COLEGIO NACIONAL DE BUENOS AIRES
UBA

Extracto de

GANALE A LA MATEMÁTICA!

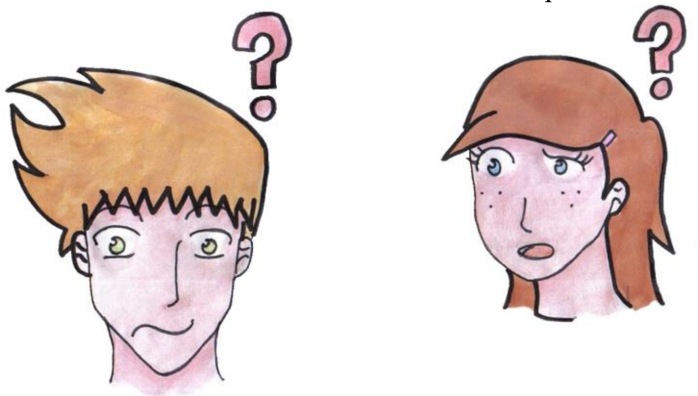
ANEXO MÓDULO

Autor: ***Beatriz C. Artesi*** *Revisión:* ***María Inés Cavallaro*** *Ilustraciones:* ***Elena V. Rombolá y Clara B. Rombolá***

Índice

PROLOGO
¿Quién no quiere ganar?

¿Qué se siente al escuchar **MATEMATICA**?
Algunos sentirán placer; otros, disgusto; la mayoría, terror; unos cuantos, emoción; varios, ansiedad; muchos, bronca y no pocos, desgano.
¿Pensaron alguna vez a qué se deben los sentimientos negativos?
Si ciertas cosas nos atormentan o simplemente nos incomodan, hay algo que debemos solucionar.
Claro, si nos sentimos bien no tenemos tanta necesidad de resolver lo que **no es un problema**.



La matemática no es más que un "juego" con una serie de reglas a seguir para poder **GANAR** ¿a quién no le gusta eso? Es una herramienta que el hombre generó para resolver situaciones concretas y a partir de ellas se fueron armando estructuras y relaciones con ciertas propiedades que vinculan a sus elementos.
Si no conocemos las reglas, por supuesto la matemática *nos puede ganar*. Ciertamente la casualidad también existe y quizás haya SUERTE, pero esa no es la idea.
A veces la matemática no nos da satisfacciones, es más, no queremos ni verla; pero sin embargo veo que leen el libro de Harry Potter sin pestañear (¡me muero!…Yo, con sólo ver tantas páginas, ya me cansé).
Ya ven. Cada uno tiene una predisposición especial para una cosa o para otra, pero aunque la matemática no sea la disciplina que más les guste, se pueden adquirir ciertas habilidades para sentirse más felices al encararla.
No hay que ser un matemático. Sólo se necesita tener una "mente dispuesta al razonamiento matemático".
Además de conocer las reglas, es importante recordarlas en el momento de aplicarlas. Por eso, les voy a dar unas cuantas "ideítas" mnemotécnicas que les van a servir para su camino en esta ciencia. Algunas de ellas las pude recopilar en mi andar (esa famosa *tradición oral*) y otras se me ocurrieron y me parecieron muy claras y divertidas.
Eso es lo que hay que encontrar, el gusto por lo que uno hace.

Porque si lo tenemos que hacer, es mejor hacerlo con alegría.

Mis años de trabajo frente a alumnos me enseñaron que aunque uno crea que es *el peor* en esto, puede revertir la situación y llegar a descubrir que *le entusiasma*.
No es lindo ver constantemente nuestras limitaciones.

¡A cambiar la historia!

Para comenzar con el emprendimiento hay que tener ganas de entender y ser obsesivo en la labor, consecuente con los logros y recordar siempre que:

Dura es la constancia,
La perseverancia logrará su fin.

CAPITULO 1 : ¿Para dónde caminamos?

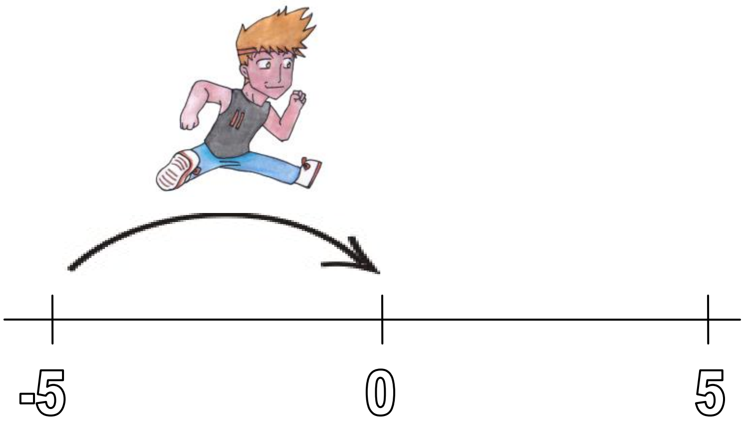
En el tratamiento de números enteros vemos que dos números opuestos tienen algo en común:
Su distancia al origen

Dicho de otro modo, ambos están a igual distancia del cero (aunque en sentido contrario).

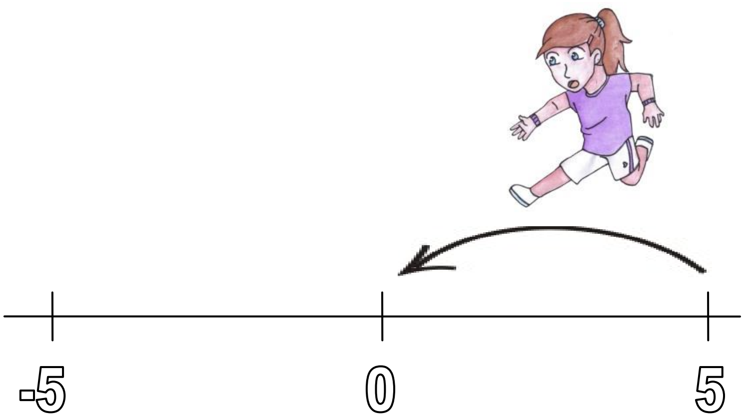
MÓDULO DE UN NÚMERO

¿Qué es el módulo de un número?

El módulo de un número es la distancia del número al cero.



Así, el módulo de -5 es 5, pues debo "caminar" 5 unidades para llegar desde el -5 al origen.
Se escribe: $|-5| = 5$



Del mismo modo, el módulo de 5 es 5.
Se escribe: $|+5| = 5$

¿Pueden decirme cuál es el módulo de +3?

Es 3

¿Por qué?

Pues debo "caminar" 3 unidades para llegar desde el origen al +3

¿Cómo se escribe?

Se escribe: $|+3| = 3$

Buenísimo!!!

Y el módulo de 0 es **0**, pues debo "caminar" **0** unidades para llegar desde el origen al 0.
Se escribe: $|0| = 0$

Esto nos permite llegar a las siguientes conclusiones:

a) si el número es positivo o cero, su módulo es el mismo número,
o sea $|a| = a$ si $a \geq 0$ por ejemplo: $|+3| = +3 = 3$

$|0| = 0$

b) si el número es negativo, su módulo es el opuesto del número,
o sea $|a| = -a$ si $a < 0$ por ejemplo: $|-5| = -(-5) = +5 = 5$

ATENCION: $-a$ no denota siempre un número negativo, depende del valor de a.
Decir $-a$ es referirse al opuesto de a

De todo esto surge la **definición de la operación módulo**

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

O sea que cualquiera sea el signo del número, el módulo nos devuelve como *resultado* un número siempre positivo o cero, que es su distancia al origen.
Hablamos de *resultado* porque *el módulo de un número es una operación*.

A EJERCITAR!

¿Se animan a buscar los resultados de las siguientes operaciones?

… Van las respuestas.

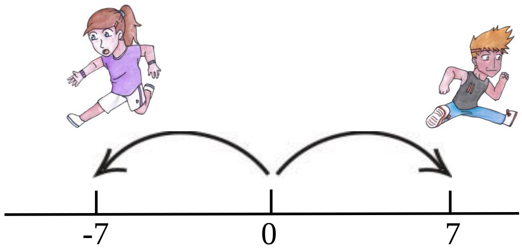
1. $|7-3|$	Rta.: 4
2. $\left|4-\frac{19}{4}\right|$	Rta.: $\frac{3}{4}$
3. $5+\left|2-\frac{2}{3}\right|-\frac{1}{3}$	Rta.: 6
4. $|1-3|5-14$	Rta.: -4
5. $-2|-3|+[4-(-2+3.|2|)]+5-2|4+5(-3)|$	Rta.: -23
6. $|3-15:3|-\{2-5.[4-3]+(32:4:|-2|)-|4|\}$	Rta.: 5
7. $-|-17+3|\frac{5}{28}-\frac{1}{2}[4-4(\frac{3}{8}:\frac{5}{4})]+\frac{3}{\left|1-\frac{1}{2}\right|}$	Rta.: $\frac{21}{10}$
8. $\frac{2}{9}-\frac{1}{9}.(-4)\left|2-\frac{9}{2}\right|-\left|\frac{2}{9}\right|$	Rta.: $\frac{10}{9}$
9. $|-3|2-2[5-|2-1|(-3)]$	Rta.: -10
10. $|2-3(7-4)|+\frac{(50+2):4-|2+7(-1)|}{-8}$	Rta.: 6

CAPITULO 2 : Ecuaciones con módulo

Procedimiento de resolución

¿Cuál es la solución de $|x| = 7$?

Debemos pensar cuál debe ser el número x para que su distancia al cero sea 7.



Para x=7 se verifica la ecuación y si x=-7 también, porque la distancia recorrida desde el origen hacia ambos números (7 y -7) es 7, que es lo pedido. Luego $S = \{7; -7\}$

Veremos un método para hallar la solución, usando la definición de módulo:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

De lo cual se desprende que: **El módulo de un número "a" es**

- **el mismo número "a"** *(si el número "a" es positivo o cero)*

  ó

- **el opuesto de "a"** *(si se trata de un número "a" negativo)*

Una forma de trabajo sería desglosar la igualdad en dos ramas, trabajando con:

- **el mismo número** *(si el número es positivo o cero)*

  ó

- **el opuesto** *(si se trata de un número negativo)*

$$|x| = 7$$

Consideremos dos condiciones iniciales

$Si \;\; x \geq 0$		$Si \;\; x < 0$
Aplicando la definición de módulo		
$x = 7$	ó	$-x = 7$
$x = 7$		$x = -7$

Diremos que la solución es $S = \{7; -7\}$

- Veamos esta situación $|x-1| = 4$,usando el proceso descripto

$Si \;\; x - 1 \geq 0 \;\; (x \geq 1)$		$Si \;\; x - 1 < 0 \;\; (x < 1)$
$x - 1 = 4$	ó	$-(x-1) = 4$
$x - 1 = 4$		$-x + 1 = 4$
$x = 4 + 1$		$-x = 4 - 1$
$x = 5$		$x = -3$

La solución es $S = \{5; -3\}$. La idea es trabajar con el mismo número o el opuesto y resolver las dos ecuaciones resultantes.

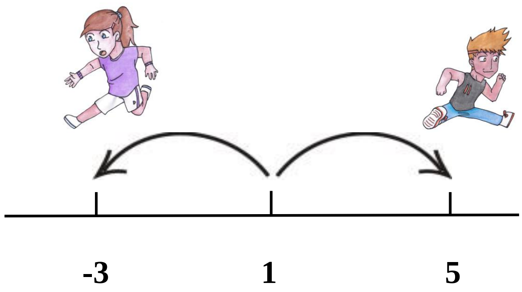
¿Qué significa gráficamente la expresión $|x-1|=4$?

En principio sabemos que hay una distancia que vale 4.
Miremos las soluciones obtenidas: x=5 ó x=-3.

¿Desde qué valor saltamos para "caer" hacia un lado en 5 y hacia el otro en -3?

Sugerencia: dibujemos la situación sobre la recta numérica.

Entre -3 y 5 hay 8 unidades, entonces mi salto parte desde la mitad:



desde 1.

Exacto!

Si relacionamos lo visto con nuestra ecuación $|x-1|=4$ vemos que esta expresión es equivalente a **buscar los x cuya distancia a 1 es igual a 4**.

En general, **la expresión** $|x-a|=b$ **significa "los números cuya distancia a "a" es "b"**.

A pensar!

Interpretar en términos de distancia y dar el conjunto solución en Q

1. $|x-3|=2$
2. $|x-12|=6$
3. $|x+7|=1$
4. $|x-10|=5$
5. $|x+1|=1$
6. $|x+5|=8$

…trabajen y luego comparen sus respuestas.

Aquí las respuestas:

1. Se buscan los x cuya distancia a 3 es igual a 2. S={1;5}
2. Escribir los números que distan 6 de 12. S={18;6}
3. Hallar los x cuya distancia a -7 es 1. S={−8;−6}
4. Encontrar los x que tienen una distancia a 10, de 5. S={15;5}
5. Pensar números cuya distancia a -1 es igual a 1. S={−2;0}
6. Buscar x que distan 8 de -5. S={−13;3}

Distancia de un número "x" a "a"

IMPORTANTE:
La **distancia de "x" a "a"** es igual al **módulo de la diferencia entre "x" y "a".**

$$d(x;a)=|x-a|$$

Con esto se ve la consistencia del concepto para $|x|=5$.

La expresión se puede escribir $|x-0|=5$, que caracteriza a los números cuya distancia al cero es igual a 5, como habíamos visto al comienzo.

Algunos ejercicios resueltos

- Veamos esta ecuación

$$3-|2-4x|=5$$
$$3-5=|2-4x|$$
$$-2=|2-4x|$$

Lo pensamos así:

$$|2-4x|=-2$$

¿Cómo sigue?

Esperen!
No se vayan. Lo resolvemos juntos.

Para esto recordemos
¿Qué es el módulo de "*a*"?

Es la distancia del número "*a*" al cero.

Perfecto.

Entonces, si es una distancia nunca puede ser igual a un número negativo, -2 en este caso.
Hemos llegado a un **ABSURDO**.
Luego, no hay valor de x que haga verdadera la expresión. La solución es vacía.

$$S=\phi$$

- Si se nos plantea ésta, usando la definición:

$$|2x+1|=3$$

$2x+1=3$ ó $-(2x+1)=3$

$$2x+1=3 \qquad -2x-1=3$$
$$2x=3-1 \qquad -2x=3+1$$
$$2x=2 \qquad -2x=4$$
$$x=1 \qquad x=\frac{4}{-2}$$
$$x=-2$$

Los dos valores hallados verifican la ecuación, luego la solución es

$$S=\{1;-2\}$$

- Ahora analicemos esta situación:

$$|x-5|=0$$

¿Es necesario desglosar la resolución en dos ramas?
Pensemos en el significado de módulo de un número igual a cero.

Significa que no tengo que saltar para ningún lado porque la distancia del número $x-5$ al origen es 0.
El número $x=5$ es la solución.

Genial!!

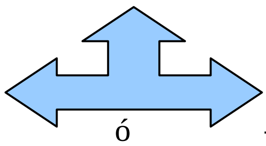
Si el módulo de un número es 0 entonces el número está en el origen de la recta numérica (no necesito "saltar" hacia ningún lado)
Si $|m|=0$ entonces $m=0$, en nuestro caso $m=x-5$, luego $x-5=0$, o sea $x=5$

$$S=\{5\}$$

¡ATENCION! **Hay un sólo número cuya distancia** a 5 **es cero**

Si trabajáramos como en el ejercicio anterior, usando la definición:

$$|x-5|=0$$



$x-5=0$ ó $-(x-5)=0$

$x-5=0$ $\qquad$ $-x=-5$

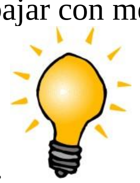
$x=5$ $\qquad$ $x=5$

$$S=\{5\}$$

Que es la solución que determinamos recién en dos pasos,

lo cual nos indica que antes de comenzar a trabajar con mecanismos adquiridos,

es necesario **PENSAR**.



CAPITULO 3 : Inecuaciones con módulo (y porqué no, ecuaciones)

Para encarar este tema, dediquémonos a las siguientes:
Situaciones alegres y no tan alegres ☹

¿Cuáles son los números racionales que verifican las siguientes ecuaciones e inecuaciones?
Se pide buscar el conjunto solución en Q.

A pensar …

1. $|x| = 0$
2. $|x| = 2$
3. $|x| = -4$
4. $|x\rangle 3$
5. $|x\rangle 0$
6. $|x\rangle -5$
7. $|x\langle 1$
8. $|x\langle -6$
9. $|x\langle 0$
10. $|x| \geq 7$
11. $|x| \geq -12$
12. $|x| \geq 0$
13. $|x| \leq 0$
14. $|x| \leq -8$
15. $|x| \leq 12$

Respuestas:

1. $S = \{0\}$
2. $S = \{-2;2\}$
3. $S = \phi$
4. $S = \{x \in Q / x < -3 \vee x > 3\}$
5. $S = Q - \{0\}$
6. $S = Q$
7. $S = \{x \in Q / x > -1 \wedge x < 1\} = \{x \in Q / -1 < x < 1\}$
8. $S = \phi$
9. $S = \phi$
10. $S = \{x \in Q / x \leq -7 \vee x \geq 7\}$
11. $S = Q$
12. $S = Q$
13. $S = \{0\}$
14. $S = \phi$
15. $S = \{x \in Q / x \geq -12 \wedge x \leq 12\} = \{x \in Q / -12 \leq x \leq 12\}$

Y si alguna de las respuestas no les coincide, aquí tienen las resoluciones.

Cuestiones resueltas:

Vamos a identificar ciertos grupos en esta serie de ejercicios.

1. $|x| = 0$ $\quad S = \{0\}$
2. $|x| = 2$ $\quad S = \{-2;2\}$
3. $|x| = -4$ $\quad S = \phi$
4. $|x|\rangle 3$ $\quad S = \{x \in Q / x < -3 \vee x > 3\}$
5. $|x|\rangle 0$ $\quad S = Q - \{0\}$
6. $|x|\rangle -5$ $\quad S = Q$
7. $|x|\langle 1$ $\quad S = \{x \in Q / x > -1 \wedge x < 1\} = \{x \in Q / -1 < x < 1\}$
8. $|x|\langle -6$ $\quad S = \phi$
9. $|x|\langle 0$ $\quad S = \phi$
10. $|x| \geq 7$ $\quad S = \{x \in Q / x \leq -7 \vee x \geq 7\}$
11. $|x| \geq -12$ $\quad S = Q$
12. $|x| \geq 0$ $\quad S = Q$
13. $|x| \leq 0$ $\quad S = \{0\}$
14. $|x| \leq -8$ $\quad S = \phi$
15. $|x| \leq 12$ $\quad S = \{x \in Q / x \geq -12 \wedge x \leq 12\} = \{x \in Q / -12 \leq x \leq 12\}$

Las ecuaciones con módulo:

1., 2. y 3. tienen que ver con ecuaciones con módulo, las que ya sabemos resolver y su solución es un conjunto finito, es más, su solución tiene a lo sumo dos elementos. Veamos…

Están contempladas las tres posibilidades:

- el módulo de un número igual *a cero*,
- el módulo de un número igual *a un número positivo*,
- el módulo de un número igual *a un número negativo*.

1. $|x| = 0$

   Debo pensar qué número está a distancia cero del origen.
   Lógicamente, el cero.

   $$S = \{0\}$$

2. $|x| = 2$

   Del mismo modo que en el ejercicio anterior, qué número está a distancia 2 del origen.
   Recordamos los saltos a ambos lados desde el origen, porque no tenemos indicado el sentido hacia el cual nos vamos a dirigir

   $$S = \{-2;2\}$$

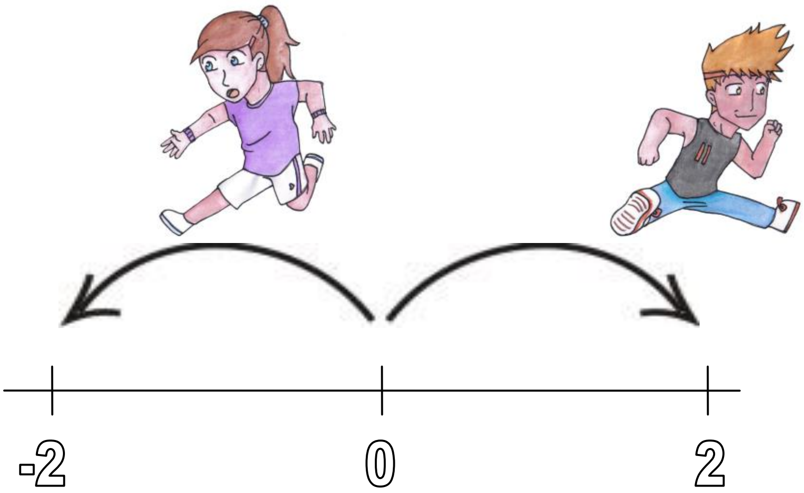
3. $|x| = -4$

   ¿Puede ser una distancia, negativa?
   Como eso no es posible digo que es un **ABSURDO**, no hay números que verifiquen lo pedido. $\quad S = \phi$

Las inecuaciones con módulo:

El resto de los planteos es un "atadito" de inecuaciones con módulo, que se resolverán pensando en una herramienta clave:

La distancia del número al origen.



1) Mayor y mayor o igual $|x| > b$ y también $|x| \geq b$, con b número racional.

- ***b positivo*.**

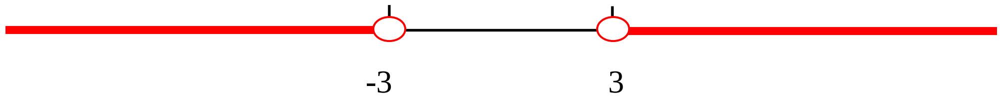
Tendremos en cuenta la inecuación **4.** y la **10.**

4. $|x|\rangle 3$

i) ¿Qué números se encuentran a una distancia al cero mayor que 3?

En la solución encontramos todos los números que están más alejados del cero que el 3 ("saltando" hacia la derecha) y que el -3 (hacia la izquierda).

El 3 no verifica la inecuación, pues su distancia al cero no es mayor que 3 (es igual a 3), por la misma razón el -3 tampoco.



Podemos caracterizar la solución en Q de acuerdo a la expresión: $x \in Q / x\langle -3 \vee x\rangle 3$ (4)

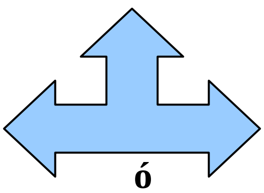
ii) Otra forma de trabajar es recordando la definición de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Estamos en condiciones de pensar del siguiente modo

$$|x|\rangle 3$$

Si $x \geq 0$ **ó** ***Si*** $x < 0$



$x\rangle 3$ $\qquad -x\rangle 3$

$x\rangle 3$ **ó** $x\langle -3$

.

En cada caso debemos buscar los x que verifican simultáneamente ambas condiciones (la condición inicial y la obtenida):

$x \geq 0$ y $x \rangle 3$ **ó** $x < 0$ y $x < -3$

Resulta $x \rangle 3$ **ó** $x \langle -3$

con lo cual también obtenemos la expresión (4) : $S = \{x \in Q / x < -3 \vee x > 3\}$

Trabajando de la misma forma para el ítem **10.**

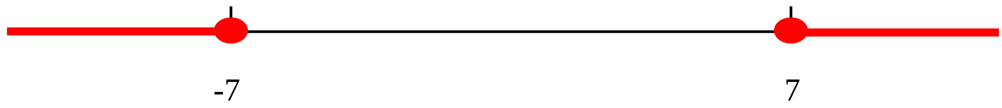
10. $|x| \geq 7$

i) El razonamiento del ejercicio **4.** nos sirve para resolver éste, también gráficamente.

Pero en nuestro caso el 7 verifica la inecuación, pues su distancia al origen es 7, luego x puede ser mayor o igual que 7.

¿Hay otro número cuya distancia al cero sea 7?

El -7, razón por la que también pertenece a la solución y todos los racionales que están a su izquierda pues su distancia a cero es mayor que 7.



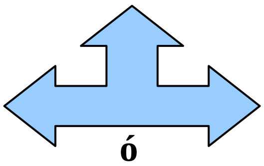
Se puede escribir: $x \in Q / x \leq -7 \vee x \geq 7$ (5)

ii) Razonando a partir de la definición de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

sería $|x| \geq 7$

Si $x \geq 0$ **ó** ***Si*** $x < 0$



$x \geq 7$ $-x \geq 7$

$x \geq 7$ **ó** $x \leq -7$

Otra vez buscamos los x que verifican simultáneamente ambas condiciones:

$x \geq 0$ y $x \geq 7$ **ó** $x < 0$ y $x \leq -7$

Resulta $x \geq 7$ **ó** $x \leq -7$

obtenemos la expresión (5), luego $S = \{x \in Q / x \leq -7 \vee x \geq 7\}$.

- ***b igual a cero.***

Ahora ocupémonos de las inecuaciones **5.** y **12.**

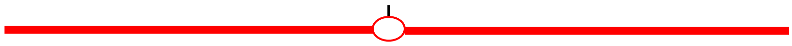
5. $|x| \rangle 0$

i) Como el módulo es una distancia, es siempre mayor o igual que cero.

Pedir que el módulo (que siempre es mayor o igual que cero) sea sólo mayor que cero, nos quita la posibilidad de que sea igual a cero, por lo cual será $x \neq 0$. Entonces la solución es cualquier número distinto de cero: $S = Q - \{0\}$

ii) Nos podemos remitir al razonamiento desde el enfoque gráfico.

Como se pide que la distancia al origen sea mayor que cero, podemos "saltar" hacia la derecha o izquierda del cero la longitud que queramos (pues lo único que pide es que sea mayor que cero).



0

sus elementos responden a la expresión:

$$x \in Q \,/\, x \langle 0 \vee x \rangle 0 \qquad (6)$$

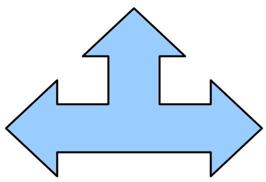
Lo cual es equivalente a plantear la solución recientemente encontrada: $S = Q - \{0\}$

iii) Pensemos en <u>la definición</u> de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Luego si $|x| \rangle 0$

Si $x \geq 0$ **ó** ***Si*** $x < 0$



$x \rangle 0$ $\qquad -x \rangle 0$

$x \rangle 0$ **ó** $x \langle -0$

$x \rangle 0$ **ó** $x \langle 0$

Otra vez buscamos los x que verifican simultáneamente ambas condiciones:

$x \geq 0$ y $x > 0$ **ó** $x < 0$ y $x < 0$

Resulta $x > 0$ **ó** $x < 0$

Que es la expresión (6), entonces x será cualquier racional distinto de cero.

$$S = Q - \{0\}$$

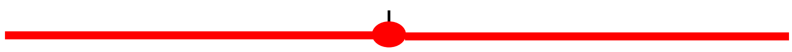
12. $|x| \geq 0$

i) Como el módulo es una distancia, es siempre mayor o igual que cero, que es lo que propone la inecuación.

Entonces cualquier número verifica la inecuación planteada.

$$S = Q$$

ii) Trabajando gráficamente podemos pensar la solución así:



0

Simbólicamente: $x \in Q \,/\, x \leq 0 \vee x \geq 0 \qquad (7) \quad S = Q$

iii) Razonando <u>usando la definición</u>:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La resolución sería $\qquad |x| \geq 0$

Si $x \geq 0$ **ó** ***Si*** $x < 0$

$x \geq 0$ $\qquad\qquad -x \geq 0$

$x \geq 0$ **ó** $x \leq -0$

$x \geq 0$ **ó** $x \leq 0$

Hallemos los x que verifican simultáneamente ambas condiciones:

$x \geq 0$ y $x \geq 0$ **ó** $x < 0$ y $x \leq 0$

Resulta $x \geq 0$ **ó** $x < 0$

Obtuvimos la expresión (7).

Luego x puede ser cualquier número racional, tanto positivo, negativo o cero.

$$S = Q$$

Vamos a generalizar un resultado válido para inecuaciones de este tipo, en lugar de pasar siempre por la definición, podemos usar la siguiente

PROPIEDAD:

Sea b un número no negativo $(b \geq 0)$, **si** $|x| \rangle b$ **entonces** $x \rangle b$ **ó** $x \langle -b$

Para organizarnos en la resolución de nuestros ejercicios, nos conviene unificar los esquemas, y en el caso de módulo trabajar con las bifurcaciones:

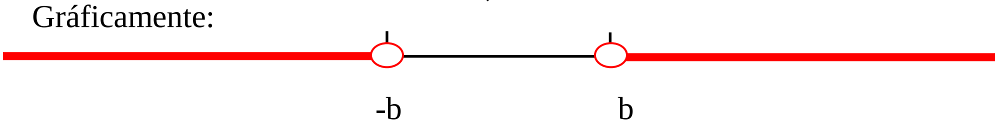
$|x| \rangle b$

ó

$x \rangle b$ $\qquad\qquad -x \rangle b$

$x \rangle b$ $\qquad\qquad x \langle -b$

Gráficamente:



Detectamos que los números que verifican la condición dada son los que se encuentran a la izquierda de $-b$ ó a la derecha de b.

La solución en Q es $\qquad S = \{x \in Q / x < -b \vee x > b\}$ $\qquad$ ***PROPIEDAD***

Para el caso del mayor o igual, enunciamos la siguiente

***PROPIEDAD*:**

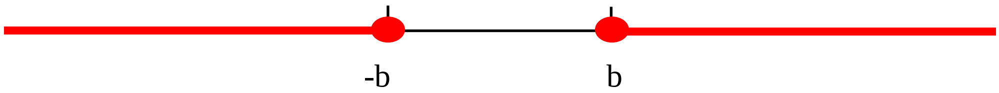
$\boxed{\textbf{Sea b un número no negativo } (b \geq 0)\textbf{, si } |x| \geq b \textbf{ entonces } x \geq b \textbf{ ó } x \leq -b}$.

$$|x| \geq b$$

ó

$x \geq b$	$-x \geq b$
$x \geq b$	$x \leq -b$

Gráficamente:



Los números que verifican la condición dada son los que se encuentran a la izquierda de –*b* ó a la derecha de *b*, incluídos *b* y -*b*.

La solución $S = \{x \in Q \,/\, x \leq -b \vee x \geq b\}$ ***PROPIEDAD***

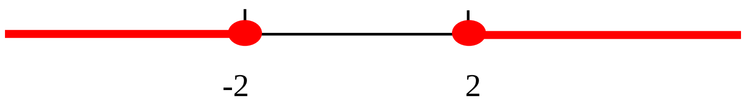
- Resolvamos la inecuación:

$$|x| \geq 2$$

Como dice la propiedad

ó

$x \geq 2$	$x \leq -2$



$$S = \{x \in Q \,/\, x \leq -2 \vee x \geq 2\}$$

2) Menor y menor o igual $|x| < b$ y también $|x| \le b$

- ***b positivo.***

Estudiemos la **7.** y la **15.**

7. $|x|\langle 1$

i) Remitiéndonos a los números cuya distancia al cero es menor que 1, desde el cero hacia la derecha vemos que verifican esta inecuación los menores que 1 (hablamos de positivos) y hacia la izquierda, los mayores que -1 (números negativos). El cero también sirve.

Por lo cual, todos los números entre -1 y 1, excepto ellos dos, forman parte de la solución.

Simbólicamente:

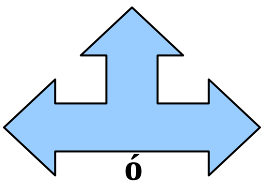
$$S = \{x \in Q / -1 < x < 1\} \qquad (8)$$

ii) Trabajando con la definición de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \ge 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Resolvamos $\qquad |x|\langle 1$

Si $x \ge 0$ **ó** ***Si*** $x < 0$

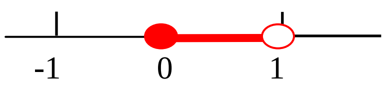


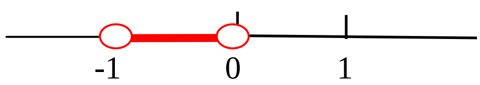
$x\langle 1 \qquad\qquad -x\langle 1$

$x\langle 1$ **ó** $x\rangle -1$

Hallemos los x que verifican simultáneamente ambas condiciones:

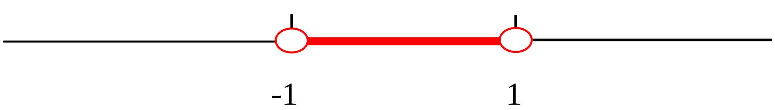
$x \ge 0$ y $x < 1$ **ó** $x < 0$ y $x > -1$





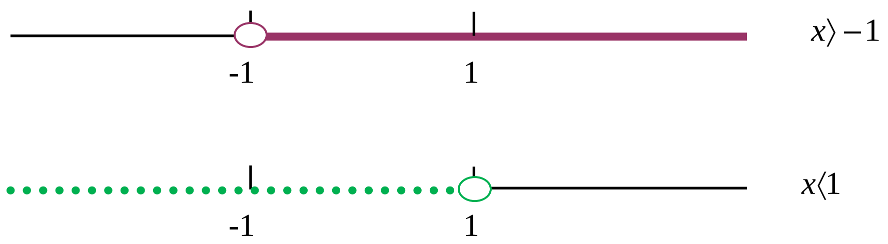
Resulta $\quad 0 \le x < 1$ **ó** $-1 < x < 0$

Resulta $\quad -1 < x < 0$ **ó** $0 \le x < 1$



La solución se expresa $\quad x \in Q / -1 < x < 1.$

Para facilitar la resolución podemos afirmar que este último resultado puede pensarse como la ***intersección*** de los conjuntos de números racionales simbolizados por: $x\rangle -1$ **y** $x\langle 1$ como se ve a continuación:



Como está vinculado por la **"y"**, usamos la **INTERSECCION** entre los conjuntos. lo que nos lleva a deducir que la solución es <u>lo pintado de ambos modos a la vez</u>, en este caso:

$S = \{x \in Q / x > -1 \wedge x < 1\}$ (8)

15. $|x| \leq 12$

i) Ya conocemos el razonamiento gráfico de estas inecuaciones, el 12 y el -12 están a distancia del origen igual a 12, por lo tanto ellos dos verifican la inecuación planteada, además de todos los que están entre ellos, por encontrarse a distancia del cero, menor a 12.

Su solución es $S = \{x \in Q / -12 \leq x \leq 12\}$

O sea: $x \geq -12 \wedge x \leq 12$

ii) Aplicando la propiedad:

$$|x| \leq 12$$

y

$x \leq 12$ | $x \geq -12$

Así $S = \{x \in Q / -12 \leq x \leq 12\}$.

- *b igual a cero*.

Trabajemos con los ítems **9. y 13.**

9. $|x|\langle 0$

¿Puede una distancia ser negativa?

¡Nunca! Es un ABSURDO.
Esto explica porqué su solución es vacía
$S=\phi$

13. $|x|\leq 0$

Al pedir que la distancia del *x* al origen sea menor o igual que cero, diremos que buscamos *x* que tal que su distancia al origen sea igual a cero (porque menor nunca será, al tratarse de un módulo, que representa una distancia).

Vemos que $S=\{0\}$

En general para las inecuaciones con módulo, con la relación de menor enunciaremos la siguiente

PROPIEDAD:

Sea b un número no negativo $(b\geq 0)$**, si** $|x|\langle b$ **entonces** $x\langle b$ **y** $x\rangle -b$

$|x|\langle b$

y

$x\langle b$ $x\rangle -b$

Gráficamente:

$S=\{x\in Q/-b<x<b\}$ ***PROPIEDAD***

Los números que verifican la condición dada son los que se encuentran entre –*b* y *b*.

Si tenemos un menor o igual:

PROPIEDAD:

Sea b un número no negativo $(b\geq 0)$**, si** $|x|\leq b$ **entonces** $x\geq -b$ **y** $x\leq b$.

$|x|\leq b$

y

$x\leq b$ $x\geq -b$

Gráficamente:

Son los números entre –*b* y *b*, incluídos éstos dos. $S=\{x\in Q/-b\leq x\leq b\}$ ***PROPIEDAD***

Debemos tener mucho cuidado cuando trabajemos con

inecuaciones con módulo, en relación al conector lógico que usaremos.

- ✓ Si trabajamos con $|x|\langle b$ **ó** $|x| \leq b$, el conector será la "y" ($\wedge$)
- ✓ Usaremos la "o" ($\vee$) si se nos presenta $|x| > b$ **ó** $|x| \geq b$

Además asociamos los conectores lógicos con las operaciones entre conjuntos:

"y" con **INTERSECCION (**lo pintado de ambos modos a la vez)

"ó" con **UNION** **(**lo pintado, no importa de qué modo)

Inecuaciones con módulo del tipo $|x| > b$**,** $|x| \geq b$**,** $|x| < b$ **y** $|x| \leq b$ ***con b menor que cero.***

Hasta ahora pedimos que *b* no sea negativo.
Bien, ahora vamos a ver qué ocurre cuando lo es.
Para esto veamos los ejemplos **6.** y **11.**, y por otro lado **8.** y **14.**

6. $|x|\rangle -5$

Buscar un número real que verifique lo pedido es pensar en un número cuya distancia al cero sea mayor que -5.

Pero si hablamos de módulo, hablamos de una distancia,

¿qué signo tendrá esa distancia?

Será no negativa.

Entonces ese módulo será siempre mayor o igual que cero, cualquiera sea el valor de *x* que se considere.

En símbolos:

Para cualquier racional se verifica que .... $|x| \geq 0$
Además sabemos que .... $0\rangle -5$,
Gracias a la transitividad resulta:

Para cualquier racional se verifica que $|x|\rangle -5$

Luego, si vale para cualquier número racional, todo número racional verifica lo pedido, por lo cual, cualquier número racional es solución, podemos decir:

$$S = Q$$

11. $|x| \geq -12$ **con el mismo razonamiento es** $S = Q$**, veamos:**

Para cualquier racional se verifica, que …… $|x| \geq 0$

y además es ………………..……. $0 \geq -12$ **,**

Gracias a la transitividad se verifica que,

Para cualquier racional se verifica, que $|x| \geq -12$

Luego $S = Q$

8. $|x| \langle -6$

¿Qué podrían decir acerca de la distancia?

Diremos que es un número no negativo, o sea, mayor o igual que cero.

¿Puede ser un número mayor o igual que cero, más chico que un número negativo?

No, porque si es no negativo entonces está a la derecha de cero o es cero.
Todo número más chico que un negativo está a la izquierda de cero, contradiciendo lo anterior.
Vemos que se genera un ABSURDO.

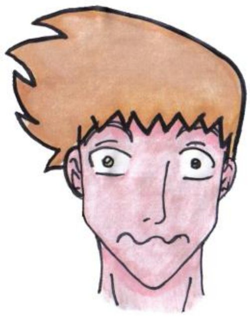
Por lo cual $S = \phi$

14. $|x| \leq -8$ Con un razonamiento análogo al anterior se explica que $S = \phi$

CAPITULO 4 : Un uso importante del módulo (potencias y raíces)

Supongamos que una variable "a" está afectada simultáneamente por una potencia y una raíz de igual exponente e índice respectivamente.

¿Siempre se pueden simplificar en Q, las potencias con las raíces, o mejor dicho los exponentes con los índices, si son iguales?



Para investigar esta cuestión, les propongo realizar la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 1

a) Dar el resultado, resolviendo las operaciones planteadas.
b) Intentar la resolución simplificando índice y exponente, cuando sea posible.
c) Extraer conclusiones en referencia a la pregunta formulada anteriormente.

1) $\sqrt[3]{3^3} =$
2) $\sqrt[9]{(-1)^9} =$
3) $\sqrt{4^2} =$
4) $(\sqrt{4}\ )^2 =$
5) $(\sqrt[3]{125}\ )^3 =$
6) $(\sqrt[3]{-1}\ )^3 =$
7) $(\sqrt[3]{27}\ )^3 =$
8) $\sqrt{(-5)^2} =$

Ahora sí, estudiemos los siguientes planteos, trabajando con igual índice y exponente, sea impar o par, considerando como radicando cualquier número, siempre que esté definida la operación:

i. $\sqrt[3]{a^3}$
ii. $(\sqrt[3]{a}\ )^3$
iii. $(\sqrt{a}\ )^2$
iv. $\sqrt{a^2}$

Hemos visto en los ejercicios que, si se genera un problema, es a causa del signo de *"a"*.

Comencemos por los exponentes impares.

- **Caso i**

En los casos de exponentes e índices impares, como producen resultados que mantienen el signo de la base y del radicando respectivamente, no se evidencia ninguna dificultad y se verifica que ambos son iguales a *"a"*, o sea, en esos casos se pueden simplificar exponente e índice:

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

- Veamos un ejemplo para radicandos negativos:

  $$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

  Al simplificar en la primera expresión (índice y exponente impar), el resultado sería el mismo:"-2"
- Ahora para radicandos positivos:

  $$\sqrt[3]{(+2)^3} = \sqrt[3]{+8} = +2 = 2$$

  Simplificando, obtenemos el mismo resultado: "2".
- También el radicando puede ser cero:

  $$\sqrt[3]{(0)^3} = \sqrt[3]{0} = 0$$

  Nos hubiera dado otra vez "0".

- **Caso ii**

La situación es análoga al Caso i, podemos simplificar exponente e índice.

$$(\sqrt[3]{a}\ )^3 = a$$

$$(\sqrt[3]{-8}\ )^3 = (-2)^3 = -8$$

Simplificando, el resultado coincide con el recién obtenido.

- **Caso iii**

$$(\sqrt{a}\ )^2 = a$$

Al figurar *"a"* como radicando, y siendo el índice par, para que esté definida la raíz cuadrada de "a" en Q, debe ser $a \geq 0$, (a no negativo)

Vemos que $\sqrt{-3}$ no tiene resultado en el conjunto de los números racionales, ya que no existe un racional que elevado a una potencia par dé negativo.

(Cosas Prohibidas)

Considerar a positivo o cero, nos garantiza que no tendremos problemas con la radicación de índice par, por aplicarse a números no negativos.

Por lo tanto se pueden simplificar en este caso la potencia y la raíz, así:

$$(\sqrt{a}\ )^2 = a$$

Ejemplos:

- Como las únicas posibilidades para este caso son radicandos no negativos, trabajaremos con radicando positivo:

  $$(\sqrt{+3}\ )^2 = \sqrt{+3}.\sqrt{+3} = \sqrt{(+3).(+3)} = \sqrt{+9} = +3 = 3$$

  Si en la primera expresión simplificamos en lugar de operar, también obtenemos 3.
- Ahora con radicando cero:

  $$(\sqrt{0}\ )^2 = (0)^2 = 0$$

  Obteniendo también cero si hubiéramos simplificado la potencia y la raíz.

Es grande la tentación de simplificar siempre que nos encontramos frente a operaciones inversas.

Pero antes de actuar es imprescindible PENSAR.

Sin embargo hay resultados no esperados.

La fuerza de la costumbre nos lleva a reaccionar muchas veces automáticamente según los procedimientos aprendidos para números naturales.

La aparición de los enteros resolvió una enormidad de cuestiones, pero exige frente a esto que actuemos ***RAZONANDO CUIDADOSAMENTE*** ante cada decisión.

En situaciones delicadas hay que ser cauteloso para avanzar con paso firme.

Estudiemos la cuestión que falta:

- **Caso iv** $\sqrt{a^2}$

Como hemos visto que: ***Las potencias de exponente par "se comen los signos",***

cualquiera sea el signo de "a", resulta $a^2 \geq 0$

Por lo cual la raíz siempre estará definida y su resultado será no negativo, para todo "a".
Pero si por alguna razón a alguien se le ocurriera simplificar ese índice con el exponente,

(espero que no sea alguno de ustedes)

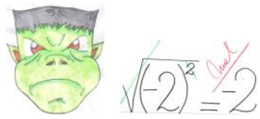
en la situación de ser $a\langle 0$, el resultado no sería el esperado:

- Analicemos el siguiente ejercicio:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

El resultado de la operación es **2**

SI COMETIÉRAMOS ESTE HORROOOOR !!!!!□□□



Obtenemos **-2**, y todos sabemos que **2** no es lo mismo que **-2**.

- Fíjense si resolvemos $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$
- Y este $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$

Cualquiera sea el valor de "a" (negativo, positivo o cero), $\sqrt{a^2}$ es un número no negativo, que coincide con la distancia de *"a"* al origen. El resultado es un número siempre positivo o cero (o sea no negativo).

Hace un ratito vimos que existe una operación matemática que aplicada a un número nos devuelve su distancia al cero.

¿Se acuerdan cuál es?

Claro, esa operación es el **módulo.**

Esta herramienta es ideal para expresar el resultado de las operaciones planteadas en el caso iv.

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Así, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ y $\sqrt{0^2} = |0| = 0$ obteniendo los mismos resultados que antes

Resumiendo:

i. $\sqrt[3]{a^3} = a$

ii. $(\sqrt[3]{a}\ )^3 = a$

iii. $(\sqrt{a}\ )^2 = a$ con $a \geq 0$ único caso en que exigimos que *"a"* no sea negativo

por la necesidad planteada para hallar raíces de índice par, en Q.

iv. $\sqrt{a^2} = |a|$, potencia de exponente par <u>"adentro"</u> de la raíz de índice par

Esto se puede generalizar para exponentes e índices naturales iguales, pares o impares cualesquiera.
Y la herramienta que queremos destacar

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|,\ con\ n\ par}$$

"n" natural

<u>ACTIVIDAD 2</u>

a) Dar el resultado de los siguientes ejercicios, resolviendo las operaciones planteadas.
b) Intentar la resolución simplificando índice y exponente, cuando sea posible.
c) ¿Cómo se explica lo obtenido haciendo referencia a lo visto anteriormente?
Sugerencia: Ubicar el ejercicio en alguno de los casos estudiados

1) $\sqrt[3]{(-2)^9} =$
2) $\sqrt{2^4} =$
3) $(\sqrt[6]{64}\ )^4 =$
4) $\sqrt[3]{2^6} =$
5) $\sqrt{(-1)^6} =$
6) $\sqrt[6]{4^3} =$
7) $\sqrt{(-1)^{10}} =$
8) $(\sqrt[3]{-8}\ )^6 =$

Resuelvan el ítem a)
Ahora los otros dos ítems, comparen sus respuestas con las mías.
Aquí va la resolución del ítem b) y c)

1) $\sqrt[3]{(-2)^9} = \sqrt[3]{[(-2)^3]^3} = (-2)^3 = -8$ **…..*Caso i*** *(impares, exponente adentro de la raíz)*
2) $\sqrt{2^4} = \sqrt{(2^2)^2} = \left|2^2\right| = |4|$ **…………….*Caso iv*** *(pares, exponente adentro de la raíz)*
3) $(\sqrt[6]{64}\ )^4 = [(\sqrt{\sqrt[3]{4^3}}\ )^2]^2 = [(\sqrt{4}\ )^2]^2 =$ **….*Caso i*** *(impares, exp. adentro de la raíz)*
$= 4^2 = 16$ **………………….………..….*Caso iii*** *(pares, exponente afuera de la raíz)*
4) $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$ **……………..….*Caso i*** *(impares, exponente adentro de la raíz)*
5) $\sqrt{(-1)^6} = \sqrt{[(-1)^3]^2} = |(-1)^3| = |-1| = 1$ **…*Caso iv*** *(pares, exponente adentro de la raíz)*
6) $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3}} = \sqrt{4} = 2$ **………….…...*Caso i*** *(impares, exponente adentro de la raíz)*
7) $\sqrt{(-1)^{10}} = \sqrt{[(-1)^5]^2} = |(-1)^5| = |-1| = 1$ **...*Caso iv*** *(pares, exponente adentro de la raíz)*
8) $(\sqrt[3]{-8}\ )^6 = [(\sqrt[3]{-8}\ )^3]^2 = [-8]^2 = 64$ **…*Caso ii*** *(impares, exponente afuera de la raíz)*

MODULO : Ajustando lo aprendido

Definición de módulo

El módulo de un número es la distancia que existe desde dicho número al origen.

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

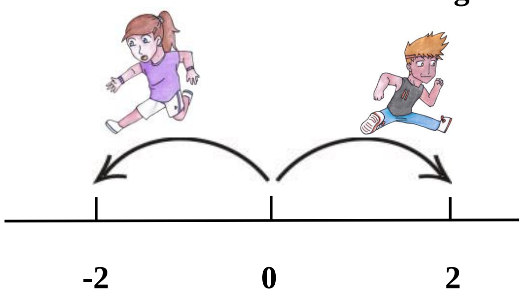
Resolución de ecuaciones con módulo (Procedimiento)

Cuando tenemos que resolver ecuaciones con módulo, primero nos dedicamos a "ubicar" el módulo que se presenta, en un miembro de la igualdad, para que una vez obtenido $|ALGO| = b$ sea el momento de pensar cuánto vale ese *ALGO*.

Analizaremos las ecuaciones con *b mayor o igual a cero* (los otros casos fueron estudiados en particular).
Método gráfico:
Nos valemos de la idea de los "saltos" a derecha y a izquierda desde el cero.

- Supongamos la ecuación $|3x-5| = 2$, llamemos $ALGO = 3x-5$

La distancia del número al origen.



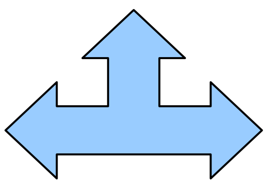
Trabajamos simultáneamente con dos resoluciones paralelas, teniendo en cuenta que ese *ALGO* tiene los posibles valores indicados por los "saltos":

$$\begin{array}{rcl} ALGO = 2 & \textbf{ó} & ALGO = -2 \\ 3x-5 = 2 & \textbf{ó} & 3x-5 = -2 \\ 3x = 2+5 & \textbf{ó} & 3x = -2+5 \\ x = \dfrac{7}{3} & \textbf{ó} & x = 1 \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{7}{3} ; 1 \right\}$$

Usando la definición:

$$|3x-5| = 2$$



$$\begin{array}{lcl} 3x-5 = 2 & & 3x-5 = -2 \\ 3x = 2+5 & & 3x = -2+5 \\ x = \dfrac{7}{3} & & x = 1 \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{7}{3} ; 1 \right\}$$

Distancia de "x" a "a"

La distancia de un número "x" a "a" es el módulo de la diferencia entre ellos.

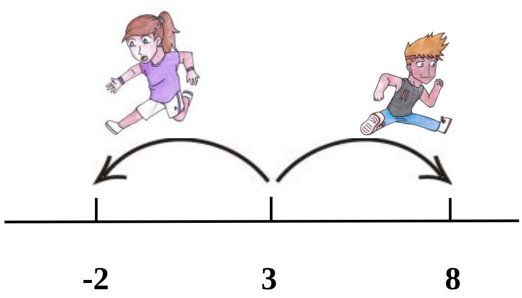
$$d(x;a) = |x - a|$$

Si tenemos una ecuación del tipo $|x - a| = b$ la podemos resolver desde las dos ópticas, gráficamente o usando la definición de módulo.

- Sea la ecuación $|x - 3| = 5$

Gráficamente:

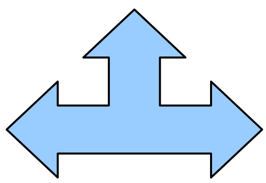
Pensamos en que el módulo de la diferencia de dos números es igual a la distancia entre ellos, entonces la distancia entre x y 3 es 5. Podemos pensar que ***nos paramos en 3*** y saltamos hacia los costados 5 unidades. Hacia la derecha será 3+5=8 y hacia la izquierda 3-5=-2



$S = \{-2;8\}$

Usando la definición de módulo:

$$|x - 3| = 5$$



$x - 3 = 5$ | $x - 3 = -5$

$x = 5 + 3$ | $x = -5 + 3$

$x = 8$ | $x = -2$

$$S = \{-2;8\}$$

Resolución de inecuaciones con módulo (Procedimiento)

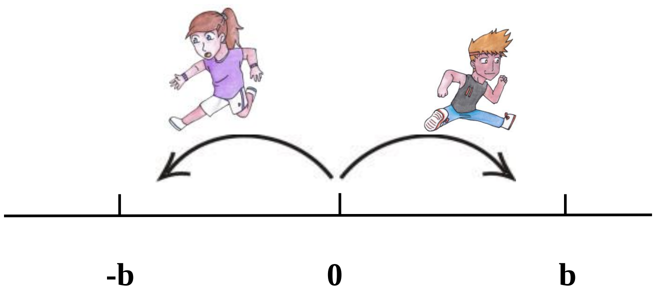
Para trabajar con inecuaciones con módulo del tipo

1. $|x| < b$
2. $|x| \le b$
3. $|x| > b$
4. $|x| \ge b$

siendo b *mayor o igual que cero*, haremos la distinción entre la resolución para los ítems 1 y 2 y luego para 3 y 4.

- *Items 1 y 2* $\quad |x| < b \quad$ y $\quad |x| \le b$

Gráficamente, de nuevo vamos a "saltar":



Para $|x| < b$, la distancia de x a cero es menor que b, luego mi salto es más corto (no llega a "b" ni a "-b")

Tendremos los valores entre –b y b, o sea $S = \{x \in Q / -b < x < b\} = \{x \in Q / x > -b \wedge x < b\}$

y para $|x| \le b$ las soluciones estarán también entre –b y b, incluyendo ambos valores (-b y b):

$S = \{x \in Q / -b \le x \le b\} = \{x \in Q / x \ge -b \wedge x \le b\}$.

ATENCIÓN: el conector lógico es la "y"

Usando la propiedad:

En ambos ítems pensamos en ***los números situados entre los opuestos –b y b***, resolviendo paralelamente las inecuaciones:

$$|x| < b$$

$$-b < x \quad \textbf{y} \quad x < b$$

$$S = \{x \in Q / -b < x < b\} = \{x \in Q / x > -b \wedge x < b\}$$

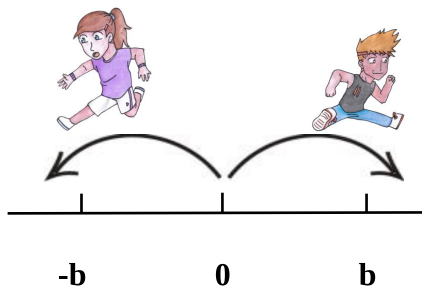
$$|x| \le b$$

$$-b \le x \quad \textbf{y} \quad x \le b$$

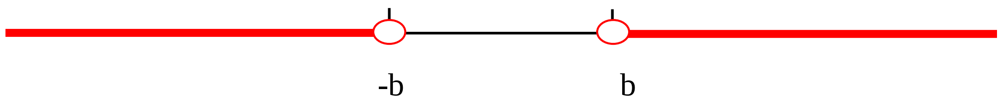
$$S = \{x \in Q / -b \le x \le b\} = \{x \in Q / x \ge -b \wedge x \le b\}.$$

- *Items 3 y 4* $|x| > b$ y $|x| \geq b$

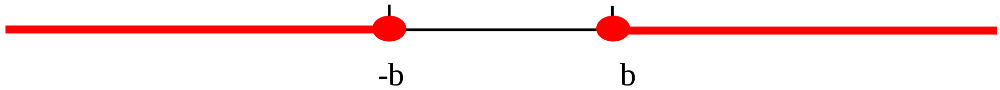
  Gráficamente



Esta vez saltaremos más allá de –b y de b como se ve en la figura (incluyendo –b y b en el caso 4).
Luego sea $|x| > b$ entonces la solución será $S = \{x \in Q / x < -b \vee x > b\}$



y para $|x| \geq b$ tendremos $S = \{x \in Q / x \leq -b \vee x \geq b\}$.



ATENCIÓN: el conector lógico es la "o"

Usemos la propiedad:
Consideremos los opuestos –b y b.
Trabajaremos con ***los números que NO ESTAN ENTRE –b y b***, resolviendo paralelamente las inecuaciones

$$|x| > b$$

$$x < -b \quad \textbf{ó} \quad x > b$$

$$S = \{x \in Q / x < -b \vee x > b\}$$

$$|x| \geq b$$

$$x \leq -b \quad \textbf{ó} \quad x \geq b$$

$$S = \{x \in Q / x \leq -b \vee x \geq b\}.$$

- Sea la inecuación:

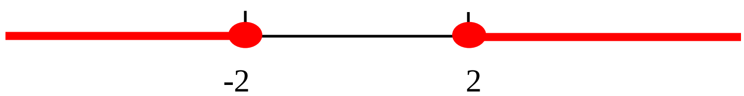
$$x^2 \geq 4$$

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{4}$$

$$|x| \geq \sqrt{4}$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \textbf{ó} \quad x \geq 2$$



$$S = \{x \in Q / x \leq -2 \vee x \geq 2\}$$

TRABAJO PRACTICO

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

AHORA, A ENTRENARSE!!

Resolver.
Interpretar gráficamente, si fuera posible, las expresiones finales que contengan módulo ej:1,2,5,7,9 y 10.

1) $\lvert x-3\rvert = 6$	$S=\{9;-3\}$
2) $\left\lvert x+\frac{2}{3}\right\rvert = \frac{1}{3}$	$S=\{-1/3;-1\}$
3) $\lvert 3-x\rvert = 2$	$S=\{5;1\}$
4) $\lvert 2x+40\rvert = 6$	$S=\{-23;-17\}$
5) $5-\lvert x\rvert = 8-\lvert -1\rvert$	$S=\phi$
6) $4+\lvert 2x-1\rvert -3 = 6$	$S=\{3;-2\}$
7) $4-3\lvert x+4\rvert \le 5$	$S=Q$
8) $\lvert 2x-3\rvert - \frac{1}{2} > 4$	$S=\{x\in Q / x<-3/4 \vee x>15/4\}$
9) $40-3\lvert x+1\rvert > 4-\left\lvert 3-\frac{2}{3}\right\rvert -1$	$S=\{x\in Q / x<109/9 \wedge x>-127/9\}$ $S=\{x\in Q / -127/9<x<109/9\}$
10) $\left\lvert x-\frac{1}{5}\right\rvert 4-2<10-\lvert 7-90\rvert$	$S=\phi$
11) $5x^2-3=4-2x^2$	$S=\{-1;1\}$
12) $2-\sqrt{x}<5-10$	$S=\{x\in Q / x>49\}$
13) $7-(2-2x)^2-\lvert 4-7\rvert > -22+5\lvert 3-(-1)^2\rvert$	$S=\{x\in Q / x<3 \wedge x>-1\}$ $S=\{x\in Q / -1<x<3\}$
14) $(3x)^2-3x^2+1>55$	$S=\{x\in Q / x<-3 \vee x>3\}$
15) $(5-\sqrt{x})^2+4=13$	$S=\{4;64\}$
16) $7+x^2-2>4-3x^2$	$S=Q$
17) $\sqrt{x^2+1}-2<5-10$	$S=\phi$
18) $2+\sqrt{5-x^2}>4$	$S=\{x\in Q / x<1 \wedge x>-1\}$ $S=\{x\in Q / -1<x<1\}$

…Y ESTAS MÁS DIFÍCILES … (optativas)

19) $5x-\lvert x-2\rvert = 4$	$S=\{1\}$
20) $3-\lvert 3+x\rvert < 2x$	$S=Q^+$

MIS APUNTES:

COLEGIO NACIONAL DE BUENOS AIRES
UBA