COLEGIO NACIONAL DE BUENOS AIRES. UBA

MATEMÁTICA 3er AÑO

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

2013

ÍNDICE

PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA TERCER AÑO. 2013

Unidad 1: Las funciones polinómicas I. Función lineal
Definición de función. Polinomio, función polinómica. Función lineal, ecuación de la recta. Crecimiento y decrecimiento . Paralelismo y perpendicularidad . Problemas.

Unidad 2: Las funciones polinómicas II. Función cuadrática
Función cuadrática. Ceros de una función. Translaciones y simetrías. Ecuación de segundo grado. Movimientos. Intersección de parábola con recta.

Unidad 3: Las funciones polinómicas III.
Ceros de una función polinómica en general, multiplicidad. Funciones pares e impares. Clasificación de funciones. La función biyectiva y su inversa.
Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini, Teoremadel resto. Divisibilidad. Resolución de ecuaciones . Teorema de Gauss. Descomposición factorial de un polinomio. Clasificación. Movimientos. Representación aproximada de funciones polinómicas a partir de ceros, intervalos de positividad y negatividad

Unidad 4: Las funciones racionales e irracionales
Función racional. Función homográfica. Operaciones con expresiones algebraicas racionales. Ecuaciones. Problemas. Funciones irracionales. Álgebra de funciones. Problemas

Unidad 5: Álgebra de funciones.
Igualdad de funciones. Suma, producto, cociente de funciones. Composición de funciones.

Trabajo Práctico 0

1) Operar para reducir la expresión:

a) $a(a+1)(a-1) - a^3 - a(2a+1)$
b) $(1-b)^2 . (b-1)^3 : (1-b)^4$

2) Completar las siguientes expresiones para que sean trinomios cuadrados perfectos y escribir como binomio al cuadrado.
a) $x^2 - 4x + \ldots$ b) $4a^2 - 8a + \ldots$ c) $9 + 2a + \ldots$

3) Factorizar las siguientes expresiones:
a) $x^2 + 2x$ b) $x^3 - x^2$ c) $ax + ab + cx + cb$
d) $x^2 - 2x + ax - 2a$ e) $x^2 + x - ax - a$ f) $x^2 - a^2$
g) $4x^2 - a^2$ h) $a^2x^2 - \frac{1}{4}$ i) $x^2 - 3$
j) $x^2 - 6x + 9$ k) $4x^2 + 4x + 1$ l) $x^3 - x$
m) $25x^2 + 10x + 1$

4) Dados los siguientes conjuntos de números reales, expresarlos como intervalo y realizar las operaciones que se indican: $A \cup F$, $B \cap C$, F^C, $D - A$

$$A = \left\{ x \in \Re / |x-2| . (x^2 - x) < 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \Re / \left| \frac{x - \frac{5}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} \right| \geq 2^{-1} . \frac{1}{2} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \Re / \frac{x-1}{x^2 - 2} > 0 \right\}$$

$$D = \left\{ x \in \Re / \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \leq 0 \right\}$$

$$E = \left\{ x \in \Re / x^3 \leq 3x \right\}$$

$$F = \left\{ x \in \Re / \left| \frac{x-3}{x} \right| > 2 \right\}$$

5) Realizar las siguientes operaciones en R en forma exacta:

a) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) - \sqrt{2 + \sqrt{3}} . \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

b) $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{5^3}}$

c) $\sqrt{\dfrac{18}{4}} + 2\sqrt{\dfrac{8}{9}} + \sqrt{32} - \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$

d) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{3}} + \sqrt{27} + \dfrac{1}{5}\sqrt{75} - \dfrac{1}{3}\sqrt{12}$

6) Verificar las siguientes identidades $\forall a, b \in \Re / a > b > 0$

a) $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} . \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a - b}$

b) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\sqrt{ab}$

c) $\dfrac{(a-b)^2}{a+b-2\sqrt{ab}}=a+b+2\sqrt{ab}$

d) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

e) $\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}}.\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{2ab}}=a-b$

f) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{a^2-\sqrt{a^4-b^4}}{b^2}$

g) $\dfrac{ab}{\sqrt{b^3}-\sqrt{ab^2}}=\dfrac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{b-a}$

7) Resolver las siguientes ecuaciones

a) $x+2=\dfrac{4}{x-2}$

b) $\dfrac{7+x^2}{4}+\dfrac{1-x}{2}=(x+2)^2-3.\left(\dfrac{x^2}{4}+1\right)$

c) $\dfrac{(3x-2)^2}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{2}+8=-\dfrac{9}{4}x^2$

d) $\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-4}=3$

e) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$

Funciones. *Repaso de algunas definiciones*

- *Como ya sabemos, una **función f** de A en B es una asignación que le hace corresponder a cada elemento del conjunto A (llamémosle genéricamente ¨x¨) uno y sólo un elemento del conjunto B (llamémosle genéricamente ¨y¨) que es la imagen de x por f,*

Simbólicamente

$f: A \to B \,/\, y=f(x)$, *con las siguientes condiciones:*

1. *Todo elemento del conjunto de partida A debe tener imagen*
En símbolos:

$\forall x\in A\,,\ \exists y\in B \,/\, y=f(x)$

2. *La imagen de cada elemento $x \in A$ debe ser única.*
En símbolos:

$\forall x\in A:\ (x,y)\in f \wedge (x,z)\in f \Rightarrow y=z$

*A es el **Dominio** de la función* $D_f=\{x\in A \,/\, \exists y\in B \wedge (x,y)\in f\}$.

- *Recordemos que cuando f varía en los Reales, se denomina **Dominio Mayorante** al campo de existencia de la función en R. Es decir al conjunto de valores de x para los cuales la expresión f(x) existe como número real. El dominio mayorante es el conjunto que incluye a todos los conjuntos que pueden ser tomados como dominio para esa f.*

Por ejemplo si la función está dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$*, la expresión está definida para cualquier valor de x excepto para x=-2. Luego el dominio mayorante de la función será* $D_f = \Re - \{-2\}$.
Notemos que cualquier subconjunto de este conjunto puede ser tomado como dominio de f.

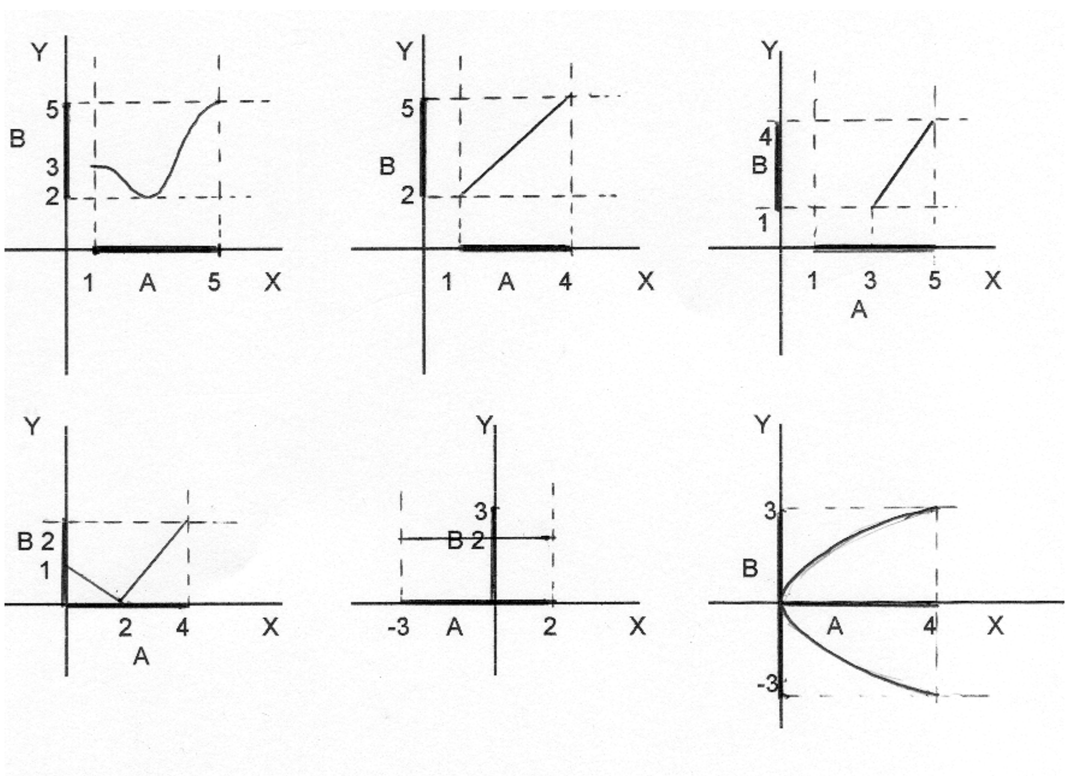
❖ *El conjunto formado por todos los elementos de B que son imagen de algún elemento del dominio se denomina **Conjunto Imagen o Recorrido** de f. En símbolos:*
$I_f = \{y \in B / \exists x \in A \wedge (x,y) \in f\}$

❖ *Se llama **imagen** de un elemento del dominio a un* $y_0 \in B / y_0 \in I_f$

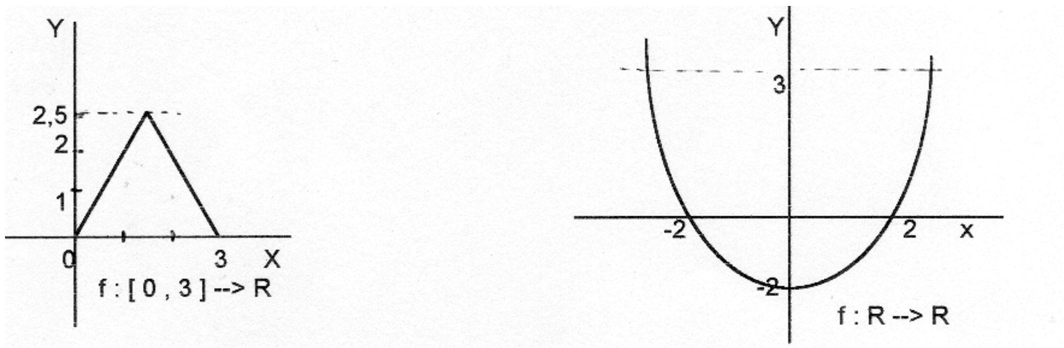
Diremos que $x_0 \in A$ *es una **preimagen** de un elemento de B si se verifica que* $\exists y_0 \in B / f(x_0) = y_0$

❖ *Se denomina **Gráfica de f** al conjunto de los pares (x,y) tales que "y" es la imágen de "x" a través de f, o sea, los pares de la forma (x, f(x))*
La gráfica de una función se puede expresar de distintas maneras: por enumeración de pares, mediante una tabla, en diagrama de flechas, en un gráfico cartesiano, etc. Obviamente, algunas de estas representaciones sólo son posibles cuando los conjuntos son finitos, por ejemplo, la enumeración de pares.

8] Indicar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones de A en B y cuáles no. Justificar la respuesta.
$A \subseteq \Re \quad B \subseteq \Re$



9) Indicar cuál es el conjunto imagen de f



10) $f : \Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = -2x - 1$ calcular el valor de x tal que
a) f(x)=2 b) f(x)=-1

11) Dada la función:
$f: \Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = -x^3 + x - 1$ calcular :f(0), f(-1), f(-2), f(0,5), f(-1/3)

12) Hallar dominio mayorante (máximo en sentido de inclusión) de las siguientes funciones y expresarlo como intervalo:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{|x+1| - 2}}$ b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2 - 9)(x+1)}$

c) $f(x)= \begin{cases} -\dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x(x^2 - 1)}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x^2 - 1}$ f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$

13) Las localidades A, B y C estan alineadas, B se encuentra entre A y C a 40 km de A.
Un tren parte de A hacia C con una velocidad constante de 90 km/h. Simultáneamente parte de B hacia C otro tren a velocidad constante de 60 km/h.

a) graficar la distancia hasta A en función del tiempo para ambos trenes en un mismo grafico.
b) En que momento y a que distancia de A se encuentran?

14) Un recipiente con agua que se encuentra a 30^{o} se pone a calentar de forma tal que la temperatura aumenta en forma constante hasta alcanzar el punto de ebullición (100^{o}) a los 5 minutos. Se retira y se deja a temperatura ambiente de 20^{o} tardando 20 minutos en llegar a la misma (y suponiendo que desciende en forma constante). A temperatura ambiente se mantiene el resto el tiempo.
a) Graficar la temperatura del agua en función del tiempo.
b) Cuál es la temperatura a los 3 minutos, 10 minutos y 40 minutos de comenzada la experiencia?

15) Pedro sale en bicicleta de su casa a las 12 del mediodía a velocidad constante de 20 km/h hasta la casa de su amigo que dista 50 km de su casa, al llegar, permanece allí por 2 hs y regresa a velocidad constante de 30 km/h

a) Graficar la función distancia (a la casa de Pedro) en función del tiempo.
b) Leer en el gráfico:
   b1) Momento en que se encuentra a 40 km de su casa
   b_2) Distancia a su casa a las 13 hs

Respuestas:

1) a) -2 a (1-a), b) b-1

2) a) $(x-2)^2$ b) $(2a-2)^2$ c) $\left(3+\frac{a}{3}\right)^2$

3) a) x(x+2) b) $x^2(x-1)$ c) (a+c) (x+b) d) (x-2) (x+a)
e) (x+1) (x-a) f) (x-a) (x+a) g) (2x-a) (2x+a) h) (ax-1/2) (ax+1/2)
i) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ j) $(x-3)^2$ k) $(2x+1)^2$
l) x(x-1)(x+1) m) $5x+1)^2$

4) A= (0,1) ; B= $(-\infty;\frac{3}{2}]\cup[\frac{7}{2};+\infty)$; C= $(-\sqrt{2};1)\cup(\sqrt{2};+\infty)$ D=[-2;0] – {-1}

$E=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[0;\sqrt{3}\right]$; $F=\left(-3;1\right)-\{0\}$

$A\cup F=\left(-3;1\right)$ - {0} ; $B\cap C=\left(-\sqrt{2};1\right)\cup\left(\sqrt{2};\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$

$F^C=\left(-\infty;-3\right]\cup\{0\}\cup\left[1;+\infty\right)$; $D-A=\left[-2;0\right]-\{-1\}$

5) a) $3-2\sqrt{6}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{35}{6}\sqrt{2}+1$ d) $-\frac{1}{2}+\frac{17}{6}\sqrt{3}$

7) a) $\pm\sqrt{8}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{7}{9}$ d) ± 2 e) $\frac{5}{3}$

8) a) si, b) si c) no d) si e) si f) no

9) a) [0; 2.5] b) $[-2, +\infty)$

10) a) $-\frac{3}{2}$ b) 0

11) f(0)=-1; f(-1)= -1; f(-2)= 5 ; f(0.5)= $-\frac{5}{8}$; $f(-\frac{1}{3})= -\frac{107}{27}$

12) a) [-3;3) b) R – {-3; -1; 3} c) $(-\infty;0)\cup(0;1]\cup(2;+\infty)$
d) $(1;+\infty)$ e) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[4;+\infty)$ f) (-2;1]

13) Se encuentran después de 1h 20 min y a una distancia de A de 120 km

14) A los 3 min: 72°, a los 10 minutos: 80°, a los 40 minutos: 20°

Unidad 1: Funciones polinómicas I. Caso particular: Función lineal

Llamamos ´polinomio¨ de grado n en x a la expresión:
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ en la cual $a_0, a_1, ..., a_n \in \Re$, $n \in N$

Ejercicios

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

a) x^3
b) $\sqrt{5+x^2}$
c) $\frac{x+1}{x}$
d) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}$
e) x
f) $\sqrt{x+2}$
g) (x-1)(x+3)
h) 0
i) 1
j) $\frac{1}{x}$
k) $3x^{-2}$

2) Ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la variable y determinar sus grados.

a) $\frac{1}{2} + x^4 - 2x^2$
b) -1+x
c) -3
d) $-\frac{3}{4}x^5$
e) $-\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$
f) $+\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$
g) $-\frac{x-1}{2} + \frac{2-x-x^2}{3}$

Función polinómica

Una función polinómica, es una función que asigna valores a través de un polinomio, es decir:
$f : \Re \to \Re / f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Se dice que la función es de grado n con $a_n \neq 0$ y $n \in N$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \Re$
Ejemplos: si n=1 $f(x) = a_1 x + a_0$ se denomina Función lineal
Si n=2 , $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se denomina Función cuadrática
Si n=3 , $f(x) = a_3 x^3 \; a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ Función cúbica

En esta unidad nos detendremos particularmente en la función lineal

Función lineal

Para evitar los subíndices, expresamos a la función lineal como: $f:\Re \to \Re / f(x) = mx + b$ donde m y b son números reales llamados pendiente y ordenada al origen respectivamente.
Los puntos (x,y) de la gráfica son tales que y=mx+b y están alineados. Se dice que y=mx+b es la ecuación de esta recta.

Casos particulares de función lineal:

a) **Función constante**: es aquella en la cual m=0, es decir f(x)=b. Asigna a todo valor de x del dominio, el numero b.
La gráfica es una recta paralela al eje x que pasa por el punto (0,b)
b) Si b=0 $\Rightarrow$ f(x)=mx. Los puntos de la gráfica en este caso conforman una recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0). Cuando m=1, f(x)=x, se denomina **función identidad** porque asigna a cada valor del dominio el mismo valor como imagen.

Ejercicios

3) a) Graficar la función identidad e indicar qué ángulo forma la recta con el semieje positivo de las x. Justificar.

b) Graficar $f:\Re \to \Re /$ a)f(x)=2x y f(x)=$\frac{2}{3}$x

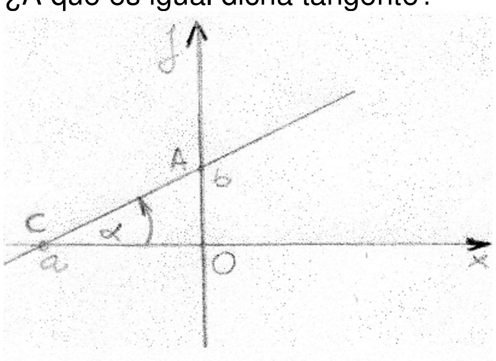
Calcular la tangente del ángulo determinado por cada una de las rectas y el semieje positivo de las x. ¿Qué observas?

c) Idem $f:\Re \to \Re /$ a)f(x)=-3x b)f(x)=$-\frac{1}{2}$x

Pendiente de una recta

Graficar: $f:\Re \to \Re / f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

Medir el ángulo determinado por el semieje positivo x y la recta.
Calcular la tangente de ese ángulo.
¿A qué es igual dicha tangente?



y=mx+b

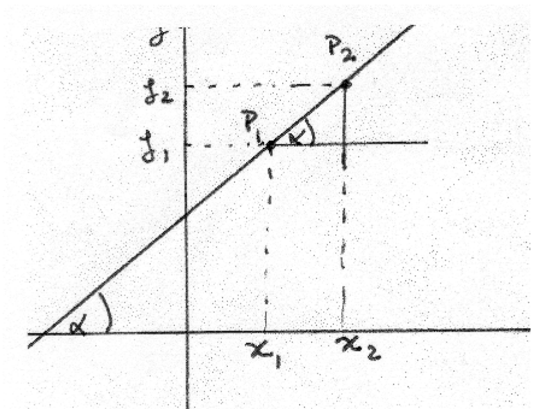
La recta forma con el eje x un ángulo α

A(0,b) $C = (a,0) = (-\frac{b}{m};0)$

Relación entre m y α:
En el triángulo rectángulo AOC es:

$$tg\alpha = \frac{|AO|}{|CO|} = \frac{b-0}{0-a} = \frac{b}{-a} = \frac{b}{-(-\frac{b}{m})} = m$$

Luego la pendiente nos da la tangente del ángulo α que forma la recta con el semieje positivo de las x medido en sentido contrario a las agujas del reloj.



$$P_2 \in r \Rightarrow y_2 = mx_2 + b$$

$$-$$

$$P_1 \in r \Rightarrow \underline{y_1 = mx_1 + b}$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \operatorname{tg}\alpha$$

Definimos: $\Delta y = y_2 - y_1$ como el incremento o variación de y.

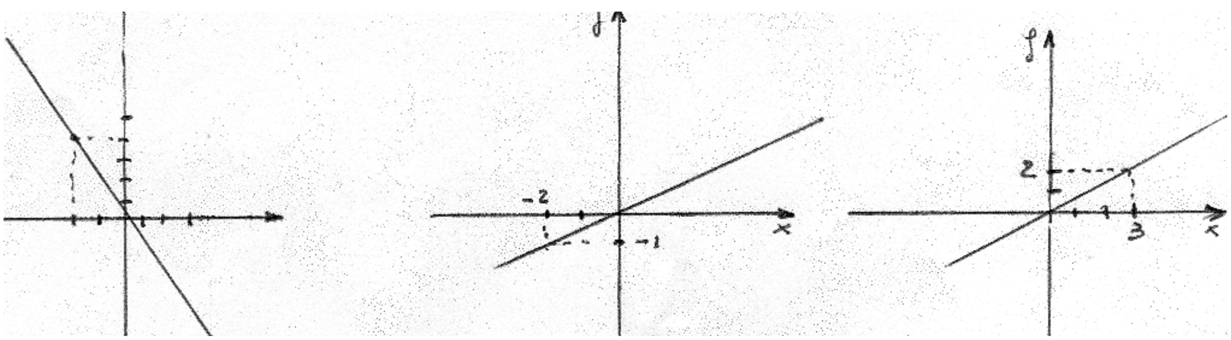
$\Delta x = x_2 - x_1$ como el incremento o variación de x.

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

¿Cuál es el rango de valores que puede tomar α ?

<u>Ejercicios</u>

4) Escribir la ecuación correspondiente a cada uno de los siguientes gráficos.



5) Representar las siguientes rectas, teniendo en cuenta su pendiente sin hacer tabla de valores: y=4x $y = \frac{3}{2}x$ $y = -\frac{5}{3}x$ y=-x

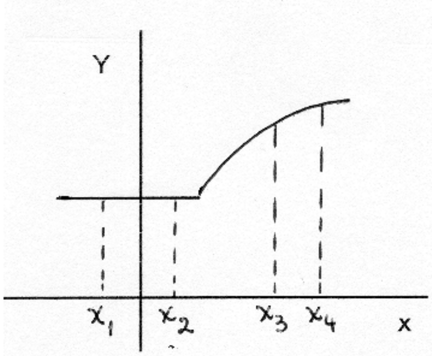
❖ Definimos en general: Funciones monótonas

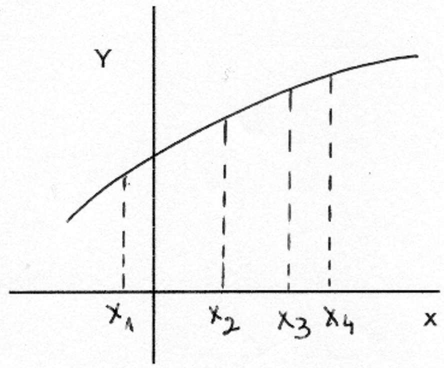
a)Función creciente:

f: A→B /y = f(x) es creciente en A $\Leftrightarrow \forall x_1 \in A$ y $\forall\ x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b) Función estrictamente creciente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

A se denomina **Intervalo de crecimiento** de f





función creciente función estrictamente creciente

Ejemplo:
demostramos que $f:\Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = x+1$ es estrictamente creciente en $\Re$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1+1) < (x_2+1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

c) Funciones decrecientes (estrictamente o no).

Las definiciones quedan como ejercicio para el alumno.

Las funciones crecientes y decrecientes en el sentido amplio o estricto, se denominan **funciones monótonas**.

6) Dada la función lineal general $f:\Re \rightarrow \Re / f(x) = mx+b$, analizar si:

a) f es una función monótona
b) En qué condiciones es una función estrictamente creciente
c) En qué condiciones es una función estrictamente decreciente

<u>Ecuación de una recta que pasa por $P(x_0,y_0)$ y tiene pendiente m</u>

$$\begin{array}{rl} & y = mx + b \\ P_0 \in r \Rightarrow & \underline{y_0 = mx_0 + b} \\ & y - y_0 = m(x - x_0) \end{array}$$

<u>Ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos</u>:

$P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$

Vimos anteriormente que su pendiente sería $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la ecuación de una recta que pasa por un punto $P_1(x_1,y_1)$ de pendiente m es:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Entonces:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ejercicios

7) Dada $f:\Re \to \Re / y = \frac{2}{5} + x$ se pide:

a) Hallar A= $\{x \in \Re / f(x) \geq 0\}$
b) Hallar B= $\{x \in \Re / -2 \leq f(x) < 3\}$
c) Hallar D= $\{f(x) \in \Re / x > 1\}$
d) Hallar E= $\{ f(x) \in \Re / 0 < x \leq 1{,}5\}$

8) Siendo f una función lineal de variable real se sabe f(5)=4 y f(-2)=5, hallar la ecuación de la recta correspondiente.

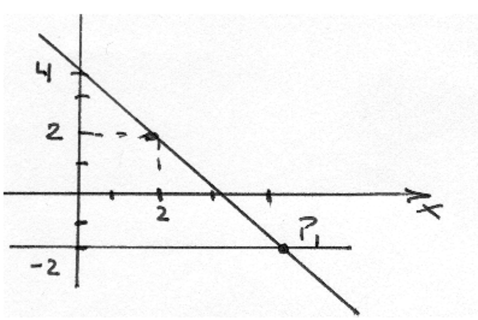
9) Hallar la ecuación de la recta que verifica:
a) Ordenada al origen igual a 7 y $\alpha = 45°$
b) Ordenada al origen igual a 7 y $\alpha = 120°$

10) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por P_0=(1,-9) y cumple la siguiente condición:
a) Tiene ángulo de inclinación $\alpha = 45°$
b) Tiene pendiente $\frac{1}{3}$
c) Tiene ordenada al origen 2
d) Pasa por el origen de coordenadas

11) Hallar f, sabiendo que es una función lineal de variable real que asigna a los valores del intervalo [1,3], el intervalo [2,5]. ¿Cuántas posibilidades hay?

12) Todas las rectas del plano representan funciones?

13)



a)Indicar si P, Q y R están alineados

P(3,2) Q$(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ R(1,0)

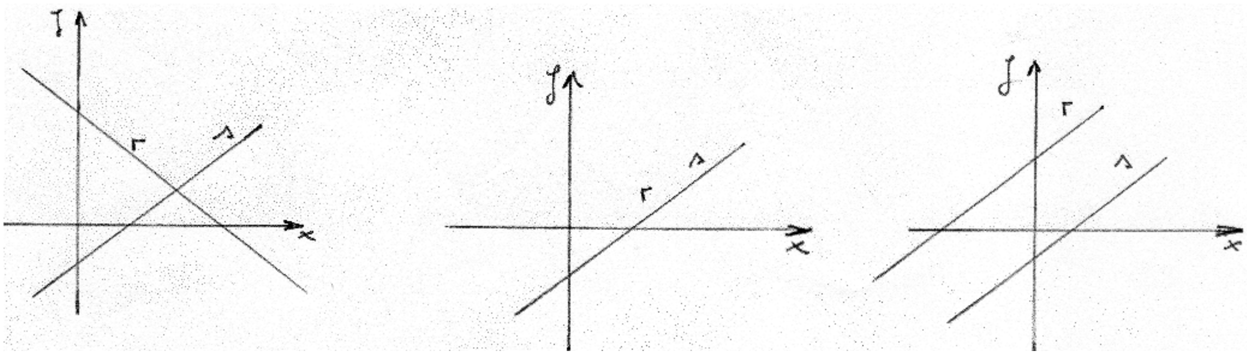
b)De acuerdo al gráfico, indicar coordenadas de P_1

14) Coordenadas del punto de intersección
Resolver este ejercicio gráfica y analíticamente.

a) $\begin{cases} 5x - 2y + 9 = 0 \\ 3x + 7 = 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3y + 6x = 2 \\ -2x = y - 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4y - 3x = 40/3 \\ 9/4x + 10 = 3y \end{cases}$

Intersección de rectas

Pueden presentarse los siguientes casos:



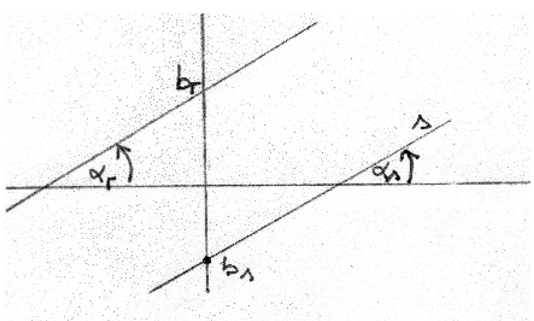
a) Hay un único punto de intersección. Se trata de un sistema <u>compatible determinado</u>.

b) Se obtienen dos rectas superpuestas y en consecuencia hay infinitos puntos de intersección. Se trata de un <u>sistema compatible indeterminado</u> (existen infinitas soluciones)

c) Se obtienen dos rectas paralelas no coincidentes y, por lo tanto, la intersección es vacía. Se trata de un <u>sistema incompatible</u> (no tiene solución). Clasifica los sistemas del ejercicio 14.

Paralelismo y perpendicularidad

a) Paralelismo



$r \rightarrow y = m_r x + b_r$

$s \rightarrow y = m_s x + b_s$

$r \| s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow tg\alpha_r = tg\alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$

(por ser $0° \leq |\alpha_r| < 180° \wedge 0° \leq |\alpha_s| < 180°$)

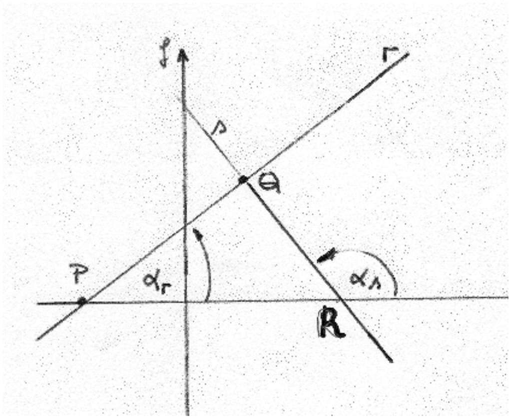
<u>Conclusión</u>:
Para que dos rectas sean **paralelas** las **pendientes** deben ser **iguales**.

Ejercicio

15) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(2,1)$ y es paralela a la recta determinada

por los puntos $P_1(1,-3)$ y $P_2(-3,0)$.

b) Perpendicularidad



Para que dos rectas sean **perpendiculares** la **pendiente** de una de ellas debe ser la **recíproca cambiada de signo** de la otra.

Queda la justificación para el alumno

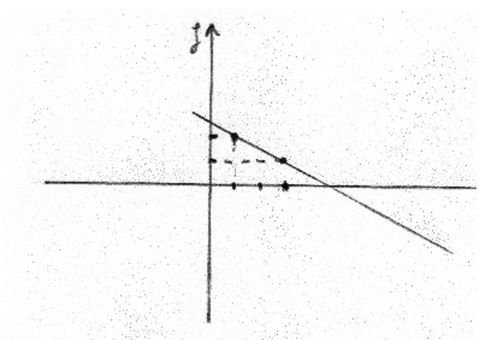
Analizar el caso especial de rectas paralelas a los ejes coordenados.

Ejercicios

16) Hallar la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es perpendic. a r: $P_0(-1,2)$ $r \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

17) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(-1,2)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $P_1(0,4)$ y $P_2(6,6)$.

18) Responder Vo F.



a) La ecuación de la recta del gráfico es $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (Considerando que las unidades marcadas representan 1, 2, 3)

b) $\begin{cases} r_1 \rightarrow y = x - 4 \\ r_2 \rightarrow y = -x + 4 \end{cases}$ $\qquad r_1 \perp r_2$

c) $\begin{cases} r_1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4 \\ r_2 \rightarrow y = x + \frac{9}{2} \end{cases}$ $\qquad r_1 \cap r_2 = \{(-1,3)\}$

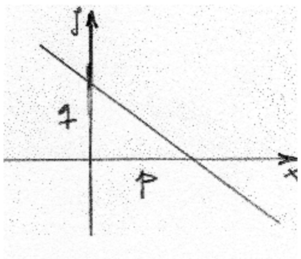
19) Hallar el área del triángulo determinado por la recta r y los ejes coordenados siendo r la recta que pasa por M=(4,-1) y es $\perp$ a $r_1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

20) Hallar h y k de manera tal que las rectas de ecuaciones:

$3y - 5x - 3 = 0 \qquad 2kx - y + h = 0$ sean

a) perpendiculares
b) paralelas, no coincidentes
c) coincidentes

Forma segmentaria de la ecuación de una recta



$$r \rightarrow ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

abscisa al origen: $-\frac{c}{a} = p$

ordenada al origen: $-\frac{c}{b} = q$ $\qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

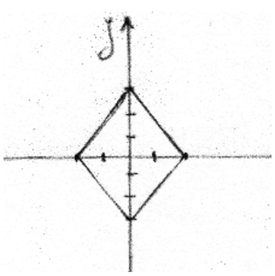
Ejercicios

21)Escribir la forma segmentaria de r y representar:

a) $r_1 \rightarrow 3x - 4y + 12 = 0$

b) $r_2 \rightarrow 2x - 4y - 4 = 0$

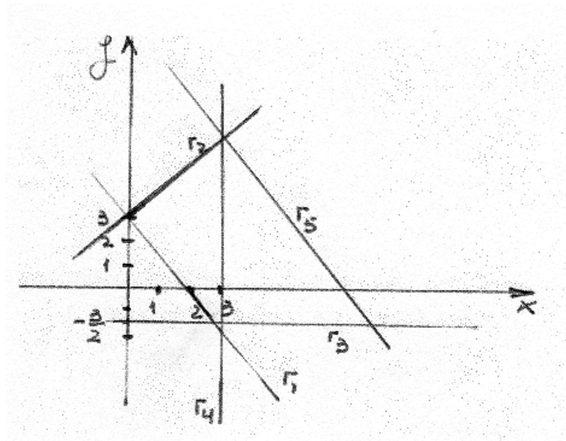
22) Escribir las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados y las diagonales del rombo.



(Considerando que las unidades marcadas representan 1, 2, 3, ...)

23) a) Completar la tabla teniendo en cuenta los datos de la figura

	Forma implícita ax+by+c=0	Forma explícita y=mx+b	Forma segmentaria
r_1			
r_2			
r_3			
r_4			
r_5			



siendo $r_{2\perp} r_1$ $\quad r_3 \,||\,$ eje x $\quad r_4 \,||\,$eje y $\quad r_5 \,||\, r_1$

b) Hallar coordenadas de los puntos de intersección

24) Determinar k tal que la recta de ecuación $\frac{x}{k}+\frac{3}{5}y-2k=0$ tenga abscisa al origen igual 3 $(k \neq 0)$.

25) Un estudio determinó que la altura de un árbol y la longitud de la sombra que produce (en una cierta hora del día) tienen una relación lineal.
Si el árbol mide 2 m, la longitud de su sombra será de 3 m. Si mide 9m, la longitud de su sombra será de 13,5 m.

a) ¿Cuál será la altura de un árbol que produce una sombra de 18 m?
b) Encontrar la función que relaciona las dos variables anteriores. Graficar.

26) Un resorte mide 7 cm cuando colgamos de él 10 g y mide 13 cm cuando colgamos 80 g.

a) Escribir la ecuación que relaciona la longitud L con el peso P.
b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso?
c) Teniendo en cuenta que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial. Cuál es el dominio de definición de la función L(P)?
d) ¿Cuál es la variación de longitud por cada 10g? Y por cada 5g? Y por cada gramo?

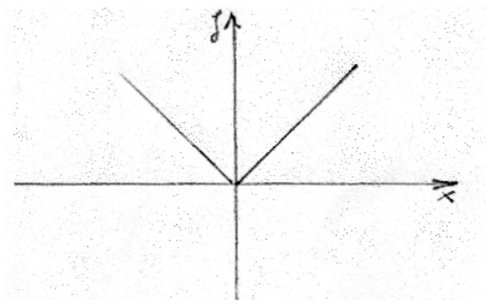
27) Un depósito se vacía mediante una bomba de agua. El volumen de agua que queda (en m^3) viene dado por $V(t)=8-\frac{1}{2}t$. ¿Cuántos m^3 de agua habrá al poner en funcionamiento la bomba? Cuál será la fórmula del volumen si el depósito se vacía con una bomba 4 veces más potente que la original?

Funciones lineales por tramos

28) Sea $f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} 3/2x+4 & \text{si } x \geq 3 \\ 2 \text{ si} & x<3 \end{cases}$. Se pide : Graficar, definir I_f

29) Sea $f:A \to \Re / f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } 2<x<5 \\ -4 & \text{si } x<2 \end{cases}$. Se pide: graficar, definir I_f

Como caso particular de función por tramos: Función módulo



Sea $f:\Re \to \Re / f(x)=|x|$

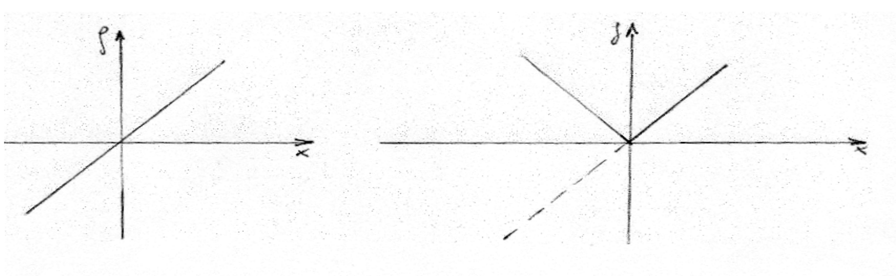
Por definición de módulo de un número real podemos escribir:

$$f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$$

30) Indicar conjunto imagen de la función anterior.

Nota: es interesante observar qué sucede con el gráfico de una función cuando le aplicamos el módulo.

Representamos y=x e $y=|x|$ La semirrecta que está incluida en el semiplano inferior en la



representación de y=x pasa a ocupar el semiplano superior en la representación de $y=|x|$. Son simétricas respecto de x.

31) Representar en un mismo gráfico y=x+1 e $y=|x+1|$ $\Re \to \Re$ sin utilizar tabla de valores para la segunda.

32) Expresar analíticamente las funciones correspondiente a los ejercicios 13 y 14 del TP0

<u>Unidad 2: Funciones polinómicas II. Caso particular: Función cuadrática</u>

Una función cuadrática es una función $f:\Re \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b, $c \in \Re$ y $a \neq 0$. Los puntos de la gráfica conforman una curva llamada parábola cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c$.

- **En general:** llamamos **CEROS** de una función a aquellos valores del dominio para los cuales se anula el valor de la función. Es decir, son las soluciones o **raíces** de la ecuación f(x)=0

En el caso de la función cuadrática, los ceros de f, son los x/ $ax^2 + bx + c = 0$.
¿Qué representan en el gráfico de la parábola los ceros de la f?

1) a) Dadas las siguientes funciones cuadráticas, hallar ceros (completar cuadrados para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ en los casos que sea necesario)
b) Graficar e indicar eje de simetría.
c) Indicar coordenadas del punto de intersección del gráfico con eje y.

1) $f(x)= x^2-6x+9$
2) $f(x)=3x^2 - 2$
3) $f(x)=x^2+4x+1$
4) $f(x)=3x^2-12x$
5) $f(x)=-x^2+2x-2$
6) $f(x)=4x^2-16x+12$
7) $f(x)=x^2+4x+5$
8) $f(x)=-x^2+x$

2) a)Verificar que toda ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = y$ se puede escribir de la forma: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, (forma canónica)
b) ¿Qué representa el punto(x_0,y_0) en el gráfico de la parábola?
c) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?

- <u>**Intervalos de postividad:**</u> Se denomina intervalo de positividad de una función f al intervalo en el cual se verifica que $\forall$x del intervalo f(x) >0.

En forma análoga de se define intervalo de negatividad de f.
Para el caso de la función cuadrática el intervalo de positividad, serán todos los valores de x/ $ax^2 + bx + c > 0$

3) En las funciones del ejercicio 1,
a) Escribir la ecuación de la parábola asociada a cada caso en forma canónica, expresar coordenadas del vértice y ecuación del eje de simetría
b)Indicar en todos los casos: imagen, intervalos en que $f(x) \geq 0$ (analíticamente)
c) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento

❖ Desplazamientos

Para completar sobre la guía:
I] Representemos f(x)=x^2 $f : \Re \to \Re$

Representemos ahora, sin usar tabla de valores: $g(x) = f(x)+1$, $h(x) = f(x)-2$ ambas $\Re \to \Re$

Relación entre la gráfica de f(x) y las de g(x) y h(x):
Si trasladamos la gráfica de …......... 1 unidad en el sentido positivo del eje y obtenemos la gráfica de ….............
La gráfica de h se obtiene trasladando ……….

II] Consideremos nuevamente $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2$ Sin usar tabla de valores representar:
$g(x) = f(x-1)$ h(x)= f(x + 1)
Expresar la fórmula de la función resultante.
Qué relación existe entre las gráficas de f, g y h?

En general:

Dada una función f y un número k>0

a) La gráfica de g(x)=f(x) $\pm k$ se obtiene desplazando la gráfica de f en la dirección del eje y.
   i) k unidades en el sentido positivo si g(x)=f(x)+k
   ii) k unidades en el sentido negativo si g(x)=f(x)-k

b) La gráfica de $h(x) = f(x \pm k)$ se obtiene desplazando la gráfica de f en la dirección del eje x.
   i) k unidades en sentido positivo si h(x)=f(x-k)
   ii) k unidades en sentido negativo si h(x)=f(x+k)

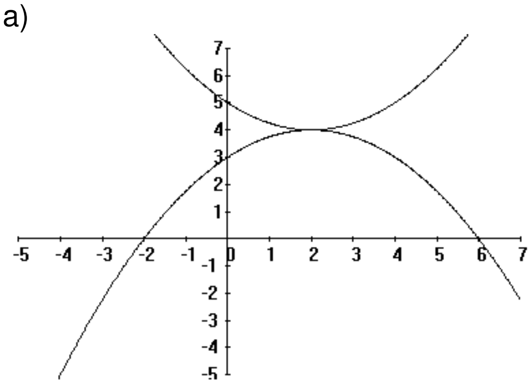
En el caso particular de la función cuadrática, podemos representar una parábola cualquiera expresada en forma canónica
$y=a(x-x_0)^2+y_0$ mediante desplazamientos de $y=ax^2$.
Ejemplo:
$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2.2x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$
La gráfica es una parábola que se obtiene desplazando la gráfica de $y=x^2$ 2 unidades en el sentido positivo de x y 1 unidad en el sentido negativo de y.

Ejercicios

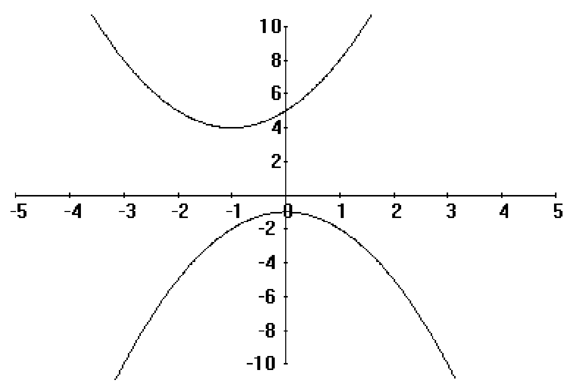
4) Dadas las parábolas $p_2 \rightarrow y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

$$p_1 \rightarrow y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

donde $|a_1| = |a_2|$ hallar las ecuaciones de p_1 y p_2 teniendo en cuenta en cada caso los datos que figuran en las gráficas.
a)



b)



5) a) Dada la parábola $p_1 \rightarrow y = a_1(x-2)^2$ hallar la ecuación de la parábola p_2 que pasa por el punto Q=(0,5) y tiene el mismo vértice que P_1.
¿Cuál es el valor de a_1 si $a_2=2\,a_1$?
b) Dar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos: A(0,6) B(4,-10) C(2,6)
Determinar los ceros y el vértice. Graficarla .Determinar su imagen.Decir en qué intervalo es positiva y decreciente simultáneamente y en cuál es negativa y creciente.

Fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado

Deduciremos una fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado o ceros de una función cuadrática en forma más práctica que completando cuadrados.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{(ecuación de segundo grado)}$$

dividimos por a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

completando cuadrados:

$$\underbrace{x^2 + 2.\frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{(x+\frac{b}{2a})^2} \underbrace{- \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}_{-\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente de la ecuación de 2do. Grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vemos que para hallar esta fórmula, simplemente se han resuelto en términos generales los mismos cálculos que hemos realizado para los casos particulares planteados en el ejercicio 1 con valores numéricos, con la ventaja de haber obtenido una expresión general en función de los parámetros a, b y c.

Ejercicios:

6) De todos los rectángulos de perímetro 8 hallar las dimensiones del que tiene área máxima.

7) Hallar dos números de suma 36 y de producto máximo.

8) Una compañía de TV por cable de acuerdo con un estudio de mercado sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de x pesos mensuales viene dada por la función (x)=500(300-x).x (0<x<300)
Hallar cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo
.
9) En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados n, a los t años está dado por: $n(t) = -t^2 + 21t + 100$ (t>0)

a) Calcular los valores de t para los cuales n=154.
b) ¿Se extingue la población? Si fuera así, ¿cuándo ocurre?

10) Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo, coronado por un semicírculo, cuyo perímetro total sea de 12m. Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible. Sugerencia: utilizar como variable independiente el radio del semicírculo.

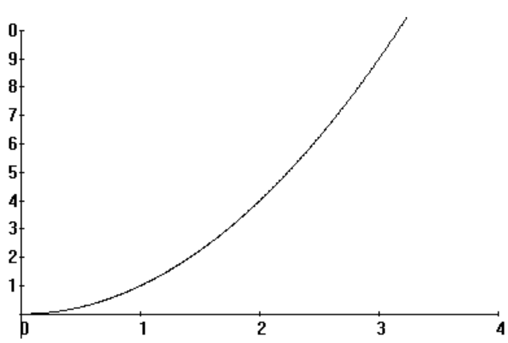
Leyes del movimiento rectilíneo uniformemente variado

$e = \frac{1}{2}at^2$ uniformemente acelerado sin velocidad inicial

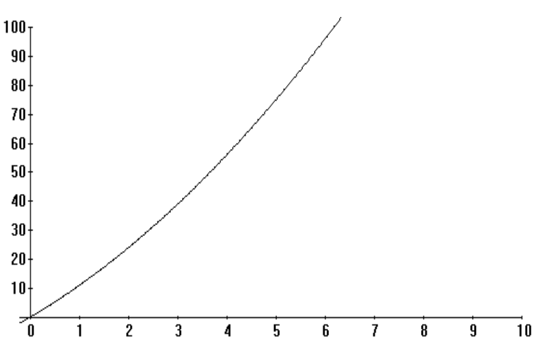
$e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ uniformemente acelerado con velocidad inicial.

$e = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ uniformemente retardado con velocidad inicial.

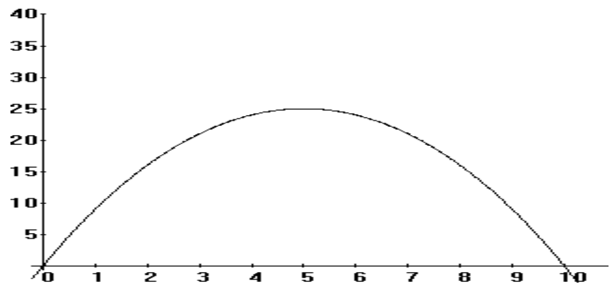
Gráficos



$e = t^2$ $a = 2\frac{m}{s^2}$



$e = 10t + t^2$ $v_0 = 10\frac{m}{s}$ $a = 2\frac{m}{s^2}$



$$e = 10t - t^2$$

$$v_0 = 10\frac{m}{s}$$

$$a = -2\frac{m}{s^2}$$

Ejercicios

11) En un movimiento rectilíneo uniformemente variado, donde:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$v_0 = -3\frac{m}{seg}$$

$$e_0 = 6m$$

$$a = 2\frac{m}{seg^2}$$

Se pide:

a) Obtener e = f(t) v = g(t) a = h(t)

b) Graficar estas tres funciones en distintos sistemas de ejes coordenados.

c) ¿Qué pasa en t=1,5?
En el intervalo [0;1,5) ¿cómo es el movimiento?
En el intervalo (1,5;5] ¿cómo es el movimiento?

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa v = g(t)?
¿Qué representa físicamente dicha pendiente?

12) a) Representar $f : \Re_0^+ \to \Re_0^+ / e = f(t) = -t^2 + 10t$

b) ¿Para qué tiempo se obtiene un "e" máximo?

13) Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad de 120 m/s. Su altura sobre el suelo t segundos después del disparo está dada por $s(t)=-4{,}9t^2+120t$.

a) Para qué valores de t el proyectil asciende y para cuáles desciende.

b) Hallar el instante en que el proyectil alcanza su altura máxima y calcularla.

c) Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.

d) Hallar el instante en que el proyectil alcanza los 50 m de altura.

Discriminante de la ecuación de 2dogrado

En la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ cuya fórmula resolvente es:

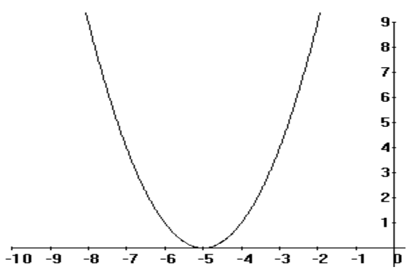
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Llamamos discriminante a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ .Se dan las siguientes situaciones posibles:

a) $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$ raíces reales iguales (raíz doble)
b) $\Delta > 0$ $x_1 \neq x_2$ raíces reales y distintas (raíces simples)
c) $\Delta < 0$ no existen raíces en el campo real

Ejemplo: Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones.

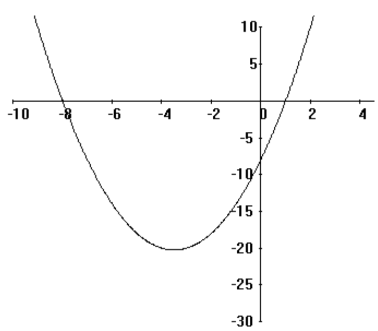
a)



$$x^2 + 10x + 25 = 0$$
$$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = -5. \ \textit{Raiz doble}$$
$$y = x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \quad V(-5,0)$$

El eje x es tangente a la parábola.

b)

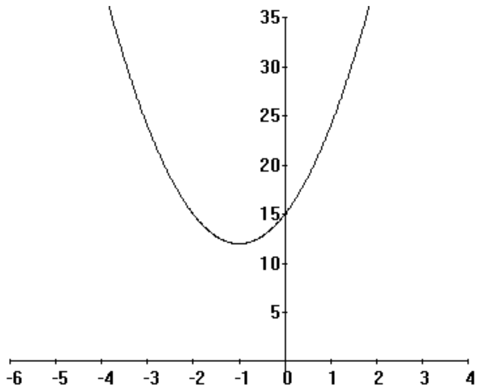


$$x^2 + 7x - 8 = 0$$
$$\Delta > 0 \quad x_1 = -8 \quad x_2 = 1 \quad x_1 \neq x_2 \ \textit{Raices simples}$$
$$y = x^2 + 7x - 8 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$$
$$V\left(-\frac{7}{2}, -\frac{81}{4}\right)$$

El eje x corta a la parábola en dos puntos.

- -

c)



$$3x^2+6x+15=0$$
$$\Delta<0 \quad \text{sin} \quad raíces \quad reales$$
$$y=3x^2+6x+15=3(x+1)^2+12$$
$$V(-1{,}12)$$

El eje x no corta a la parábola.

Ejercicios

14) Indicar Vo F justificando.
Sean x_1 y x_2 raíces de un ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ y Δ su discriminante.

Si $x_1,x_2 \in \Re \Rightarrow \Delta \geq 0$
Si $x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0$
Si $a<0 \Rightarrow \Delta>0$
Si $b^2>4ac \Rightarrow x_1 \neq x_2$
Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow b^2>4ac$

15) Siendo $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ obtener x_1+x_2 y $x_1.x_2$

16) Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces son: $x_1=5$ y $x_2=-7$

17) Reconstruir la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ sabiendo que sus raíces son:
a) $x_1=2 \quad x_2=8$ y a=2
b) $x_1=1-\sqrt{3} \quad x_2=1+\sqrt{3}$ y $a=-\dfrac{1}{2}$

18) Calcular en cada caso el valor que debe tener m para que la ecuación:
a) $2x^2+\dfrac{1}{2}x+m=0$ tenga raíz doble
b) $x^2+x+m=1$ tenga una raíz nula
c) $x^2-8x+m=0$ tenga una raíz igual al triplo de la otra

19) Hallar k para que la ecuación tenga raíz doble

a) $2x^2-(k-1)x=-\frac{1}{2}$

b) $x^2+2(k-1)x+4k=0$

20) Hallar k para que la suma de las raíces sea igual al producto.

a) $x^2-(2k-3)x+k=0$

b) $2x^2+(k+1)x+3k-5=0$

21) Hallar k para que $x_1=0$

a) $5x^2-5kx+4k-1=0$

b) $x^2+3kx-k+1=0$

22) Hallar k sabiendo que una raíz es 3 veces la otra: $x^2+8x+k=0$

Factorización del trinomio de segundo grado

$$y=ax^2+bx+c$$

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

pero: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ y $x_1.x_2=\frac{c}{a}$ reemplazando:

$$y=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2\right)$$
$$y=a\left(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2\right)$$
$$y=a\left(x(x-x_2)-x_1(x-x_2)\right)$$
$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Ejercicios

23) Factorizar los trinomios:

a) $2x^2-3x-2$

b) $x^2+4x-45$

c) $4x^2-3$

d) $3x^2+2x-1$

e) $-2x^2+2x+180$

24) Resolver gráficamente las inecuaciones:

a) $y>2x^2-3x-2$

b) $y\le x^2+4x-45$

c) $y\ge 4x^2-3$

d) $y<3x^2+2x-1$

e) $y\le -2x^2+2x+180$

25) Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas

a) $4x^4-13x^2+3=0$
b) $4x^4-17x^2+4=0$
c) $4x^4-37x^2+9=0$
d) $4(x^2-1)^2+3x^2-3=0$
e) $(x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$

Recta secante, recta tangente o exterior a una parábola

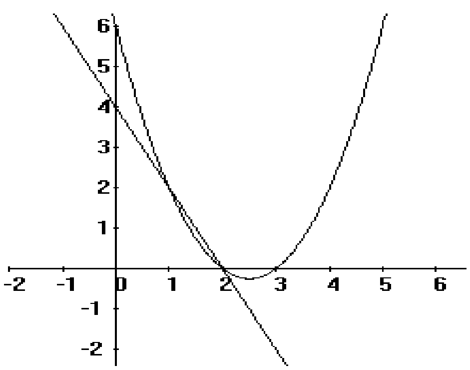
Resolvamos primero gráfica y luego analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-5x+6=y \rightarrow \text{parábola} \\ 2x+y=4 \rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

a) Gráficamente

$$y=x^2-\underbrace{5}_{2.\frac{5}{2}}x+6 \qquad y=\underbrace{x^2-2.\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}}_{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}-\frac{25}{4}+6$$

$$y=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4} \qquad V\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$$



Representamos la parábola
Representamos la recta
Las coordenadas de los puntos A(2,0) y B(1,2) resuelven el sistema.
b)Analíticamente:
Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y=x^2-5x+6 \\ y=-2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+4=x^2-5x+6$$

$$x^2-5x+2x+6-4=0$$

$$x^2-3x+2=0\,*$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$$

x=2 o x=1 , y=0 o y=2 , A(2,0) B(1,2)

Obtuvimos 2 puntos. Observemos la ecuación $*$. Al resolverla el discriminante es mayor que cero por eso encontramos 2 valores distintos para x. Es decir, existen dos puntos de intersección entre la recta y la parábola. La recta es **secante** a la parábola.

Cómo interpretarías gráficamente que el radicando hubiese sido:
a) nulo? (en este caso, la recta es **tangente** a la parábola)
b) negativo? (en este caso, la recta es **exterior** a la parábola)

Ejercicios

26) Resolver analítica y gráficamente:

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -2x^2 + 4x + 6 \\ y = -6x - 6 \end{cases}$

27) Dada la parábola $y=x^2-5x+6$, hallar la recta de la forma y=mx+b tal que sea tangente a dicha la parábola en el punto (1,2) (**"punto de tangencia")**.
¿Existe otra recta que tenga un solo punto en común con la parábola en el punto (1,2) y no sea tangente? Indicar la ecuación. Graficar.

28) Sea $y=x^2-2x-1$. Determinar m para que la recta y=mx-2 sea tangente a la parábola. Interpretar gráficamente e indicar punto de tangencia.

29) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = mx - 1 \end{cases}$
indicar para qué valores de m la recta resulta secante a la parábola

30) Dada la parábola $y = 3x^2 - kx - 1$ y la recta y=kx-2 determinar qué condición debe cumplir k para que:
a) La recta sea tangente a la parábola. Indicar punto de tangencia
b) La recta no corte a la parábola

31) Dada $y = x^2 - 2x$ se pide
a) Ecuación de la secante que pasa por los puntos de la parábola de abscisas: $x_1=3$ $x_2=4$.
b) Ecuación de la tangente en el punto correspondiente a $x_1=3$.

32) Hallar k para que la recta y=2x+k sea tangente a la parábola $y=2x^2-2x$.
Gráficos correspondientes.

Ejercicios optativos:

34)Sea $f:\Re \to \Re$ i) Graficar ii) Conjunto imagen

a) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right|$ b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si} \quad |x| \le 2 \\ -3 & \text{si} \quad x < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

35) Considerando las funciones del ejercicio 11:
a) En el gráfico que representa e = f(t) trazamos la recta que pasa por (2,4) y tiene pendiente igual a la velocidad para $t_1=2$.
¿Cómo resulta esta recta con respecto a la parábola?
b) Trazar en el gráfico que representa e = f(t) la recta tangente a la parábola en $t_0=1,5$
¿Cuál es la pendiente de esta recta y qué representa dicha pendiente?

Unidad 3: Funciones polinómicas III. Funciones polinómicas en general. Polinomios.

En la Unidad 1 ya hemos mencionado que la expresión:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $n \in N, a_0, a_1, ..., a_n \in \Re$ se denomina <u>Polinomio</u> de grado n
Y la función $f: \Re \to \Re / f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ se denomina <u>función polinómica</u> de grado n.
Las funciones lineal y cuadrática que hemos estudiado en las unidades anteriores son casos particulares de ésta cuando n es igual a 1 o 2 respectivamente.
En esta unidad trabajaremos en general las funciones polinómicas de cualquier grado.

<u>Ejercicios</u>

1) a) Graficar $f: \Re \to \Re / f(x) = x^3$
   b) Graficar $g: \Re \to \Re / g(x) = (x-2)^3 + 1$ desplazando la gráfica anterior.

2) Indicar si es V o F según corresponda:
   a) 2 es un cero de $f(x)=x^2+4$
   b) -2 es un cero de $f(x)=x^2+4$
   c) -1 es un cero de $f(x)=x^3+1$
   d) -3 es un cero de $f(x)=x^3+5/2x^2-3/2x$

❖ **Sobre los ceros (o raíces) de una función polinómica:**

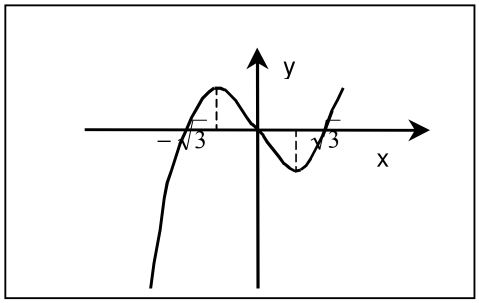
Los ceros de una función polinómica son las raíces de la ecuación:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$.
Si esta ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, <u>simple o múltiple de orden impar,</u> la gráfica de f atraviesa al eje x en x_0.
Si la ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, <u>múltiple de orden par,</u> la gráfica de f no atraviesa al eje x en x_0.
Llamamos **intervalo de positividad** de una función al subconjunto del dominio en el cual f es positiva, es decir $C^+(f) = \{x \in D_f \,/\, f(x) > 0\}$
Análogamente, **intervalo de negatividad** de f: $C^-(f) = \{x \in D_f \,/\, f(x) < 0\}$

Ejemplo:
Dada la función polinómica: $f(x) = x^3 - 3x$ deseamos conocer los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores positivos o negativos.
$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$
Ceros: x=0 x=$\sqrt{3}$ x=$-\sqrt{3}$
Son tres ceros simples $\Rightarrow$ la gráfica de f atraviesa al eje x en cada uno de ellos.

Completar la tabla

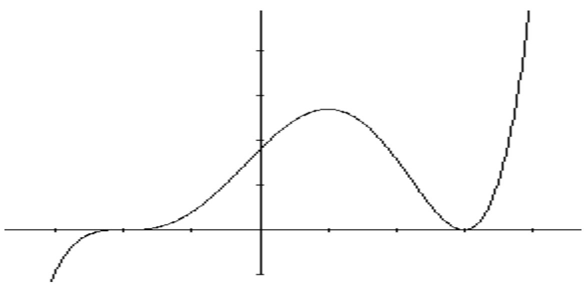
	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f(x)		0		0		0	

Si además de esto pudiéramos encontrar los máximos y mínimos podríamos dibujarla. (la función polinómica es continua)



Ejercicios

3)En el siguiente gráfico, indica en qué punto la función tiene un cero de orden impar y en qué punto, un cero de orden par.

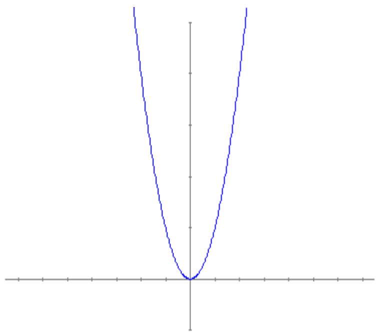


4) Encontrar los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores negativos o positivos, gráfica aproximada: $f(x)=x^3-3x^2$.

❖ Funciones pares y funciones impares

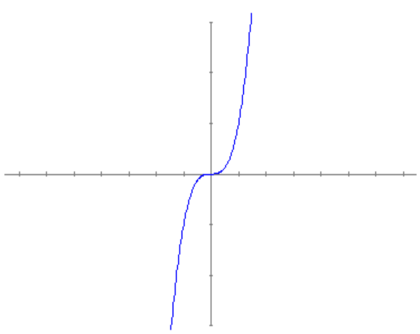
En algunos casos puede facilitarse el trazado el gráfico cartesiano de una función, teniendo en cuenta las condiciones de simetría que se pueden presentar:

a) Se dice que la función f es par $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$, es decir elementos simétricos del dominio tienen la misma imagen.
Ejemplo $f : \Re \to \Re \, / \, f(x) = x^2$



En este caso hay simetría respecto del eje de ordenadas (Simetría axial)

b) Se dice que la función f es impar $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$ ó $-f(x) = f(-x)$. Es decir, elementos simétricos del dominio tienen imágenes simétricas
Ejemplo $f : \Re \to \Re \, / \, f(x) = x^3$



En este caso hay simetría respecto del origen de coordenadas (Simetría central)
Para analizar si una función es par o impar su dominio debe ser un intervalo simétrico respecto del origen.

5) Dadas las siguientes funciones definidas de R en R, hallar ceros, intervalos de positividad, estudiar paridad. Gráficar. Indicar conjunto imagen:

a) $f(x)=x^3+2$
b) $f(x)=(x+2)^3$
c) $f(x)=(x-1)^3+2$
d) $f(x)=-x^3$
e) $f(x)=2x^3$
f) $f(x)=x^4$
g) $f(x)=-x^4+3$

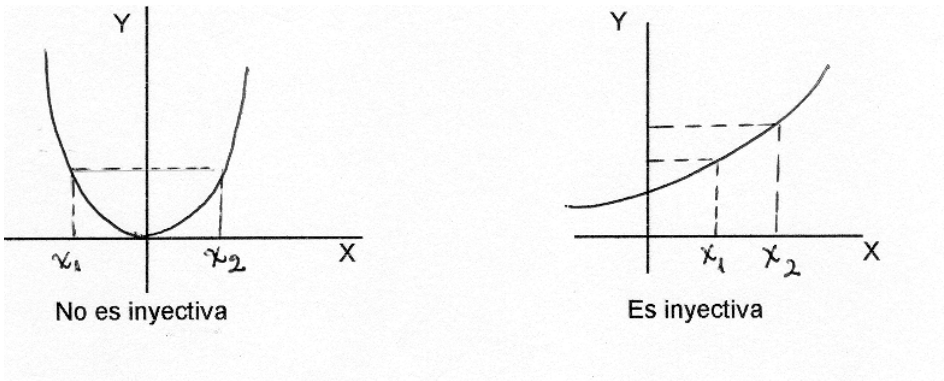
❖ Clasificación de Funciones

Función inyectiva: Una función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada B.
En símbolos:

$$\forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\text{o bien, } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede interceptar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del conjunto imagen puede ser imagen de más de un elemento del dominio.
Nótese que f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f es estrictamente creciente (o estrict. decreciente).



Función sobreyectiva: Una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen preimagen en el dominio A. Dicho con otras palabras el conjunto B y el conjunto imagen de f deben coincidir.

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \,/\, y = f(x)$$

Función biyectiva:

Una función es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

6) Sea la función cuya fórmula es $f(x) = x^2 - 4$.
a) Graficar.
b)Unir con flechas según corresponda:

si $f: \Re \rightarrow \Re$ f no es inyectiva ni sobreyectiva

si $f: \Re_0^+ \rightarrow \Re$ f no es función

si $f: \Re \rightarrow \Re_0^+$ f no es inyectiva pero es sobreyectiva

f es inyectiva pero no es sobreyectiva

c)Indicar un par de conjuntos A y B para que: $f: A \rightarrow B \,/\, f(x) = x^2 - 4$ sea función biyectiva.

7) Algunos de los gráficos del ejercicio 5 del TP0 corresponden a funciones de A en B. Clasificar dichas funciones.

8) Dados A={1, 2, 3} y B={3,7}

a) Definir, si es posible, una $f: A \to B$ que sea:

a.1) Sobreyectiva

a.2) Inyectiva

b) Se puede definir en estos conjuntos una función biyectiva? Explicar la respuesta

c) ¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos para que se pueda definir una función biyectiva entre ambos?

❖ **Función Inversa**

Se denomina **relación inversa** de una función f definida de A en B, a la que se obtiene de invertir los pares de f y se denomina f^{-1}

Es decir dada f definida de A en B, cuya gráfica está constituída por los pares (a,b), la relación inversa de f (f^{-1}) está constituída por los pares (b,a). Esta relación queda definida de B en A y no siempre es función en dichos conjuntos.

Por ejemplo: Si A={1, 2, 3} y B={3,7} y $f: A \to B$ / f= {(1,3), (2,3), (3,7)}, su relacion inversa $f^{-1}: B \to A$, f^{-1}= {(3,1), (3,2), (7,3)} No es función de B en A.

Qué condiciones debe cumplir una función $f: A \to B$ para que su relación inversa sea función de B en A?

Si la función admite función inversa y existe una expresión analítica a través de una fórmula y=f(x), para hallar la expresión analítica de la inversa cambiamos x por y, e y por x (es decir invertimos los pares), y despejamos la variable ¨y¨, si es posible.

Ejercicios

9) Dada la función f:$\Re_0^+ \to [2,+\infty) / f(x) = x^2 + 2$. Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

10) $f: \Re \to \Re / f(x) = x^3$. Clasificarla y hallar, si existe, su inversa. Representar.

Los gráficos de funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, o sea la recta y=x siempre que la escala utilizada en ambos ejes sea la misma.

11) Clasificar las funciones del ejercicio 5 cuando están definidas de R en R.
Indicar, cuando sea necesario, restricciones en los conjuntos para que sean biyectivas.
En esos conjuntos, definir las funciones inversas.

Polinomios. Operatoria

Igualdad de polinomios:

12) Determinar a,b y c (números reales) tales que los siguientes polinomios sean iguales:
a) $p(x)= a(3x-5)+b(2x-1)+cx^2$
$q(x)=6-5x$
b) $p(x)=a(2x+1)+(bx+c)(2x-1)$
$q(x) =(x+1)(4x+3)$

Nota: la igualdad de polinomios significa que son del mismo grado y PARA TODO VALOR DE X se verifica que p(x)=q(x). Esto significa la igualdad de las expresiones algebraicas.

Notemos la diferencia con la resolución de ecuaciones. En una ecuación, también se plantea una igualdad, pero esa igualdad se verifica sólo para algunos valores que son sus soluciones o raíces.
Por ejemplo, cuando se pide resolver la ecuación $7(3x-5)+2(2x-1)+3x^2=6-5x$ se pide que se hallen, si existen, el o los valores de x que satisfacen esta igualdad, que obviamente NO se verifica para todo x

Operaciones con polinomios

13) Dados los polinomios:

$p(x)=\frac{1}{2}+x^4-2x^2$

$r(x)=-1+x$

$s(x)=-3$

$t(x)=-\frac{3}{4}x^5$

$q(x)=-\sqrt{3}+\sqrt{2}x^2$

$v(x)=+\sqrt{3}+\sqrt{2}x^2$

$u(x)=-\frac{x-1}{2}+\frac{2-x-x^2}{3}$

Hallar
a) $r(x)-2p(x)$ b) $q(x).v(x)$ c) $q(x)-v(x)$
d) $p(0)=$, $p(\sqrt{2})=$, $|s(0)|=$, $t(-1)=$, $q(-1)+p(-2)=$

14) Sean $a(x)=-\frac{1}{2}x^2$ $b(x)=4x$ $c(x)=2x^3-x^2+1$. Hallar las raíces o ceros del polinomio: $p(x)=a(x).b(x)+c(x)$

15) Dados $p(x)=-x+1$ $q(x)=2x$. Hallar $p^2(x)+q(x)$

División de polinomios

Dados p(x) y q(x) dos polinomios, $q(x) \neq 0$ y $gr[p(x)] \geq gr[q(x)] \Rightarrow$ existen y son únicos c(x) y r(x) tales que: $p(x) = q(x).c(x) + r(x)$, siendo

p(x) el dividendo, q(x) el divisor, c(x) el cociente y r(x) el resto, verificandose que gr r(x)<gr q(x) ó r(x)=0.

Ejemplo: Sean $p(x)=x^4-2x^3-2x^2-3$ y $q(x)=x^2-2x+1$
Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de x y el dividendo debe completarse.

$$\begin{array}{r|l} x^4-2x^3-2x^2+0x-3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -x^4+2x^3-x^2 \quad\quad\quad & x^2-3 \\ \hline -3x^2+0x-3 & \\ 3x^2-6x+3 & \\ \hline -6x \quad\quad & \end{array}$$

Ejercicios

16) Dividir a(x) y b(x)

a) $a(x) = 3x^3 - 2x^5 - 2x^2 - 2x + 5$
$b(x) = x^3 - x + 2$

b) $a(x) = 6x^4 - x^2 + 1$
$b(x) = 3x^2 - x$

c) $a(x) = x^4 + c^2x^2 + c^4$ c es constante
$b(x) = x^2 + cx + c^2$

d) $a(x) = x^3 - c^3$
$b(x) = x + 2c$

e) $a(x) = x^4 - c^4$
$b(x) = x^2 + c^2$

f) $a(x) = -\frac{1}{3}x^5$
$b(x) = x^2 - x$

g) $a(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$
$b(x) = -x + 1$

h) $a(x) = cx + 2c^2 - 1 - 2cx^3 - (2 + c^2)x^2$
$b(x) = 2x + c$

Regla de Ruffini

Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio por otro que guarda la forma: x+a o x-a

Ejemplos:

I] Hallar el cociente y el resto de la división

$(-6x^4+2x^3-x^2-x+2):(x+1)$

La disposición práctica es la siguiente:

		-6	2	-1	-1	2
			coeficientes del dividendo			
opuesto del termino ind. del div.	-1		6	-8	9	-8
		-6	8	-9	8	-6
			coeficientes del cociente			resto

$c(x)=-6x^3+8x^2-9x+8 \quad r(x)=-6$

II] $(7x^4+1-2x^2):(x-3)$

	7	0	-2	0	1
3		21	63	183	549
	7	21	61	183	550

$c(x)=7x^3+21x^2+61x+183 \quad r(x)=550$

Notas:

a) En todos los casos de división entre un polinomio p(x) y un binomio de la forma x+a o x-a el resto es una constante. Justificar.

b) Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es divisible por el divisor

Ejemplos:

I] $(x^2-9):(x-3)$

$c(x)=x+3 \quad r(x)=0$

$x^2-9=(x-3)(x+3)$ hemos factorizado el dividendo

II] Polinomios ya factorizados:

$y=x^2(x-1)$ es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son $x_1=0$ (doble) y $x_2=1$ (simple)

$y=2x(x-1)^2(x+2)^3$ es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son $x_1=0$ (simple) $x_2=1$ (doble) y $x_3=-2$ (triple)

$y=x(x+1)(x^2+1)$ es una función polinómica de grado 4. Tiene solo 2 ceros reales x=0 y x=-1

Teorema del resto

El resto de la división p(x) : (x+a) con a real es r=p(-a)

Lo demostraremos:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x+a \\ \hline r & q(X) \end{array} \qquad p(x)=(x+a).q(x)+r$$

$p(-a)=(-a+a)q(a)+r=r$

Ejemplo: Siendo p(x)=x^3+kx^2-kx-9 determinar k para que –3 sea raíz de p(x)
p(-3)=0=$(-3)^3$+k$(-3)^2$-k(-3)-9   k=3

O sea p(x)=x^3+3x^2-3x-9 es divisible por (x+3)

Podría factorizarlo:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -3 & -9 \\ -3 & & -3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

p(x)=(x+3)(x^2-3)

Ejercicios

17) Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre a(x) y b(x):

a) $a(x) = x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 1 \quad b(x) = x - 2$

b) $a(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + x - 1 \quad b(x) = x + 2$

c) $a(x) = x^3 + m^3 \quad b(x) = x + 2$

d) $a(x) = 16x^4 + 1 \quad b(x) = x + 1$

e) $a(x) = -x + 2 - x^2 + x^5 \quad b(x) = x - \dfrac{1}{2}$

f) $a(x) = mx^4 - m^5 \quad b(x) = x - m$

g) $a(x) = (x-3)^2 - 2(x+1) \quad b(x) = 2x - (x-1)$

h) $a(x) = (x^2 - m)(x^2 + m) \quad b(x) = (x+m)(x-m) - x(x-1)$

18) Calcular directamente los restos de las divisiones del ejercicio anterior.

19) Calcular m para que a(x) sea divisible por b(x)

a) $a(x) = x^4 - mx^2 + 1$
$b(x) = x + 1$

b) $a(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 2$
$b(x) = x + 1$

20) Investigar si p(x) es divisible por q(x) en los siguientes casos. Extraer conclusiones:

a) $p(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1} \quad q(x) = x + a$

b) $p(x) = x^{2n+1} - a^{2n+1} \quad q(x) = x - a$

c) $p(x) = x^{2n} - a^{2n} \quad q(x) = x + a$

d) $p(x) = x^{2n} - a^{2n} \quad q(x) = x - a$

e) $p(x) = 8x^3 + 1 \quad q(x) = 2x + 1$

f) $p(x) = x^{2n} + a^{2n} \quad q(x) = x - a$

21) Calcular k para que a(x)=$(-x+1)^2$ sea divisible por b(x)=x-k

22)Sea $a(x)=2x^4-x^2+mx-m$ Calcular "m" sabiendo que la diferencia de los restos de su división por (x+m) y (x-m) es igual a –1.

23) Determinar m y t para que
$a(x)=x^4+mx^2+t$ sea divisible por $b(x)=x^2+x+1$

24) Calcular el valor de a, si r es el resto de p(x):q(x)
a) $p(x)=4x^3-x^2+ax-2$, q(x)=x-2 , r=26
b) $p(x)=5x^4+ax^2+ax^3+3x^2$, q(x)=x-3 , r=0

25) En una división de polinomios:
divisor: $2x^2+x+5$
cociente: x^2+x
resto: x+6
hallar el polinomio dividiendo

26) Determinar k para que el resto de la división entre $3kx^4+(k+1)x^3+2x^2$ y x+1 sea –1

Factorización de un polinomio

Cuando b es un cero o raíz de un polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$,
(x-b) es divisor de p(x), luego p(x) podría factorizarse como:
p(x)=(x-b)q(x), siendo q(x) el cociente de la división
Es posible que q(x) tenga más raíces con lo que puede iterarse el proceso factorizando q(x). Es decir, p(x) puede descomponerse en más factores si conocemos todas sus raíces reales.

$$p(x)=a_n(x-b_0)(x-b_1).....(x-b_n)$$

Ejemplo: la factorización de una función polinómica de grado 3 cuyos ceros son $x_1=0$ $x_2=1$ y $x_3=-2$, es:
y=ax(x-1)(x+2)

El valor de "a" no está determinado, por lo tanto existen infinitas funciones que cumplen con la condición. Podemos obtener una de ellas dándole un valor cualquiera a "a".
Si se pidiese que la función sea tal que además cumpla que f(2)=4

$f(2)=a.2(2-1)(2+2)=4 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$, es decir, "a" queda determinado

$$y=\frac{1}{2}x(x-1)(x+2)$$

Nota aclaratoria:
Un polinomio de grado no nulo es <u>primo</u> cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. Son primos únicamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales. Cuando un polinomio no es primo es <u>compuesto</u>.

Ejercicios

27) Encontrar un polinomio

a) de grado 3 que tenga raíces 2,-1y $\frac{1}{2}$

b) de grado 4 que tenga como únicas raices a: –1 y 2

c) de grado 4 que tenga al menos 2 raices simples reales: –1 y 2

28) Escribir un polinômio de grado 8 tal que –1 es una raíz de multiplicidad 3 y cero sea una raíz de multiplicidad 5.

29) Mostrar que 1 es una raíz de multiplicidad 3 de $p(x)=x^4+x^3-9x^2+11x-4$. Encontrar la otra raíz.

30) Definir un polinomio p(x) de grado 5 tal que sus únicas raices reales sean x= 1 de multiplicidad 2 y x= -2 de multiplicidad 1 y ademas p (-1) = 3

Teorema de Gauss

Sea $m(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polinomio en el cual sus coeficientes son <u>números enteros.</u> Si existen raíces racionales de *m(x)*, entonces dichas raíces son de la forma

$$\frac{p}{q} \quad donde \begin{cases} p \quad divide \quad a \quad a_0 \\ q \quad divide \quad a \quad a_n \end{cases}$$

con p y q primos entre si y $a_0 \neq 0$

Si bien las raíces de un polinomio de las características enunciadas pueden no ser racionales, el teorema de Gauss permite buscar fácilmente sólo las que lo son, logrando una factorización del polinomio *m(x)*.

Ejemplos:

I] Factorizar $p(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

$a_n=1$ $a_0=12$.

divisores de $a_0 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

divisores de $a_n = \{\pm 1\}$

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Por ser $a_n=1$ vemos que los divisores de 12 son las posibles raíces de *m(x)*

$m(1)=0 \Rightarrow 1$ es raíz

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0

$m(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$

Buscamos las raíces de $x^3+3x^2-4x-12$

Probemos con 1:1+3-4-12$\neq$0, 1 no es raíz
Probemos con –1: $(-1)^3+3(-1)^2-4(-1)-12\neq 0$, -1 no es raíz
Probemos con 2 : $2^3+3.2^2-4.2-12=0$ es raíz, 2 es raíz

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

m(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)
factorizamos el trinomio de segundo grado: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$
m(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)

II] m(x)=3x^3+8x^2-2x-4 a_n=3 a_0=-4

Buscamos los divisores de 4 y de 3.
Cualquier raíz debe estar entre los números: $\pm\frac{2}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm 1,\ \pm 4,\ \pm\frac{4}{3}$
De estas 12 posibles sólo 3 pueden ser raíces de la ecuación $3x^2+8x^2-2x-4=0$
$m(-\frac{2}{3})=0$

	3	8	-2	-4
-0,67		-2	-4	4
	3	6	-6	0

$$m(x)=(x+\frac{2}{3})(3x^2+6x-6)$$

Factorizamos el trinomio de segundo grado
$3x^2+6x-6=3\left(x-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-(-1-\sqrt{3})\right)$
y vemos que sus raíces no son racionales, no hubieran surgido de Gauss: se puede probar que ninguno de los otros 11 valores es raíz del polinomio.

$$m(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$$

Ejercicios

31) Factorizar
a) $x^2-2x+3+(x+1)^2$
b) x^4-5x^2+4
c) $-4x^4+12x^2-9$
d) x^4-64
e) $x^6-2x^5-x^4+4x^3-x^2-2x+1$
f) $8x^4-x$
g) $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$
h) x^5-2x^4+3x-6

i) $\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{6}$

32) Determinar las raíces reales de

a) $t(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$

b) $r(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 8x + 8$

33) Determinar las raíces de los polinomios, establecer la multiplicidad de cada raíz y graficar aproximadamente.

a) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2$

b) $t(x) = x^3(x^2 - 4)^2$

c) $q(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

d) $r(x) = (2x^2 - 4x + 2)(x^4 - x^2 - 12)$

Unidad 4: Funciones racionales no enteras o fraccionarias y funciones irracionales

Expresiones y funciones racionales

La expresión $\frac{p(x)}{q(x)}$ con p(x) y q(x) polinomios, se denomina expresión algebraica racional.

Una función racional es una función que asigna a través de una expresión racional.

$f : A \rightarrow \Re / f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ siendo p(x) y q(x) dos polinomios tales que q(x) es de grado mayor o igual que 1 y $A = \{x / x \in \Re \quad y \quad q(x) \neq 0 \}$

Ejemplo de función racional:

$$f : \Re - \{-2;2\} \rightarrow \Re / f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 7}{x^2 - 4}$$

1] Hallar el dominio más amplio en $\Re$, ceros y representar:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{x - 3}{-x^2 + 9}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^3 - x^2 - 12x + 4}$

Casos particulares de funciones racionales:

a) Cuando el numerador y el denominador tienen raíces comunes, pueden factorizarse y simplificarse, obteniendo una expresión más sencilla. Sin embargo, el dominio mayorante de la función sigue siendo el conjunto de los números Reales de los cuales se excluyen los puntos que anulan el denominador de la función dada.

Por ejemplo: $f : \Re - \{3\} \rightarrow \Re / f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$

Esta fracción puede simplificarse pues $x \neq 3$ f(x)=x+3. Tiene por gráfica a una **recta** de ecuación y=x+3 excluído el punto (3,6).

b) **Función homográfica**: $f : \Re - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \Re / \ f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad c \neq 0$

La consideramos función homográfica siempre que no pueda reducirse a una función constante. ¿En qué caso se produciría esta situación?
Notemos que R no es el conjunto imagen. Hallar el conjunto imagen.

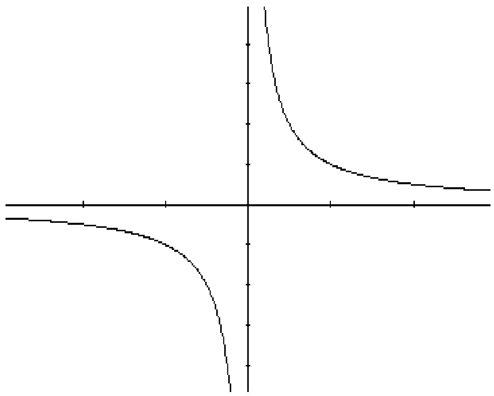
La gráfica de la función homográfica es una curva llamada **hipérbola equilátera**.

Estudio de la función homográfica

Sea la función homográfica que surge de la definición
con a=0, b=1, c=1 y d=0

$$y = \frac{1}{x}$$

x	y
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2



Conforme los valores de x están más próximos a cero el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que el valor absoluto de f(x) tiende a infinito cuando x se acerca a cero), en símblos

$$|f(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$$

Entonces diremos que el eje y, de ecuación x=0, es asíntota vertical de la curva.
En general, diremos que la recta de ecuación x=a es una asíntota vertical de la curva gráfica de f, cuando $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} \infty$

Volviendo al gráfico, vemos que a medida que x crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a cero. $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

Diremos que el eje x, de ecuación y=0, es asíntota horizontal al gráfico de f(x).
En general, diremos que la recta de ecuación y=b es una asíntota horizontal de la curva gráfica de f, cuando $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} b$

Las asíntotas (en este caso los ejes coordenados) son perpendiculares, por eso se llama hipérbola equilátera (sólo este tipo de hipérbola será objeto de estudio em este curso) y se cortan en un punto que es el centro de simetría de la curva. La hipérbola tiene 2 ramas que en este caso están situadas en el 1^{er} y 3^{er} cuadrante (recordemos que los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del semieje positivo de las x)

Si representamos f(x)=$-\frac{1}{x}$ las ramas estarían en el 2^{do} y 4^{to} cuadrante.

Conociendo la gráfica de f(x)=$\frac{1}{x}$ puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos la gráfica de :

$$f(x)=\frac{k}{x - x_0} + y_0 \quad \text{(forma canónica)}$$

La gráfica de esta función es una hipérbola que se obtiene de la gráfica de f(x)=$\frac{k}{x}$ desplazándola x_0 unidades en el sentido positivo de x (si $x_0>0$) y y_0 unidades en el sentido positivo de y (si $y_0>0$)

Si la función está dada en la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ puede llevarse a la forma canónica

$f(x)=\dfrac{k}{x-x_0}+y_0$ de dos maneras:

Veamos un ejemplo:

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}$$

- **Completando los términos para simplificar y obtener la forma canónica**

$$f(x)=\frac{\frac{1}{3}(3x+3)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2+1)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)}{3x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}, \textit{sacando factor comun } 3 \textit{ y operando}$$

$$\textit{con el numerador } 1/3{:}3=1/9, \text{tenemos } f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

- **O bien, dividiendo los polinomios se obtiene cociente $\frac{1}{3}$ y resto $\frac{1}{3}$**

Por ser una división entera $x+1=\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}$

Dividiendo miembro a miembro por 3x+2

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$av: x=-\frac{2}{3} \qquad ah: y=\frac{1}{3} \qquad D_f=\Re-\left\{-\frac{2}{3}\right\} \quad I_f=\Re-\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

<u>Ejercicios</u>

2] Dadas las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x+3}$

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{5x-10}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

d) $f(x)=\dfrac{2{,}5x+20}{5x+50}$

e) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{8+2x}{x}$ f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

g) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

Se pide: a) Graficarlas b) Dominio e imagen c) Ceros d) En los casos de funciones homográficas: pasaje a la forma canónica y ecuaciones de las asíntotas

3] Dadas las siguientes funciones, se pide forma canónica, ecuaciones de las asíntotas, gráficos correspondientes, ceros, intervalos donde la función es positiva y creciente.

a) $f(x)=\frac{4x-1}{2x+3}$ b) $f(x)=\frac{-2x-3}{x-1}$

4] Sea $f:\Re-\{3\}\rightarrow\Re\,/\,f(x)=\frac{1}{x-3}$

¿Para qué valores de $x\in\Re-\{3\}$:

a) f(x)>2?

b) f(x)>-1?

c) –1<f(x)<2 ?

Resolver analítica y gráficamente.

5] Sea $f:A\rightarrow B\,/\,f(x)=\frac{2x}{x-1}$

Hallar A y B mayorantes para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

6] Representar, determinar el conjunto imagen y clasificar en $\Re$. En el caso de no ser biyectiva, buscar una restricción que lo sea y hallar la inversa.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\geq 1\\ x & \text{si } x<1\end{cases}$$

7] Graficar:

a) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ d) $f(x)=\left|\frac{-2}{x-2}\right|+3$

b) $f(x)=\left|\frac{1}{x-2}+3\right|$ e) $f(x)=\frac{1}{|x|-2}$

c) $f(x)=\left|\frac{-2}{x-2}+3\right|$

8] Hacia un tanque de agua que contiene agua pura fluye agua salada de modo tal que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t)=\frac{t}{10t+100}\,(t>0)$

Graficar c y discutir el comportamiento de la función cuando $t\rightarrow\infty$. Interpretar

9] La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar la dosis de medicamentos para adultos (representada por “a” y medida en mg) a fin de que sirvan para niños:

$f(t)=\dfrac{at}{t+12}$ t>0 a en mg

Hasta qué edad un niño debe consumir menos de la mitad de la dosis máxima. Suponiendo a=2 mg. ¿Cuál es el gráfico que permite visualizar la variación de la dosis con el tiempo?

10] Sea $f: A \to B \,/\, f(x)=\dfrac{2x(x+1)}{x^2-1}$

Hallar A y B máximos para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

Operatoria con expresiones racionales

11] Reducir a su mínima expresión haciendo las restricciones necesarias:

a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^3+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

b) $\dfrac{\frac{x^3}{8}-1}{\frac{x^2}{4}-1}:(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)$

c) $\left(x+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+2x}\right)$

d) $\left(\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x+3}\right).\dfrac{x^2-x+3(x-1)}{25x^2-81}$

e) $\dfrac{x^2-21x-7}{7-x}:\left(\dfrac{4x+1}{7+x}+\dfrac{2x+1}{7-x}\right)$

f) $\dfrac{\left(-\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1-x}\right).\left(\dfrac{2(1-x)^2}{x^2+4x+4}+\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}\right)}{\dfrac{x}{4-x^2}}$

12] Efectuar: $\dfrac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}-\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

13] Hallar A y B para que:

a) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{3x-1}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{2A}{2x-1}-\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{2x+13}{2x^2+5x-3}$

14](Optativo) Descomponer en fracciones simples:

a) $\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}$

c) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

d) $\dfrac{x^5-1}{x^2+x}$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con expresiones racionales

15] Resolver las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta en cada caso el dominio de definición

b) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

c) $\dfrac{x}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-3}$

d) $\dfrac{x-6}{x+4}+\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{13x-48}{x^2+6x+8}$

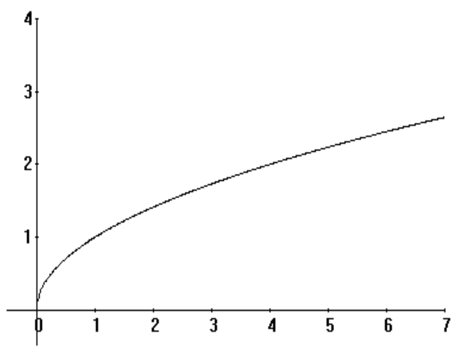
16] Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones analítica y gráficamente:

a) $\begin{cases} y=\dfrac{x+3}{x-1} \\ y=x-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=\dfrac{2x+4}{x+3} \\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x+1} \\ y=-1 \end{cases}$

Funciones cuyas fórmulas contienen expresiones irracionales

a) $f:\Re_0^+ \to \Re / f(x)=\sqrt{x}$, $I_f=\Re_0^+$ ceros: x=0. Es estrictamente creciente

..



Ejercicios

17] Teniendo en cuenta la gráfica de $f: A \to R (A \subset R)/$ f(x)=$\sqrt{x}$ y mediante simetrías y/o desplazamientos.

Graficar:

a) $f(x)=-\sqrt{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x-1}$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$

En todos los casos obtener: dominio máximo, ceros, conjunto imagen. Analizar si son biyectivas y obtener las funciones inversas (si es necesario restringir).

18] Dada $f : A \to R(A \subset R) / f(x) = \sqrt{1-x^2}$ se pide: a) Dominio máximo, b) Conjunto imagen, c) Ceros, d) Gráfica, e) Clasifique, f) Buscar una restricción biyectiva, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

19] Sea $f : A \to \Re / f(x) = \sqrt{|x|+1}$ se pide:

a) Dominio máximo, b) conjunto imagen, c) ceros, d) gráfico, e) clasificación, f) intervalo en que la función es positiva y creciente simultáneamente, g) si no es biyectiva buscar una restricción que lo sea, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

20] Sea $f : \Re \to \Re / f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Clasificar. Hallar la inversa (si es necesario restringir). Graficar ambas.

21] $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$ $\quad f : \Re \to \Re$

Se pide: representar, conjunto imagen, ceros, clasificar, inversa (si es necesario buscar una restricción).

22] Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, teniendo en cuenta las restricciones:

a) $\sqrt{1-x} = \sqrt{x^2-5}$

b) $x+2 = 13 - \sqrt{x-5}$

c) $\sqrt{x^2-5} + 7 = x^2$

d) $x^2 + \sqrt{x^2+9} = 21$

e) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

Unidad 5: Álgebra de funciones

IGUALDAD
Dos funciones f:Df → B y Dg → C son iguales cuando:
Df = Dg ; B = C y para todo x: f(x) = g(x)
Por ejemplo:

Las funciones $f: R-\{2\} \rightarrow R / f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y g: R→R/ g (x) = x+2

no son iguales ya que $D_f \neq$ Dg , sin embargo, notemos que para todo x≠2, f(x) = g(x). Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo g(2) = 4

Si definimos una función h: R→R/ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 4 & si\ x = 2 \end{cases}$, resulta h = g

SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE
Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

f+g(x) = f(x)+g(x) para todo x , siendo Df+g = Df ∩ Dg

f.g(x) = f(x).g(x) para todo x , siendo Df.g = Df ∩ Dg

$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para todo x, siendo $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in R / g(x) \neq 0\}$

Ejemplo :

Sean f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ D_f = R-{1} y g(x)= $\sqrt{x}$ D_g= R_0^+ entonces,

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x} \qquad D_{f+g} = R_0^+ - \{1\}$$

$$(f.g)(x) = \frac{1}{x-1}.\sqrt{x} \qquad D_{f.g} = R_0^+ - \{1\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{(x-1).\sqrt{x}} \qquad D_{\frac{f}{g}} = R^+ - \{1\}$$

COMPOSICION DE FUNCIONES
Analicemos la siguiente situación: el área de un círculo depende del radio. Si a su vez el radio aumenta al transcurrir el tiempo según la función r(t) = 3t, resulta:

A(r) = $\pi.r^2$ con r(t)=3t

El área del círculo, depende entonces del tiempo a través de la función A(r(t))= $\pi.(3t)^2$

Definición: Dadas dos funciones f:Df→If y g:Dg → Ig y tales que If ⊂ Dg, llamamos función compuesta g sobre f, a gof:Df → Ig / para todo x , gof(x) = g[f(x)]

Observaciones:

* La imagen de f debe estar incluída en el dominio de g para que todos los elementos de Df tengan imagen a través de la función compuesta gof.

* La imagen de g es, en general, el codominio (conjunto de llegada) de la compuesta y no su conjunto imagen, ya que puede haber elementos en el dominio de g que no sean imagen de ningún elemento de Df (si la inclusión es estricta)

* Si la inclusión pedida en la definición no se verifica, pueden hacerse las restricciones necesarias para la composición.

Veamos un ejemplo para aclarar estos puntos:

Sean f(x) = 2x+1 y g(x)= $\frac{1}{x-1}$ Df=R If=R

Dg=R-{1} Ig=R-{0}

Para realizar la composición gof debemos verificar que la imagen de la primer función a aplicar (f) esté incluída en el dominio de la segunda función a aplicar (g) .
Esto no se verifica, entonces realizamos la siguiente restricción:
Como necesitamos que 1 no pertenezca a If, para eliminarlo, restringimos Df.
Notemos que 2x+1=1 cuando x=0. Bastará entonces tomar como Df * =R-{0}, luego la Imagen correspondiente será If=R-{1} que coincide (y por lo tanto está incluída) en Dg.
A pesar de que, hechas las restricciones las funciones no son las mismas, usaremos por comodidad las mismas letras para nombrarlas.
Ahora; gof:R-{0} → R-{0} / gof(x) = g[f(x)] = g[2x+1]= $\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$
Para hallar fog, debemos analizar si el Ig está incluída en el Df.
Como R-{0} $\subset$ R, podemos realizar la composición:

fog:R-{1}→ R / fog(x) = f[g(x)]= $f\left(\frac{1}{x-1}\right)=2.\frac{1}{x-1}+1=\frac{1+x}{x-1}$

Notemos que como la inclusión es estricta, el conjunto R es el codominio (conjunto de llegada) y no la imagen de la función compuesta fog

Como vemos, fog ≠ gof. La composición de funciones no es un operación conmutativa.
Puede demostrarse que la composición de funciones es asociativa.

Composición de funciones inversas:
Sean las funciones biyectivas f:A → B y f^{-1}:B → A
a través de f a cada x de A le corresponde un y de B
a través de f^{-1} a cada y de B le corresponde un x de A
O sea f^{-1} (f(x))= x que se denomina función identidad y está definida de A en A

Análogamente, si aplicamos primero f^{-1}, diremos:
a través de f^{-1} a cada x de B le corresponde un y de A
a través de f a cada y de A le corresponde un x de B

Entonces; f(f^{-1}(x)) = x que es la identidad, pero ahora definida de B en B.

Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto de la recta y=x (gráfica de la función identidad).

Ejercicios

1] Dados los siguientes pares de funciones f y g indicar para cada una dominio mayorante e imagen y hallar f+g, f.g y f/g indicando el dominio mayorante de cada una.

a) $f(x)= x^2$ $\quad$ $g(x)= 2x-1$

b) $f(x) = x^2$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad$ $g(x) = 3x+2$

2] Dadas $f(x)= \sqrt{x}$ y $g(x)= x^2 - 1$, hallar:

a) f(g(1)) b) g(f(1)) c)g(f(2)) d) f(g(2)) e) fog f) gof

3] Dados los pares de funciones del ejercicio 23, hallar, fog y gof haciendo restricciones a los conjuntos si fuese necesario

4] Dada fog: $R \to R$ / $fog(x)= x^3 + 3x^2+3x +2$.

Hallar g, siendo f: $R \to R$/ $f(x)= 2x-1$.

5] Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo.

a) Escribir la función de medida del radio respecto del tiempo.

b) Sabiendo que la función de medida del volumen respecto del radio para la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi.r^3$, hallar la función de medida del volumen respecto del tiempo. Calcular el volumen para t=3

6] Dadas las siguientes funciones, indicar dominio e imagen, buscar su inversa (restringiendo si es necesario para la biyectividad) y componer para obtener la identidad. Indicar en todos los casos, dominios e imágenes.

a) $f(x) = x^2+2$ $\quad$ b)$f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ $\quad$ c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

7] (Optativo) Indicar si es V o F, expresando un argumento que justifique la respuesta.

a)La composición de funciones inyectivas, es inyectiva

b)La composición de funciones sobreyectivas, es sobreyectiva

Respuestas

Unidad 1

1) Son polinomios: a) d) e) g) h) i)

2) a) $x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$ grado 4

b) $x - 1$ grado 1

c) -3 grado 0

d) $-\frac{3}{4}x^5$ grado 5

e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}$ grado 2

f) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}$ grado 2

g) $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}$ grado 2

3) a) La recta forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de las x.

b) Las tangentes son 2 y 2/3 respectivamente. Coinciden con el coeficiente m o sea con la pendiente de la recta.

c) – 3 y -1/2 respectivamente.

4) a) y = -2 x b) y = $\frac{1}{2}$ x c) y = $\frac{2}{3}$ x

6) a) sí; b) m>0; m<0.

7)) $a) A = [-\frac{2}{5}; +\infty)$ $b) B = [-\frac{12}{5}; \frac{13}{5})$

c) $D = (\frac{7}{5}; +\infty)$ $d) E = (\frac{2}{5}; \frac{19}{10}]$

8) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{33}{7}$

9) a) y = x + 7 b) y = $-\sqrt{3}$ x + 7

10) a) y = x – 10 b) y = 1/3x – 28/3 c) y = -11 x +2 d) y = -9x

11) $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ o $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

12) No, las rectas paralelas al eje Y no representan funciones.

13) a) No están alineados. b) (6 ; -2)

14) El punto de intersección es respectivamente: a) {(-1; 2)} b) $\varnothing$ c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{10}{3}$; x,y$\in$ R

15) $y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{2}$

16) y = -3 x –1

17) y = –3x –1

18) a) Falso; b) verdadero; c) Falso

19) 49 /4

20) a) k = -3/10 h $\in \Re$ b) k = 5/6 h $\neq$ 1 c) k = 5/6 h = 1

21) a) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$

22) Diagonales : x = 0 ; y = 0

Lados : y = -3/2 x +3; y = 3/2 x –3 ; y = 3/2 x +3 ; y = - 3/2 x – 3

23) a)

	Forma implícita	F. explícita	F.segmentaria
r 1	-3/2x-y+3=0	y=-3/2x+3	X/2+y/3=1
r 2	3y-2x-9=0	y=2/3x+3	$\frac{x}{-9/2}+\frac{y}{3}=1$
r 3	y+3/2=0	y=-3/2	
r 4	x-3=0		
r 5	2y+3x-19=0	y=-3/2x+19/2	$\frac{x}{19/3}+\frac{y}{19/2}=1$

24) $k = \pm\sqrt{3/2}$

25) a) 12m b) y = 3/2 x

26) a) L = 3/35 P + 43/7 b) L = 43/7 c) Por cada 10g 20/35
Por cada 5g 10/35
Por cada 1g 2/35

27) a) 8 m^3 b) V = $8-\frac{1}{8}t$

28) If = [17/2 , +∞) U { 2 };

29) A = (-∞ , 5); If = (-7, -4] ;

32) 13. Primer tren : f1(t) = 90.t
Segundo tren : f2(t) = 60t + 40

14. $T(t)=\begin{cases}30+14t & si\,0\le t\le 5\\ 100-4(t-5) & si\,5<t\le 25\\ 20 & si\ t>25\end{cases}$ (tiempo medido en min y temperatura en grados centígrados)

Unidad 2

1) 1.1) $x=3$;   eje de simetría $x=3$ intersección con el eje y (0;9)

1.2) $x \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; eje de simetría $x=0$ intersección con el eje y (0;-2)

1.3) $x = -2 \pm\sqrt{3}$; eje de simetría $x= -2$ intersección con el eje y (0;1)

1.4) $x_1=4$ $x_2=0$; eje de simetría $x=2$ intersección con el eje y (0;0)

1.5) Ø; eje de simetría $x=1$ intersección con el eje y (0;-2)

1.6) $x_1=1,5$ $x_2=2,5$; eje de simetría $x=2$ intersección con el eje y (0;12)

1.7) Ø; eje de simetría $x=-2$ intersección con el eje y (0;5)

1.8) $x_1=1$ $x_2=0$ de simetría $x=0.5$ intersección con el eje y (0;0)

3) a) b) c) d) e)

	Ecuación canónica	vértice	Eje de simetría	Imagen	{x/f(x) ≥0}
1	$y = (x-3)^2$	(3,0)	$x = 3$	$[0, +\infty)$	R
2	$y= 3x^2-2$	(0,-2)	$x = 0$	$[-2, +\infty)$	$(-\infty,-\sqrt{2/3}\,] \cup [\sqrt{2/3},+\infty)$
3	$y= (x+2)^2 - 3$	(-2,-3)	$x = -2$	$[-3, +\infty)$	$(-\infty,-2-\sqrt{3}\,] \cup [-2+\sqrt{3},+\infty)$
4	$y= 3(x-2)^2 -12$	(2, -12)	$x = 2$	$[-12, +\infty)$	$(-\infty,0] \cup [4,+\infty)$
5	$y= -(x-1)^2 -1$	(1,-1)	$x = 1$	$(-\infty,-1]$	Ø
6	$y= 4(x-2)^2 - 4$	(2,4)	$x = 2$	$[4, +\infty)$	$(-\infty,1] \cup [3,+\infty)$
7	$y =(x+2)^2+1$	(-2,1)	$x = -2$	$[1, +\infty)$	R
8	$y= -(x-1/2)^2 + ½$.	(1/2;1/2)	$x = 1/2$	$(-\infty,1/2]$	(1/2, 2)

	crece	decrece
1	$(3,+\infty)$	$(-\infty,3)$
2	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$
3	$(-2,+\infty)$	$(-\infty,-2)$
4	$(2,+\infty)$	$(-\infty,2)$
5	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
6	$(2,+\infty)$	$(-\infty,2)$
7	$(-2,+\infty)$	$(-\infty,-2)$
8	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2,+\infty)$

4) a) p1: $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$ p2: $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$

b) p1: $y = (x+1)^2 + 4$ p2: $y = -x^2 - 1$

5) a) p2: $y = \frac{5}{4}(x-2)^2$ $a_1 = \frac{5}{2}$

b) $y = -2x^2 + 4x+6$ V= (1 , 8)   Ceros: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ Im f = $(-\infty, 8]$

Positiva y decreciente: (1 , 3)   Negativa y creciente: $(-\infty, -1)$

6) $x = 2$, $y = 2$

7) $x = 18$, $y = 18$

8) $x = 150$

9) a) $t = 3$ y $t = 18$ b) sí, cuando $t=25$

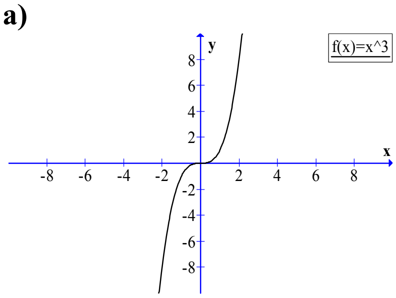
10) $x \approx 1{,}68$; $y \approx 1{,}68$

11) a) $e = f(t) = 6 - 3t + t^2$ $v= g(t) = -3 +2t$ $a = h(t) = 2$

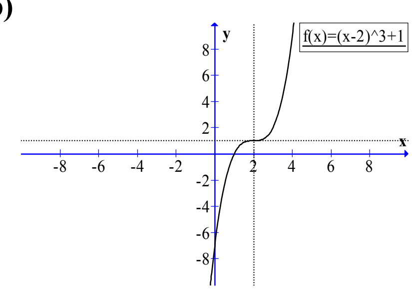
c) En $t = 1,5$ velocidad cero   En $[0; 1,5)$ retardado y en $(1,5; 5]$ acelerado
d) 2
e) $e = t + 2$ tangente a la parábola.
La pendiente de la recta tangente en to es la velocidad en to.
f) pendiente cero => velocidad cero.
12) b) $t = 5$
13) a) asciende $(0, 600/49)$ desciende $(600/49; 1200/49)$
b) altura máxima : 734,7 m cuando $t = 600/49 = 12,24$ seg
c) $1200/40 = 24,49$ seg
d) $t_1 = 0,424$ seg $t_2 = 24,065$ seg
14) V, V , F , V ,V
15) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
16) $x^2 + 2x - 35 = 0$
17) a) $2(x-2)(x-8)$ b) $-1/2(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$
18) a) $m = 1/32$ b) $m = 1$ c) $m = 12$
19) a) $a = 3$ o $a = -1$ b) $a = 3 + 2\sqrt{2}$ o $a = 3 - 2\sqrt{2}$
20) a) $k = 3$ b) $k = 1$
21) a) $k = 1/4$ b) $k = 1$
22) $k = 12$
23) a) $y = 2(x-2)(x+1/2)$ b) $y = (x-5)(x+9)$ c) $y = 4(x - \sqrt{3}/2)(x + \sqrt{3}/2)$
d) $y = 3(x+1)(x-1/3)$ e) $y = -2(x-10)(x+9)$
25) a) $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = 1/2$; $x_4 = -1/2$ b) $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1/2$; $x_4 = -1/2$
c) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1/2$; $x_4 = -1/2$ d) $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1/2$; $x_4 = -1/2$
e) $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$
26) a) $A = (2,0)$ $B = (1,2)$
b) $A = (6, -42)$ $B = (-1,0)$
27) $y = -3x + 5$
28) $m = 0$ o $m = -4$
29) Todo valor real de $m \neq 1$
30) a) $k = \pm\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$
31) a) $y = 5x - 12$ b) $y = 4x - 9$
32) $k = -2$

Unidad 3

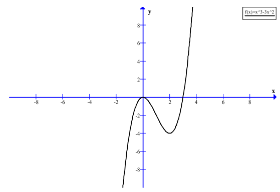
1. a)



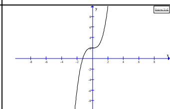
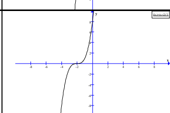
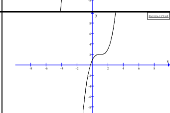
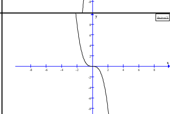
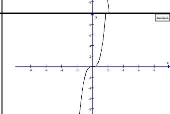
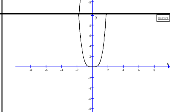
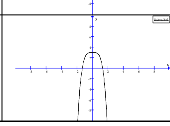
b)



2. a) F b) F c) V d) V
3. En $x=-2$ la función tiene un cero de orden impar y en $x=3$ de orden par.
4. $C^0 = \{0(doble); 3(simple)\}$; $C^+ = (3; +\infty)$; $C^- = (-\infty; 3) - \{0\}$



5. Sea f definida en R.

	C^0	C^+	C^-	gráfico	par	impar	imagen
a	$\{-\sqrt[3]{2}\}$	$(-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
b	$\{-2\}$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;-2)$		No	No	R
c	$\{1-\sqrt[3]{2}\}$	$(1-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;1-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
d	$\{0\}$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$		No	Si	R
e	$\{0\}$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$		No	Si	R
f	$\{0\}$	$R-\{0\}$	ϕ		Si	No	[0;+oo)
g	$\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\}$	$(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3})$	$(-\infty;-\sqrt[4]{3})\cup(\sqrt[4]{3};+\infty)$		Si	No	(-oo;3]

6) b) Las funciones son respectivamente: No inyectiva, no sobreyectiva
Inyectiva, no sobreyectiva
No es función

c) Los conjuntos A y B no son únicos, una posibilidad es: A = R_0^+ B = [0; +∞)

7) Son funciones i) ii) iv) v) . i) y iv) son sobreyectivas pero no inyectivas; ii) es biyectiva; v) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

8) a) a.1) por ejemplo f (1) = 3 ; f (2) = 3; f (3) = 7
a.2) imposible.
b) No, porque no puede definirse una función inyectiva.
c) Ambos conjuntos deben tener la misma cantidad de elementos.

9) Biyectiva. $f^{-1}:[2,+\infty)\to\Re_0^+ \,/\, f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

10) Biyectiva. $f^{-1}:\Re\to\Re \,/\, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

12. a) a=-1 b=-1 c=0
b) a=15/4 b=2 c=3/4
13.a) $-2x^4+4x^2+x-2$
b) $2x^4-3$
c) $-2\sqrt{3}$
d) $p(0)=1/2$ $p(\sqrt{2})=1/2$ $|s(0)|=3$ $t(-1)=3/4$ $q(-1)+p(-2)=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{17}{2}$

14 $C^0=\{1;-1\}$
15. x^2+1
16.a) $C(x)=-2x^2+1; R(x)=2x^2-x+3$
b) $C(x)=2x^2+2/3x-1/9; R(x)=1/9x+1$
c) $C(x)=x^2-cx+c^2; R(x)=0$
d) $C(x)=x^2-2cx+4c^2; R(x)=-9c^3$
e) $C(x)=x^2-c^4; R(x)=0$
f) $C(x)=-1/3x^3-1/3x^2-1/3x+1/3; R(x)=-1/3x$
g) $C(x)=x^2-x; R(x)=1$
h) $C(x)=-cx^2-x+c;$ $R(x)=c^2-1$
17.a) $C(x)=x^4+2x^3+6x^2+10x+20; R=41$
b) $C(x)=-1/2x^2+x-1; R=1$
c) $C(x)=x^2-2x+4; R=m^3-8$
d) $C(x)=16x^3-16x^2+16x-16; R=17$
e) $C(x)=x^4+1/2x^3+1/4x^2-7/8x-23/16; R=41/32$
f) $C(x)=mx^3+m^2x^2+m^3x+m^4; R=0$
g) $C(x)=x-9; R=16$
h) $C(x)=x^3+m^2x^2+m^4x+m^6; R=m^8-m^2$
18-Aplicar el teorema del resto (ver las respuestas del ej 12)
19.a) m=2 **b)** m=-3/2
20.a) SI **b)** SI **c)** SI **d)** SI **e)** SI **f)** NO
<u>Conclusiones:</u>

- La suma (resta) de potencias de igual grado, con grado par o impar, es divisible por la suma (resta) de sus bases
- La resta de potencias de igual grado par es divisible por la resta de sus bases
- La suma de potencias de igual grado par no es divisible por la resta de sus bases, ni tampoco por la suma (PROBARLO)

21. k=1
22. $m_1=\sqrt{2}/2$ $m_2=-\sqrt{2}/2$
Para armar a(x) reemplazar m por cada uno de los valores, hay dos posibilidades.

23. m=1 t=1
24. **a)** a=0 **b)** a= -12

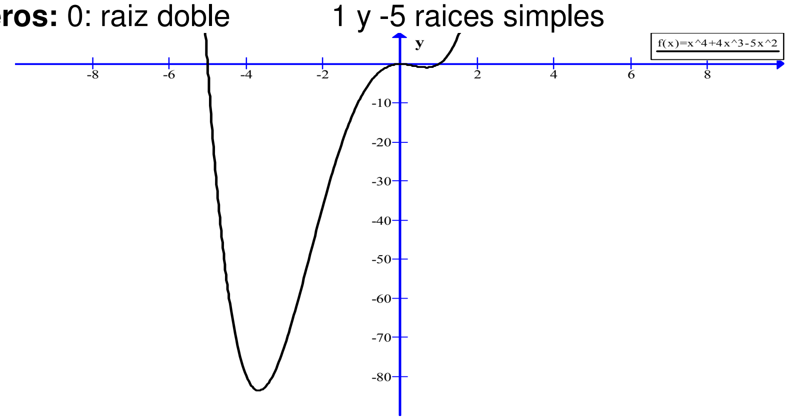
25. $2x^4+3x^3+6x^2+6x+6$
26. k=-1
27. **a)** a(x-2)(x+1)(x-1/2), a real distinto de cero
b) Hay varias posibilidades

$a(x+1)^3(x-2); a\in R; a\neq 0$

$a(x+1)(x-2)^3; a\in R; a\neq 0$

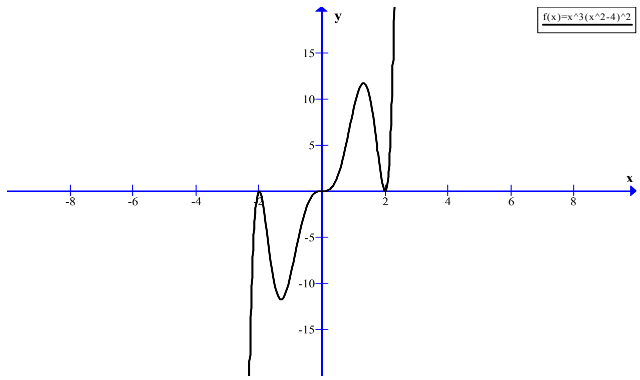
$a(x+1)^2(x-2)^2; a\in R; a\neq 0$

c) Hay infinitas posibilidades: a(x+1)(x-2)(x-h)(x-k) con h y k reales, a real no nulo
28. $a(x+1)^3x^5; a\in R; a\neq 0$
29. Aplicar Ruffini 3 veces consecutivas y obtener resto cero (las tres veces)
La otra raíz se halla igualando a cero el último cociente: x=-4
30. $-3/16(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$, hay infinitas posibilidades porque el último factor, si bien tiene que ser un polinomio sin raices reales, puede elegirse en forma diversa.
31. **a)** $2(x^2+2)$
b) $(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$
c) $-4(x-\sqrt{6}/2)^2(x+\sqrt{6}/2)^2$
d) $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x^2+8)$
e) $(x+1)^2(x-1)^4$
f) $8x(x-1/2)(x^2+1/2x+1/4)$
g) $(x-3)(x+3)(x-1)^2$
h) $(x^4+3)(x-2)$
i) $2/3(x+1/2)(x+1/4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
32. **a)** 2;-2;1/3
b) 2;-2;1
33. **a) Ceros:** 0: raiz doble 1 y -5 raices simples



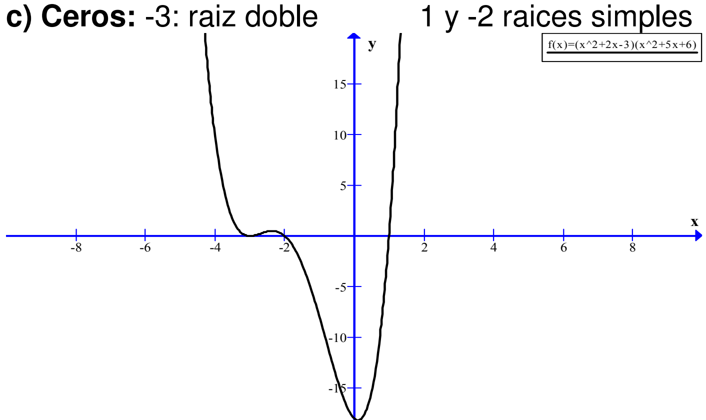
La gráfica “rebota” en 0 y “atraviesa” el eje x en -5 y 1

b) Ceros: 0: raiz triple 2 y -2 raices dobles



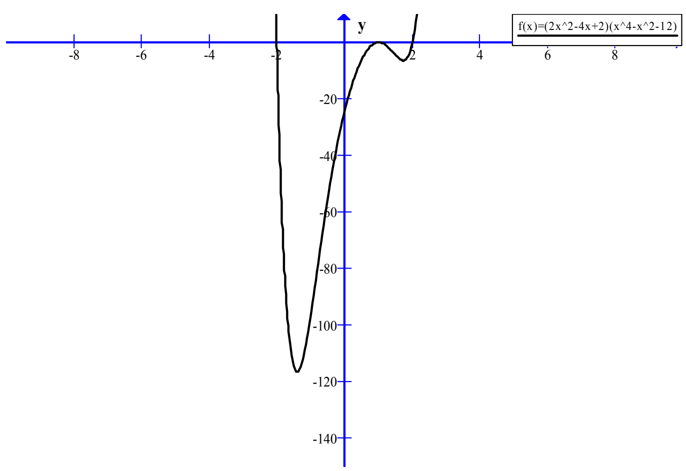
La gráfica “rebota” en -2 y 2 y “atraviesa” el eje x en 0

c) Ceros: -3: raiz doble 1 y -2 raices simples



La gráfica “rebota” en -3 y “atraviesa” el eje x en -2 y 1

d) Ceros: 1: raiz doble 2 y -2 raices simples y hay dos raices no reales.



La gráfica “rebota” en 1 y “atraviesa” el eje x en -2 y 2

<u>Unidad 4</u>

1. a) R – { 1}, no tiene ceros
   b) R – {-3, 3} , no tiene ceros
   c) R – {-2, 1/3, 2} , no tiene ceros

2.

	Dominio	Imagen	Ceros	F. Canónica	Asíntotas
a)	R –{-3/2}	R-{2}	1/4	$y=\frac{-\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}}+2$	AV: x= -3/2 AH: y=2
b)	R-{2}	{1/5}	No tiene		
c)	R-{-2,2}	R-{0, ¼}	No tiene	y= $\frac{1}{x+2}\ \forall x\neq 2, x\neq -2$	AV: x= -2 AH: y=0
d)	R-{10}	R-{1/2}	-8	y=$\frac{-1}{x+10}+\frac{1}{2}$	AV: x= -10 AH: y=1/2
e)	R-{0}	R-{2}	-13/2	$y=\frac{13}{x}+2$	AV: x= 0 AH: y=2
f)	R-{1}	R-{2}	-1		
g)	R-{1}	R	No tiene		

3.

	Ceros	F. Canónica	Asíntotas	Int de Posit.	Creciente
a)	1/4	$y=\frac{-\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}}+2$	AV: x= -3/2 AH: y=2	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	R-{-3/2}
b)	-3/2	$y=-2-\frac{5}{x-1}$	AV: x= 1 AH: y=-2	$\left(-\frac{3}{2},1\right)$	R-{1}

4a) (3;7/2)

$b)\quad (-\infty,2)\cup(3;+\infty)$

$c)\quad (-\infty,2)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$

5. A: R –{ 1} B: R –{2}, $f(x)=2+\frac{2}{x-1}$ $\quad f^{-1}; R-\{2\}\to R-\{1\}\,/\,f^{-1}(x)=\frac{2}{x-2}+1$

6. $D_F : R$
$I_f : (-\infty,1]$ No sobreyectiva, no inyectiva

8.Al trascurrir el tiempo tendiendo a infinito la concentración tiende a 0,10, aunque nunca alcanza ese valor.

9. 12 años

10. A: R-{-1, 1} B: R-{1, 2}

$f^{-1}:\Re-\{1,2\}\to\Re-\{1,-1\}/\,f^{-1}(x)=\frac{x}{x-2}$

11 a) 0 x ≠ –1 d) $\frac{1}{5x+9}$ x ≠1; -3; 9/5; -9/5

b) $\frac{2}{x+2}$ $x\neq 2\ \ x\neq$ -2 e) -1/2 (7+x) x≠ 7, -7; $\frac{21\pm\sqrt{469}}{2}$

c) $\frac{x-1}{x}$ $x \neq 1$ f) -3x+2+x^2 x≠ -2; -1; 0; 1; 2

12.Rta: 0 $x \neq 0$ $x \neq -1$; 1

13.a) A=2/3 B=7/3 b) A= 2 y B=1

14. a) $\frac{0.5}{x-1}+\frac{0.5}{x+1}$ b) $2+\frac{5}{x-2}$ c) $x^2-1+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}$

d) $x^3-x^2+x-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

15.

$a) S=\{-3;18\}$

$b) S=\{-2\}$

$c) S=\{2,6\}$

16. a) $S=\{(0,-3)\ (5;2)\}$ b) $S=\{(-1,1)\ (-5;3)\}$ c) $S=\{(-2,-1)\}$

17.

a) Dominio máximo reales positivos con el cero, cero : x= 0. Conjunto Imagen; reales negativos con el cero, no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^- \to \Re_0^+ / f^{-1}(x)=x^2$

b) Dominio máximo reales mayores o iguales que 1, cero: x= 1. Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^+ \to [1,+\infty)/ f^{-1}(x)=x^2\ +1$

c) Dominio máximo reales mayores o iguales que -1, cero: x= -1,0 Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^+ \to [-1,+\infty)/ f^{-1}(x)=x^2\ -1$

18.

Dominio maximo : [-1 : 1]; Imagen [0;1], No es biyectiva restricción para que lo sea Dom : [0;1], Im : [0;1]

$\mathrm{f}^{-1}:[0;1]\to[0;1]/\mathrm{f}^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$

19.Dominio máximo: R

Imagen $[1,+\infty)$, no tiene ceros. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom : $\Re_0^+$ e Im : $[1,+\infty)$

$\mathrm{f}^{-1}:[1,+\infty)\to\Re_0^+\ /\mathrm{f}^{-1}(x)=x^2-1$

La f es creciente y positiva en todo su dominio

20.Es biyectiva. $f^{-1}:R\to R/ f^{-1}(x)=x^3+1$

21. Cero: x=2,

Imagen $[0,+\infty)$. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom : $[2,+\infty)$ Imagen $[0,+\infty)$.

$\mathrm{f}^{-1}:\Re_0^+\to[2,+\infty)/\mathrm{f}^{-1}(x)=x^2+2$

22.

$a)\ S=\{-3\}$

$b) S=\{9\}$

$c) S=\{-3,3\}$

$d) S=\{4,-4\}$

$e) S=\{3\}$

Unidad 5

1) a) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R_0^+$ $\quad$ $Domg = R; \operatorname{Im} g = R$

- $f + g(x) = x^2 + 2x - 1; Dom = R; \operatorname{Im} = [-2;+\infty)$
- $f \cdot g(x) = 2x^3 - x^2; Dom = R; \operatorname{Im} = R$
- $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}; Dom = R - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}; \operatorname{Im} = R$

b) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R_0^+$ $\quad$ $Domg = R_0^+; \operatorname{Im} g = R_0^+$

- $f + g(x) = x^2 + \sqrt{x}; Dom = R_0^+; \operatorname{Im} = R_0^+$
- $f \cdot g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}; Dom = R_0^+; \operatorname{Im} = R_0^+$
- $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}; Dom = R^+; \operatorname{Im} = R^+$

c) $Domf = R - \{2\}; \operatorname{Im} f = R - \{0\}$ $\quad$ $Domg = R; \operatorname{Im} g = R$

- $f + g(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 3}{x-2}; Dom = R - \{2\}; \operatorname{Im} = R$
- $f \cdot g(x) = \dfrac{8}{x-2} + 3; Dom = R - \{2\}; \operatorname{Im} = R - \{3\}$
- $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{1}{(x-2)(3x+2)}; Dom = R - \left\{2; -\dfrac{2}{3}\right\}; \operatorname{Im} = R - \{0\}$

2) a) 0 b) 0 c) -1 d) no existe e) $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ f) $g \circ f(x) = x - 1$

3) a) $f \circ g(x) = (2x-1)^2; Dom = R; \operatorname{Im} = R_0^+$

Para $g \circ f$ debemos restringir $Domg = R_0^+$

$g \circ f(x) = 2x^2 - 1; Dom = R; \operatorname{Im} = [-1;+\infty)$

b) Para $f \circ g$ debemos restringir $Domf = R_0^+$

$f \circ g(x) = x; Dom = R_0^+; \operatorname{Im} = R_0^+$

$g \circ f(x) = |x|; Dom = R; \operatorname{Im} = R_0^+$

c) $f \circ g(x) = \dfrac{1}{3x}; Dom = R - \{0\}; \operatorname{Im} = R - \{0\}$

$g \circ f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 2; Dom = R - \{2\}; \operatorname{Im} = R - \{2\}$

4) g:R→R/ g(x)= $\dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 2$

5) a) $f : R_0^+ \to R_0^+ / f(t) = 1 + \dfrac{1}{10}t$

b) $V : R_0^+ \to R_0^+ / V(t) = \dfrac{4}{3}\pi(1 + \dfrac{1}{10}t)^3$ $\quad$ $V(3) = \dfrac{13^3}{750}\pi$

6) a) $Domf = R; \operatorname{Im} f = [2;+\infty); f^{-1} : [2;+\infty) \to [0;+\infty) / f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

$f \circ f^{-1} : [2;+\infty) \to [2;+\infty)$ $\quad$ $f^{-1} \circ f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$

b) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R; f^{-1} : R \to R / f^{-1}(x) = x^3 + 3$

$f \circ f^{-1} : R \to R \qquad f^{-1} \circ f : R \to R$

c) $Domf = R - \{3\}; \operatorname{Im} f = R - \{2\}; f^{-1} : R - \{2\} \to R - \{3\} / f^{-1}(x) = \dfrac{5}{x-2} + 3$

$f \circ f^{-1} : R - \{2\} \to R - \{2\} \qquad f^{-1} \circ f : R - \{3\} \to R - \{3\}$

7)a)VERDADERO

Para demostrar la inyectividad de $g \circ f$ partiendo de $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ debemos inferir que $x_1 = x_2$

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ por ser g inyectiva.

Como f es inyectiva se puede inferir la igualdad de las abscisas:

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Por lo cual la <u>composición de funciones inyectivas, es inyectiva.</u>

b) FALSO

Para que la composición $g \circ f$ sea posible, se debe verificar que $\operatorname{Im} f \subset Domg$.

Si la inclusión es estricta existe al menos un elemento del dominio de g, que no pertenece a la imagen de f: $x_0 \in oDomg / x_0 \notin \operatorname{Im} f$, dicho de otro modo, x_0 nunca será alcanzado por f. Entonces $y_0 = g(x_0) \notin \operatorname{Im} f \circ g$.

Por lo tanto, aunque las dos funciones sean sobreyectivas, la composición no siempre lo es.

TRABAJO PRÁCTICO 0 (4to año)

1. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $(-x+2)^3=1$ b) $x^3=x$ c) $4x^4-5x^2+1=0$

d) $\left(x^2-x\right)^2-8\left(x^2-x\right)+12=0$ e) $4x^4+15x^2-4=0$ f) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{18})\,x=-6$

g) $(x-1)^4-3(x-1)^2=-2$ h) $\left(m^2-1\right)\left(m^2+3\right)=2m^2$

i) $4a^2\left(1-a-a^2\right)=-a^4+a^3$ j) $3\left(x^4-16\right)\left(x^3-2x^2+x\right)=0$

k) $\frac{7}{5}\left(1-\frac{3}{10}y\right)\left(\frac{7}{3}+\frac{14}{9}y\right)=0$ l) $\left(x^3-8\right)\left(x^3+8\right)\left(6x^2+7x+8\right)(1-x)=0$

m) $9p^9-7p^7=6p^9+2p^7$

2. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$ b) $\frac{x+11}{x}=7-\frac{9+4x}{x^2}$ c) $4x-\frac{2}{x}=2x+\frac{35}{3}$

d) $x+\frac{1}{x-3}=5$ e) $\left(x-5\sqrt{x}\right)^2+10\left(x-5\sqrt{x}\right)+24=0$ f) $\frac{t+1}{t^2-1}=\frac{1}{t-1}$

3. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a) $\left(x+\frac{1}{5}\right)(-3x+9)\geq 0$ b) $(2x+1)\,.\,(3x-2)<0$ c) $3x^2+15x\geq 0$

d) $(x+10)^2\geq -4$ e) $x^4\leq -5$ f) $|x-2|.(x^2-5)\geq 0$

g) $x^2-x<0$ h) $x^2-½\leq 4-x^2$ i) $(2x-3)^2>4\,(x+1)\,(x+2)$

j) $x^2+2x+1\leq 4$ k) $x^3>x$

4. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas inecuaciones:

a) $\frac{25x^2-9}{3+\sqrt{x^2-5}}<0$ b) $\frac{2}{x}<-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{2}{x}>\frac{3}{5}$ d) $\frac{27-x^3}{|x+3|}<0$

e) $\frac{|x-2|}{x^2-5}\leq 0$ f) $\frac{x^2-5}{|x-2|-2}\leq 0$ g) $\frac{x^2-5}{|x-2|+2}\leq 0$ h) $\frac{2x-4}{x^2-9}\geq 0$

i) $\frac{2}{x}-3<-1$ j) $\frac{1}{x}\geq\frac{6}{x}$ k) $\frac{3}{x+2}<-2$

l) $\frac{3x+2}{x+1}<1$

5. Dadas las siguientes funciones definidas de su dominio D en R:

i) $f(x)=x^2-2x+1$ ii) $f(x)=x^2+5x-2$ iii) $f(x)=|x-3|$ iv) $f(x)=|x^2-x|$

v) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ vi) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

a) Hallar dominio e imagen
b) Clasificarlas de D en R y hallar conjuntos mayorantes en los que sean biyectivas
c) En dichos conjuntos, hallar la función inversa

Conjunto mayorante: Máximo en sentido de inclusión

6. Dada la recta **r**: $y = -\frac{1}{2}x + 1$, obtener la ecuación de la recta **s** que cumple con la condición establecida en cada ítem:

a) **s** // **r** y contiene al origen de coordenadas; b) **s** $\perp$ **r** y tiene ordenada al origen -3;
c) **s** $\perp$ **r** e interseca al eje de abscisas en -3; d) **s** // **r** y contiene al punto (2/3; 9).

7. ¿Para qué valor de m, las rectas **r**: $(5m - 1)x - y + 2 = 0$ y **s**: $3x - 6y + 9 = 0$ son perpendiculares?

8. Un auto circula por la ruta 2 y la distancia (en km) que lo separa de Buenos Aires en función del tiempo (en hs) está dada por una función lineal. Se sabe que a las dos horas de haber partido de la ciudad de origen se encontraba en el km 150 y que media hora más tarde se encontraba a 100 km de Bs. As.

a) Encontrar la fórmula de la función lineal de la que habla el enunciado.
b) ¿Qué parámetro de la fórmula hallada en el ítem a) indica que el auto se acerca a Buenos Aires? ¿Por qué?
c) ¿A qué distancia de Bs. As. se encontraba el automóvil en el momento de partir? ¿A qué velocidad circula?
d) ¿En qué momento pasó por el km 225 de la ruta?

e) Graficar e indicar un dominio que dé cuenta de la situación.

9.Escribir la fórmula de una función cuadrática definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que verifique lo pedido en cada caso:

a) su vértice es el punto (-6; 0) y tiene concavidad positiva.

b) su vértice es el punto (–1; -3) y contiene al punto (1; –2).

c) sus raíces son 0 y -2 y tiene concavidad negativa.

d) sus raíces son 3 y -1 y contiene al punto (0; 1).

e) tiene un máximo en $x = -3$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

f) es creciente en $(-\infty; -3)$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

10. Se están haciendo pruebas desde un submarino lanzando misiles desde cierta profundidad y registrando su altura, medida en metros respecto del nivel del mar, en función del tiempo, medido en segundos.

Un misil fue lanzado desde una profundidad de 160 m, atravesó la superficie a los 2 seg. de haber sido lanzado y explotó contra el blanco que flotaba en el mar 6 seg. después.

a) ¿Cuál es la variable independiente del problema? ¿Y la dependiente?

b) Definir la función que permite calcular su altura en función del tiempo sabiendo que se trata de una función cuadrática. (**Nota**: Dar un dominio que sea coherente con la situación planteada.)

c) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó el proyectil? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿A qué altura se encontraba 1 seg. después de haber sido lanzado? ¿Y a los 3 seg.?

e) ¿En qué intervalo de tiempo estuvo por encima del nivel del mar? ¿Y por debajo?

11. Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 10 = 3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -3x(x+2) \\ y = 4(x-1)(x-3) \end{cases}$

12. Factorizar cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x$ b) $S(x) = \frac{1}{27}x^3 - 8$ c) $Q(x) = x^2 - 5$

d) $T(x) = (2x+1)^2 - 9$ e) $R(x) = 4x^4 - 12x^3 + 9.x^2$ f) $U(x) = 25x^4 - 16$

g) $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$ h) $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

i) $S(t) = -\frac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 + 2t$ j) $T(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

k) $M(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ l) $N(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

13. Indicar para que valores están definidas las siguientes expresiones y simplificarlas.

a) $\dfrac{x^4-16}{x^4-2x^2-8}$ b) $\dfrac{x^6-1}{x^2-1}$ c) $\dfrac{2t^3+2t^2+2t+2}{t^2+t}$

d) $\dfrac{x^4-2x^3-x^2+2x}{x^3-2x^2}$ e) $\dfrac{-x^3+3x^2-4}{x^3+x^2-6x}$ f) $\dfrac{3x^2-3x}{2x^3-2x^2}$

Respuestas

1. a) {1} b) {0; 1; -1} c) {1; -1; ½; -1/2} d) {3; 2; -2; -1} e) {1/2; -1/2} f) $\{-3\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$ g) {2; 0; $\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1$} h) $\{\sqrt[4]{3};-\sqrt[4]{3}\}$ i) $\left\{0;\dfrac{5+\sqrt{73}}{-6};\dfrac{5-\sqrt{73}}{-6}\right\}$ j) {2; -2; 0; 1} k) {10/3; -3/2} l) {2; -2; 1} m) $\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$

2. a) {-10; 10} b) {3; -1/2} c) {6; -1/6} d) {4} e) {16; 1; 9; 4} f) ℝ - {-1; 1}

3. a) [-1/5; 3] b) (-1/2; 2/3) c) $(-\infty;-5]\cup[0;+\infty)$ d) ℝ e) ∅ f) $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)\cup\{2\}$ g) (0; 1) h) [-3/2; 3/2] i) $(-\infty;1/24)$ j) [-3; 1] k) $(-1;0)\cup(1;+\infty)$

4. a) ∅ b) (-10/3; 0) c) (-10/3; 0) d) (3; +∞) e) $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ f) $\left[-\sqrt{5};0\right)\cup\left[\sqrt{5};4\right)$ g) $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ h) (-3; 2]∪(3; + ∞) i) (- ∞; 0) ∪(1; + ∞) j) (- ∞; 0) k) (-7/2; -2) l) (-1; -1/2)

6. a) y = - 0,5x b) y = 2x - 3 c) y = 2x + 6 d) y = -0,5x + 28/3

7. -1/5

8. a) y = -100 km/h x + 350 km c) 350 km; 100 km/h d) A las 1,25 h (1 h 15 min.) de haber partido.

9. a) Una respuesta posible es $y = (x+6)^2$ b) $y = 1/4\,(x + 1)^2 - 3$ c) Una respuesta posible es y = -x (x + 2). d) y = -1/3 (x - 3) (x + 1) e) y f) $y = -2/3\,(x + 3)^2 + 6$

10. b) f(t) = –10 (t – 2) (t – 8); Dom(f) = [0; 8] c) 90m a los 5seg. d) A 70m bajo el mar.

e) $(2; 8)$ y $[0; 2)$

11. a) $\{(2; 4); (-1; 1)\}$ b) $\{(2; -4)\}$ c) $\varnothing$

12. a) $x\ (x - 1)(x + 1)$ b) $1/27\ (x - 6)(x^2 + 6x + 36)$ c) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

d) $4\ (x - 1)(x + 2)$ e) $4\ x^2 (x - 3/2)^2$ f) $25\ (x - 2\sqrt{5}/5)(x + 2\sqrt{5}/5)(x^2 + 4/5)$

g) $8\ (x + 1/2)(x + 1)(x - 3/4)$ h) $4\ (x + 1)(x - 1/2)(x - 2)$

i) $-1/2\ t\ (t + 2)(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ j) $(x - 1)(x + 3)^2$ k) $(x - 2)^2 (x + 3)$

l) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 9)$

13. a) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$; $\dfrac{x^2+4}{x^2+2}$; b) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 1 \wedge x \neq -1\}$; $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

c) $\{t \in \mathbb{R}\ /\ t \neq 0 \wedge t \neq -1\}$; $\dfrac{2\left(t^2+1\right)}{t}$ d) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\}$; $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

e) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -3\}$; $\dfrac{-(x+1)(x-2)}{x(x+3)}$ f) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$; $\dfrac{3}{2x}$

Problemas interesantes (Segundo nivel Olimpíadas)

1. ¿Cuántas formas hay de embaldosar un pasillo de 2x7 con baldosas de 2x1?

2. Dos bicicletas se encuentran en una ruta recta a 40 kilómetros de distancia. A partir de un momento ambas empiezan a andar en sentidos contrarios, acercándose. Cada bicicleta tiene a una velocidad constante de 20km/h. En el mismo instante de partida, una mosca sale de una de las bicicletas rumbo hacia la otra con una velocidad de 40km/h. Al encontrarse la mosca con la otra bicicleta, instantáneamente se da vuelta y comienza a volar para el otro lado hasta encontrarse con la primera bicicleta, momento en el cual se da vuelta nuevamente, y así sigue hasta que las bicicletas se juntan. ¿Qué distancia recorre la mosca?

3. Sean ABC y ABD dos triángulos unidos por su lado AB (C y D están en semiplanos distintos respecto de la recta AB). El triángulo ABC tiene BAC=90º y AB=2AC. El triángulo ABD tiene ADB=90º y AD=BD. El segmento CD corta al segmento AB en O. Calcular BO si se sabe que AC=4.

4. Con una pesa de 2 y una de 5, en una balanza de platillos podemos pesar los valores 2, 3, 5 y 7. Si queremos poder pesar todos los valores enteros entre 1 y 4, ¿cuál es la mínima cantidad de pesas necesarias? ¿y si necesitamos pesar todos los números del 1 al 13? ¿Por qué con esa misma cantidad de pesas no se pueden formar todos los números del 1 al 14?

1. Probar que en el mundo hay dos personas que conocen a la misma cantidad de gente. (Suponemos que si A conoce a B entonces B conoce a A).

2. Se tiene un hexágono regular. Cada segmento con extremos en dos vértices del hexágono se pinta de rojo o de azul. Probar que hay un triángulo que tiene sus tres lados del mismo color.

3. Sea *ABC* un triángulo tal que $BC = 10$. Sean *M*, *N*, *P* los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CA* respectivamente. Sobre la prolongación de *NP* se considera *E* tal que $EP = PN$. Sobre la prolongación de *CM* se considera *D* tal que $DM = CM$. Hallar la longitud del segmento *DE*.

4. De los números naturales *A* y *B* se sabe que $B = (A^2 - 1) / 8$ y que el mínimo común múltiplo entre *A* y *B* es igual a 3720. Hallar *A* y *B*.

5. La suma de dos números es 30 y su producto es 10, ¿cuánto vale la suma de los inversos multiplicativos de los dos números?

6. Los sucesión de Fibonacci se definen de la siguiente manera:

$F_0=1$
$F_1=1$ y para $n\geq 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Probar que la cantidad de formas de embaldosar un pasillo de 2xN con baldosas de 2x1 es F_N.

7. Sea ABCD un trapecio con AB paralela a CD. DAB=100º, ABC=130º, AD=10 y AB=15. ¿Cuánto mide CD?

8. Alberto se encuentra en el centro de una circunferencia de radio 20. Berenice está afuera. En cada paso, Alberto se desplaza un metro en línea recta. Él puede elegir, antes de cada paso, la recta por la que se va a mover pero Berenice decide en cuál de los dos sentidos ha de moverse. ¿Puede Alberto salir de la circunferencia?

9. Demostrar que hay infinitos enteros positivos impares n para los cuales el número 2^n+n es un número compuesto (es decir, tiene algún divisor distinto de 1 y de sí mismo).

10. En el espacio hay n planos de modo que cada uno de ellos interfecta a exactamente otros 19. Determinar todos los posibles valores de n.

11. Sea ABC un triángulo y r la recta paralela a BC que pasa por A. Sea P el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ABC. Sea Q el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ACB. AB mide 7 y AC mide 8. Hallar la medida de PQ.