

Luego, la esperanza de la variable será:

$$E(x)=\sum_{1}^{n} x_i\,.\,p(x_i)=19\$.\frac{12}{1560}+7\$.\frac{288}{1560}+(-1\$).\frac{1260}{1560}=\frac{984}{1569}\$\cong 0{,}6398\$$$

Este juego es netamente favorable a los apostadores por tener esperanza positiva. Ello significa que si el juego se realiza en varias oportunidades, la banca con el tiempo quedaría arruinada.

3) En un juego de apuestas se arrojan dos dados al aire. Los premios se consignan a continuación
Si obtiene: - ***Dos Ases*** logra un premio de $20.
- ***Dos números iguales (No ases)*** logra un premio de $8.
- ***Un solo As*** logra un premio de $3.
- ***Cualquier otro caso*** pierde $p.

Se pregunta:¿Cuál sería el precio justo a pagar por intervenir? (Esperanza nula)
Ayuda: Hacer una tabla de doble entrada mostrando los posibles resultados y las pérdidas ó ganancias asociadas a cada caso.

Resolución: Lo que se muestra a continuación es la tabla de doble entrada que permite ver en cada caso las pérdidas o ganancias logradas. Ellas son la diferencia entre el premio pagado y la apuesta realizada y se muestran, para mejor visualización, en diferentes colores.

	As	**Dos**	**Tres**	**Cuatro**	**Cinco**	**Seis**
As	20 – p	3 – p	3 – p	3 – p	3 – p	3 – p
Dos	3 – p	8 – p	– p	– p	– p	– p
Tres	3 – p	– p	8 – p	– p	– p	– p
Cuatro	3 – p	– p	– p	8 – p	– p	– p
Cinco	3 – p	– p	– p	– p	8 – p	– p
Seis	3 – p	– p	– p	– p	– p	8 – p

Ahora, armar la variable aleatoria asociada resulta mucho más simple porque conocemos todos los casos posibles y sus correspondientes probabilidades. Llamando "X" a las pérdidas o ganancias logradas y "P(x)" a sus correspondientes probabilidades resulta:

Resultado logrado	**X**	**P(X)**
Dos Ases	20 – p	$\frac{1}{36}$
Dos Números iguales	8 – p	$\frac{5}{36}$
Exactamente un As	3 – p	$\frac{10}{36}$
Ninguno de esos casos	– p	$\frac{20}{36}$
		$\sum P(x_i) = 1$

Como deseamos que el juego resulte justo debe ocurrir que la esperanza sea nula. Así tenemos que: $E(x) = \sum x_i \, . p_{(x_i)} = 0$

Luego: $(20 - p).\frac{1}{36} + (8 - p).\frac{5}{36} + (3 - p).\frac{10}{36} + (-p).\frac{20}{36} = 0$

Distribuyendo y asociando convenientemente resulta:

$$\left(\frac{20}{36} + \frac{40}{36} + \frac{30}{36}\right) - \left(\frac{1}{36}p + \frac{5}{36}p + \frac{10}{36}p + \frac{20}{36}p\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{90}{36} = \frac{36}{36}p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{90}{36} \approx 2{,}5 \ \$$$

4) La probabilidad de que un paciente no se recupere de una determinada operación es de 0,1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los ocho pacientes sometidos se recuperen?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo un paciente entre los ocho no se recupere?.

5) Un tirador tiene 70% de posibilidades de dar en el blanco cada vez que tira.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al disparar 10 veces falle en las 10?
b) ¿Cuántas veces se debe esperar que dé en el blanco?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que dé al menos nueve veces en el blanco en 10 tiros?

6) Un auditor del dpto. de Impuestos sobre las Rentas está seleccionando una muestra de seis declaraciones de impuestos de personas de una profesión particular, para una posible auditoria. Si dos o más de ellas indican deducciones “no autorizadas”, se auditará todo el grupo de 100 declaraciones. ¿Cuál es la probabilidad de una auditoria más detallada si el porcentaje de declaraciones incorrectas es: a) 25. b) 30.

7) Sólo el 10% de todos los insectos expuestos a un insecticida en un laboratorio pudieron sobrevivir.
Si se expone una muestra de 5 insectos al insecticida.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan los cinco?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sobrevivan los cinco?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sobrevivan más de tres insectos?

8) Se dispone de una baraja de 40 naipes. Si se extraen 4 de ellos al azar con reposición ¿Qué probabilidad hay de que?
a) Todos sean Ases
b) Haya exactamente un As.
c) Al menos uno sea un As

9) Resolver el mismo problema anterior pero considerando que los naipes obtenido no se reponen.

10) Un jugador de tenis “A” tiene el doble de probabilidades de ganarle a su rival “B” que de hacerlo éste último sobre el primero. Se enfrentan en un torneo donde resultará campeón aquel que gane dos partidos seguidos o bien el que logre tres triunfos. ¿Cuál es el número esperado de partidos a disputarse?

11) Una envasadora produce el 20% de sus latas de ensalada de frutas, en forma aleatoria sin colocar cerezas. ¿Cuántas latas se deberían abrir para la probabilidad de hallar al menos una sin cerezas supere el 95%?

12) En una oficina, el 40% de los 35 empleados son mujeres. Para una capacitación el jefe debe elegir 8 empleados y aludiendo haberlo hecho al azar, resultan los 8 empleados ser varones. ¿Se puede sospechar que la elección no haya sido al azar? Justificar.

13) Pedro acierta al blanco el 70% de los tiros y Juan el 55%. Si tiran 8 veces un tiro cada uno, hallar la probabilidad de que a lo sumo dos de las ocho veces ninguno haga blanco

Respuestas

UNIDAD 0.

Funciones

1) a) $f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2$ b) $f_2(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ c) $f_3(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$ d) $f_4(x) = \frac{7}{6}x$

2) a) **V** b) **V** c) **V** d) **V** e) **F** f) **V**

3) a) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ b) $f(x) = -3x^2 + 18x - 24$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 12$

d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ e) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 5$

4) Si $k = -\frac{4}{3}$ es tangente; si $k > -\frac{4}{3}$ es secante y si $k < -\frac{4}{3}$ es exterior

5) $S = (-\infty;1] \cup [5;+\infty)$

6) $P(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x+1)$ $C^+ = (1;2) \cup (3;+\infty)$ $C^- = (-\infty;-1) \cup (2;3)$

7) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$

8) $a = 2$; $b = -3$ $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

9) $a = -74$

12)

a) $Df = R \quad Im\, f = R_0^+$
$Dg = R \quad Im\, g = R$

b) $Df = R \quad Im\, f = R_0^+$
$Dg = R_0^+ \quad Im\, g = R_0^+$

c) $Df = R - \{2\} \quad Im\, f = R - \{0\}$
$Dg = R \quad Im\, g = R$

d) $Df = (1;+\infty) \quad Im\, f = R$
$Dg = R \quad Im\, g = (0;+\infty)$

e) $Df = R \quad Im\, f = [-1;1]$
$Dg = R \quad Im\, g = R_0^+$

13) a) 0 b) 0 e) $fog: R \to R_0^+ / (fog)_{(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$ f) $fog: R_0^+ \to [-1;+\infty] / (gof)_{(x)} = x - 1$

15) a) $f: R_0^+ \to [2;+\infty) / f_{(x)} = x^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}: [2;+\infty) \to R_0^+ / f^{-1}{}_{(x)} = \sqrt{x-2}$

b) $f: R \to R / f_{(x)} = \sqrt[3]{x-3} \Rightarrow f^{-1}: R \to R / f^{-1}{}_{(x)} = x^3 + 3$

c) $f: R - \{3\} \to R - \{2\} / f_{(x)} = \dfrac{2x+1}{x-3} \Rightarrow f^{-1}: R - \{2\} \to R - \{3\} / f^{-1}{}_{(x)} = \dfrac{3x+1}{x-2}$

d) $f: (-1;+\infty) \to R / f_{(x)} = \ln(x+1) \Rightarrow f^{-1}: R \to (-1;+\infty) / f^{-1}{}_{(x)} = e^x - 1$

16) a) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^3 + 3.\dfrac{x+1}{2} - 2$ b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

17) a) $r(t) = 1 + 0{,}1.t$ b) $V(t) = \frac{4}{3}(1 + 0{,}1.t)^3$ c) $V(3) \approx 2{,}93\pi$

18) **a**) VERDADERO

b) FALSO – Contraejemplo:

Sean $f: [0;1] \to [0;1] / f_{(x)} = x$ es sobreyectiva y $g: R \to \{1\} / g_{(x)} = 1$ es sobreyectiva

$fog : R \to [0;1] / (fog)_{(x)} = 1$ no es sobreyectiva

19) a) $S = \{0\}$ b) $S = \left\{\pm\frac{2}{3}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ c) $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

21) a) $x = 26$ b) $C_0 = \left\{-\frac{27}{11}\right\}$

22) a) $x = 1$ b) $x = \varnothing$ c) $x = 3 \vee x = -1$

23) a) $S = [-\infty;4]$ b) R c) $S = (-\infty;-1) \cup (4;+\infty)$
d) $S = (-\infty;-3]$ e) $S = (1;+\infty)$ f) $S = (-\infty;0) \cup (4;+\infty)$

24) a) 6 b) 10000 c) 3 d) 0 e) 2 f) 0

25) a) $\frac{16}{3}$ b) $5;-1$ c) $100;1$ d) $8;\frac{1}{2}$ ei) $10;\sqrt[9]{10}$ f) $5;\frac{1}{125}$

26) a) $C_0 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ b) $C_0 = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$
c) $C_0 = \{0;\pi\}$ d) $C_0 = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$