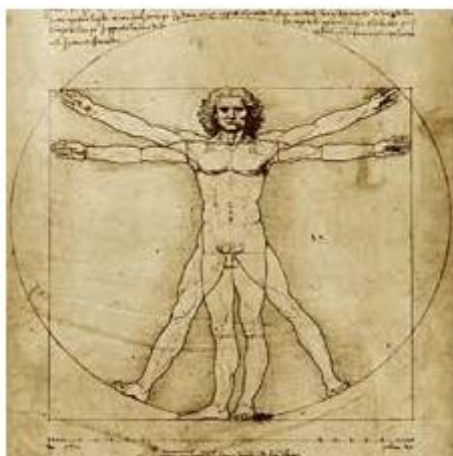




Colegio Nacional de Buenos Aires

# MATEMÁTICA DE 2do AÑO

## Guía de Trabajos Prácticos



## **Índice**

<b>Trabajo Práctico 0</b>	<b>3</b>
<b>Trabajo Práctico 1</b>	<b>8</b>
<b>Trabajo Práctico 2</b>	<b>19</b>
<b>Trabajo Práctico 3</b>	<b>35</b>
<b>Trabajo Práctico 4</b>	<b>45</b>
<b>Trabajo Práctico 5</b>	<b>50</b>
<b>Respuestas</b>	<b>59</b>
<b>Programa de Segundo Año</b>	<b>64</b>
<b>Trabajo Práctico 0 (Tercer Año)</b>	<b>65</b>
<b>Problemas Olimpíadas 1er nivel</b>	<b>70</b>

**1.** Simplificar las siguientes expresiones usando propiedades de la potenciación:

a)  $2^5 \cdot 2^2 =$

f)  $5^0 =$

b)  $2^6 : 2^3 =$

g)  $2^4 \cdot 2^{-2} + 2^2 =$

c)  $5^{-5} \cdot 5^2 =$

h)  $\frac{27^{-1}}{3^{-3}} =$

d)  $(5^5)^5 =$

i)  $\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{-3}}{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3\right]^{-1}} =$

e)  $5^{-2} \cdot \frac{1}{5} =$

j)  $\frac{(4.3)^{-6} 8^4}{9^3} =$

**2.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Para todo  $x \in \mathbb{Q}$ :  $x^0 = 0$

b) Para todo  $x \in \mathbb{Q}$ :  $x^0 = 1$

c) Para todo  $x \in \mathbb{Q}$ :  $(x + 2)^3 = x^3 + 2^3$

d) Para todo  $a \in \mathbb{Q}$ :  $(a + a^2)^2 = a^2 \cdot (1 + 2a + a^2)$

e) Para todo  $x \in \mathbb{Q}$ :  $\sqrt{x^2} = x$

f) Para todo  $x \in \mathbb{Q}$ :  $\sqrt[3]{x^3} = x$

g)  $0^0 = 0$

h)  $0^0 = 1$

i)  $a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$ , para todo  $a \in \mathbb{Q}$ , para todo  $b \in \mathbb{Q} - \{0\}$

**3.** Resolver:

a)  $\sqrt{1 - (-15)} + \sqrt{-3^2 - (-3)^2(-2)} =$

b)  $\frac{\sqrt{36} \cdot (-1)^0 \sqrt{(-4)^2}}{\frac{4}{3^2} \cdot \frac{32}{7}} =$

**4.** Simplificar llevando a su mínima expresión:

a)  $\frac{3^{x(x+1)}}{(3^x)^x} =$

b)  $\frac{x^{p+q} \cdot x^{p \cdot q}}{x^p \cdot (x^q)^p} = \quad (x > 0)$

**5.** a) Sabiendo que  $a$  y  $b$  son números racionales tales que:  $a < 0$  y  $b > 0$ , calcular:

$$i) \left| \frac{1}{a} \right|$$

$$ii) |(-a).b|$$

$$iii) |a.b|$$

b) Si  $a > 1 + b$ , calcular:

$$i) |b + 1 - a| \quad ii) |(a - b)^2|$$

$$iii) |b - a + 1|$$

**6.** Resolver en  $\mathbb{Q}$ :

$$a) |x - 4| = 8$$

$$b) |x^2 - 5| = 4$$

$$c) (-x + 2)^3 = 1$$

$$d) \frac{x^2 - 1}{3} - 1 = 0$$

$$e) 8: x + 3 = -1$$

$$f) -\frac{x}{3} + 1 - \frac{2x}{3} = 0$$

$$g) \frac{x - 0,5}{(-0,6)^{-1}} = \frac{x}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1}}$$

$$h) \frac{\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2}{2} = 8$$

**7.** Resolver en  $\mathbb{Q}$

$$a) 2x - 1 < 6$$

$$b) 3x + 1 \geq 4x - 3$$

$$c) \frac{2x - 9}{7} > 0$$

$$d) 19 > 4 - 3x > 10$$

$$e) \frac{5}{3} - x^2 \geq -\frac{1}{9}$$

$$f) (x - 1)^2 \cdot (-2) + 1 > (x - 1) \cdot x - 3x^2$$

$$g) \frac{(x - 3)^2}{2} \leq \frac{8}{25}$$

$$h) \left(x + \frac{1}{5}\right)(-3x + 9) \geq 0$$

$$i) |x| \cdot (-2) < -8$$

$$j) \frac{2x + \frac{1}{8}}{4} \cdot (-3) + 7 > -2$$

**8.** Resolver en  $\mathbb{Q}$ :

$$a) 2(x - 1) \cdot (x + 0,5) + 5 = 3x^2 - (x + 1)^2$$

$$b) (0,3x - 1) : 2 + 8x = (x - 1)(x + 1) - x(x - 1,2)$$

$$c) \left|2x - \frac{1}{2}\right| \cdot 3 = 2 - |3^2 - 2|$$

$$d) 5 : (2x - 4) + 9 = 18$$

$$e) \frac{(2x - 3)^2 - 25 - 16}{\sqrt{36}} = -\frac{16}{3}$$

$$f) \frac{x^2}{\left(-1 - \frac{3}{4}\right)^{-1}} = -\frac{25}{14} \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : 2^{-1}}$$

$$g) \frac{(x^{-3} \cdot x^2)^{-1}}{x^{-2} : x^4} = 128$$

$$h) (2x + 1) \cdot (3x - 2) < 0$$

$$i) \left| 3x - \frac{3}{4} \right| < 0$$

$$j) -\frac{1}{2}|x+1| < -\frac{1}{3} - \left| -1 - \frac{1}{2} \right|$$

$$k) 1 + \frac{2}{3}|x+1| > -\frac{5}{4}\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$l) |x+5| \cdot (x^2 - 4) < 0$$



$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

**9.** Escribir como producto:

$$a) a^2 b + 2 a b^2$$

$$b) \frac{5}{4}c^3 - 25c^2 + \frac{5}{8}c^4$$

$$c) 25 - 10a + a^2$$

$$d) 25 - b^2$$

$$e) a^2 + a + ab + b$$

$$f) a^4 - 1$$

$$g) 3x(2x-1)^2 - 2(2x-1)$$

$$h) 81 - x^4$$

$$i) 9a^2 - 30a + 25$$

**10.** Resolver en Q

$$a) x^3 = x$$

$$b) 3(2x+5)^2 - 2(2x+5) = 0$$

$$c) 5x(3x+1)^4 - (3x+1)^5 = 0$$

$$d) (2x^2 - 18)^2 = 32(2x^2 - 18)$$

$$e) x^2 + 2x = 0$$

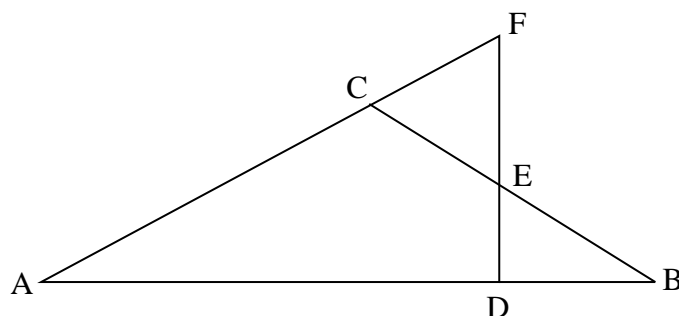
$$f) 3x^2 + 15x \geq 0$$

$$g) x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$h) x^2 - 4x + 4 = 9$$

**11.** Calcular el ángulo que forman dos de las bisectrices de un triángulo sabiendo que el tercer ángulo mide  $80^\circ$ .

**12.** En la figura,  $FD \perp AB$  y  $|\hat{A}| = |\hat{B}|$ . Demostrar que el triángulo CEF es isósceles.



**13.** En un triángulo ABC se trazan las bisectrices de B y C que se cortan en P. Por P, se traza una paralela a BC que corta al lado AB en D y a AC en E. Si  $BD = 5$  cm y  $CE = 7$  cm. Hallar la medida de DE. Justificar.

**14.** Indicar si las siguientes afirmaciones se cumplen: Siempre, a veces, nunca. Justificar debidamente usando un ejemplo o una demostración o argumento general cuando corresponda.

- a) si un punto P equidista de los extremos de un segmento AB, entonces P pertenece a la mediatriz de  $\overline{AB}$ .
- b) Si la suma de los ángulos exteriores de un polígono (considerando uno por vértice) es  $360^\circ$ , entonces es un hexágono.
- c) Si la suma de los ángulos interiores de un polígono es  $360^\circ$ , entonces es un cuadrilátero.
- d) Si un triángulo tiene dos de sus medianas congruentes, entonces es isósceles.
- e) En un paralelogramo, las diagonales están incluidas en las bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.
- f) Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces es un rectángulo.
- g) Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, entonces es un rombo.
- h) Un cuadrado es rombo.

**15.** Probar que en un triángulo rectángulo, la mediana correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos isósceles. (Sugerencia: desde los vértices, trazar paralelas a los catetos y estudiar el cuadrilátero obtenido).

**16.** En un triángulo rectángulo, un ángulo mide  $70^\circ$ . Calcular la medida del ángulo que forman la altura y la mediana correspondientes a la hipotenusa.

**17.** En el trapecio isósceles PQRS, su altura y la bisectriz del ángulo SPQ se cortan formando un ángulo de  $70^\circ$ . ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores del trapecio isósceles? Justificar.

**18.** En el rectángulo ABCD, M es el punto medio del lado AB, sabiendo que la medida de AB es el triple de la medida de AD. Además su perímetro es 22 cm, hallar el área y el perímetro del triángulo CMD.



La base media de un triángulo es:

.....

La base media de un paralelogramo es:

.....

La base media de un trapecio es:

.....

**19.** Indicar:

- a) cuántas bases medias tiene un triángulo y cuáles son sus características.
- b) cuántas bases medias tiene un paralelogramo y cuáles son sus características.

c) cuántas bases medias tiene un trapecio y cuáles son sus características.

**20.** En el triángulo equilátero ABC, se consideran P punto medio de AB, Q punto medio de BC y R punto medio de AC.

a) Probar que el triángulo PQR es equilátero.

b) Si el perímetro del ABC es 27 cm, hallar el área de ABC y de PQR.

**21.** En el cuadrado ABCD se consideran P punto medio de  $\overline{AB}$ ; Q punto medio de  $\overline{BC}$ ; R punto medio de  $\overline{CD}$  y S punto medio de  $\overline{AD}$ .

a) Estudiar qué tipo de cuadrilátero es PQRS, justificando la respuesta.

b) Sabiendo que el área de PQRS es de  $36 \text{ cm}^2$ , calcular el área y el perímetro de ABCD.

## RESPUESTAS

Ejercicio 1: a)  $2^7$ ; b)  $2^3$ ; c)  $5^{-3}$ ; d)  $5^{25}$ ; e)  $5^{-3}$ ; f) 1; g)  $2^3$ ; h) 1; i) 1; j)  $3^{-12}$

Ejercicio 3: a) 7; b)  $189/16$

Ejercicio 4: a)  $3^x$ ; b)  $x^a$

Ejercicio 5: a) i)  $-1/a$ ; ii)  $-a.b$ ; iii)  $-a.b$ ; b) i)  $a-b-1$ ; ii)  $(a-b)^2$ ; iii)  $a-b-1$

Ejercicio 6: a)  $S=\{-4, 12\}$ ; b)  $S=\{-3, -1, 1, 3\}$ ; c)  $S=\{1\}$ ; d)  $S=\{-2, 2\}$ ; e)  $S=\{-2\}$ ; f)  $S=\{1\}$ ; g)  $S=\{0, 25\}$ ; h)  $S=\{-9, 15\}$

Ejercicio 7: a)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x < 7/2\}$ ; b)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x \leq 4\}$ ; c)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x > 9/2\}$ ; d)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / -5 < x < -2\}$ ;

e)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / -4/3 \leq x \leq 4/3\}$ ; f)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x > 1/5\}$ ; g)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / 11/5 \leq x \leq 19/5\}$ ;

h)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / -1/5 \leq x \leq 3\}$ ; i)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x < -4 \text{ o } x > 4\}$ ; j)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x < 95/16\}$

Ejercicio 8: a)  $S=\{-5\}$ ; b)  $S=\{-10/139\}$ ; c)  $S=\emptyset$ ; d)  $S=\{41/18\}$ ; e)  $S=\{0, 3\}$ ; f)  $S=\{-10/7, 10/7\}$ ;

g)  $S=\{2\}$ ; h)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / -1/2 < x < 2/3\}$ ; i)  $S=\emptyset$ ; j)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x < -14/3 \text{ o } x > 8/3\}$ ; k)  $S=Q$ ; l)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / -2 < x < 2\}$

Ejercicio 9: a)  $ab(a+2b)$ ; b)  $5c^2(1/4c - 5 + 1/8c^2)$ ; c)  $(5-a)^2$  ó  $(a-5)^2$ ; d)  $(5-b)(5+b)$ ;

e)  $(a+1)(a+b)$ ; f)  $(a-1)(a+1)(a^2+1)$ ; g)  $(2x-1)(6x^2-3x-2)$ ; h)  $(3-x)(3+x)(9+x^2)$ ; i)  $(3a-5)^2$

Ejercicio 10: a)  $S=\{-1; 0; 1\}$ ; b)  $S=\{-5/2; -13/6\}$ ; c)  $S=\{-1/3; 1/2\}$ ; d)  $S=\{-5; -3; 3; 5\}$ ; e)  $S=\{-2; 0\}$ ; f)  $S=\{x \in \mathbb{Q} / x \leq -5 \text{ o } x \geq 0\}$ ; g)  $S=\{2\}$ ; k)  $S=\{-1; 5\}$

Ejercicio 11:  $130^\circ$  Ejercicio 13: 12 cm.

Ejercicio 14: a) Siempre. Considerar los triángulos que determinan P, A, B y el punto medio de  $\overline{AB}$ .

b) A veces. También se verifica esa suma en los demás polígonos. Considerar algún ejemplo.

c) Siempre. Considerar  $180^\circ(n-2) = 360^\circ$ . d) Siempre. Una propiedad útil para demostrarlo es que las medianas de un triángulo se cortan en un punto (llamado "baricentro") que divide a cada una de ellas en su tercera y dos terceras partes.

e) A veces. Se puede ilustrar con ejemplos.

f) A veces. Considerar que podrían no cortarse en sus puntos medios.

g) A veces. Considerar que podrían no cortarse en sus puntos medios.

h) Siempre. Ver definiciones.

Ejercicio 16:  $50^\circ$

Ejercicio 17: P y S miden  $40^\circ$ , Q y R miden  $140^\circ$

Ejercicio 18: A:  $\frac{27}{2} \text{ cm}^2$ , P: 19.82 cm

Ejercicio 20: b)  $A(ABC) = 35.07 \text{ cm}^2$ ,  $A(PQR) = 8.77 \text{ cm}^2$

Ejercicio 21: b): Área =  $72 \text{ cm}^2$ , Perímetro: 33.94 cm

Números reales

Hasta ahora hemos trabajado en el conjunto de los números racionales que indicamos con  $\mathbb{Q}$ .

**Un número  $p$  es racional si y sólo si existen dos números enteros  $a$  y  $b$**

**( $b \neq 0$ ) tales que  $p = \frac{a}{b}$**

La expresión decimal de un número racional puede ser **finita o infinita periódica**.

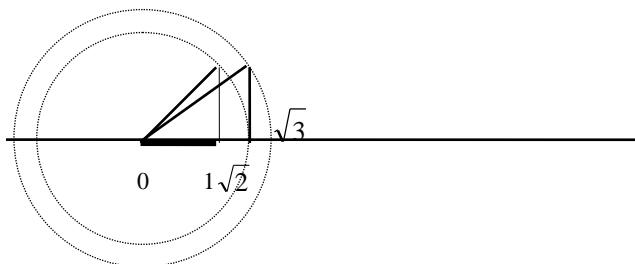
Ejemplos:

- ♦  $2,35 = \frac{235}{100} = \frac{47}{20}$  (expresión decimal finita)
- ♦  $2,353535... = 2,3\overline{5} = 2 + \frac{35}{99} = \frac{198 + 35}{99} = \frac{233}{99}$  (expresión decimal periódica pura)
- ♦  $2,35555... = 2,3\overline{5} = 2 + \frac{35 - 3}{90} = 2 + \frac{32}{90} = 2 + \frac{16}{45} = \frac{90 + 16}{45} = \frac{106}{45}$   
(expresión decimal periódica mixta)

Se verifican las siguientes propiedades:

- 1) Entre dos números racionales siempre hay otro racional. (Se dice que  $\mathbb{Q}$  es un conjunto **denso**)
- 2) A cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero existen puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

Por ejemplo, si se dibuja un triángulo rectángulo isósceles con cateto 1, su hipotenusa, por el Teorema de Pitágoras, es  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Se puede probar que  $\sqrt{2}$  no puede escribirse como cociente de dos números enteros, luego no es un número racional. Sin embargo existe un punto en la recta que se corresponde con  $\sqrt{2}$ . También podemos representar en la recta puntos que se correspondan con  $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ , etc.





Si intentamos obtener las cifras decimales de  $\sqrt{2}$  , veremos que no se repiten periódicamente.

Aquí les presentamos 100 decimales de  $\sqrt{2}$  , obtenidos con el programa Mathematica.

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073  
24784621070388503875343276415727

Existen otros números cuya expresión decimal consta de infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Por ejemplo:

Obtenemos  $\sqrt{3}$  con 100 decimales

1.73205080756887729352744634150587236694280525381038062805580697945193  
30169088000370811461867572485757

$\sqrt{5}$  con 100 decimales

2.23606797749978969640917366873127623544061835961152572427089724541052  
0925637804899414414408378782275

$\pi$  con 200 decimales

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781  
640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223  
172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196

Los números que llevados a la forma decimal tienen infinitas cifras decimales que NO se repiten periódicamente no pueden escribirse como la razón de dos números enteros, es decir, no son racionales. Estos números constituyen el conjunto de los números **irracionales** que indicaremos con **I**.

Llamaremos conjunto de números reales y lo indicaremos con **R** a la unión del conjunto de los racionales con los irracionales.

$$R = Q \cup I$$

Se cumple que:

**A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.**

1. Descubrir la regla de generación de los siguientes números irracionales y escribí las seis cifras siguientes:

0,121122.....

5,1020030004.....

0,1234567891011.....

2. Proponer un número racional y otro irracional entre 2,3 y 2,333.

3. Idem para  $\sqrt{5}$  y 2,2.

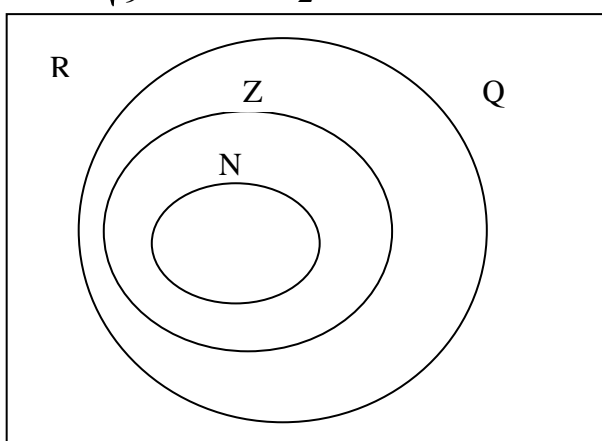
4. Indicar cuáles de las siguientes expresiones representan números reales:

a)  $\sqrt{6}$       b)  $-\sqrt{9}$       c)  $-\sqrt{-25}$       d)  $\sqrt{1-68}$

e)  $-\sqrt[5]{-32}$       f)  $\sqrt[4]{-16}$       g)  $\sqrt{5+1}$

5. Ubicar los números que se dan a continuación en el diagrama de Venn:

$-3$ ;  $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ;  $-\pi$ ;  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ;  $\sqrt[3]{-8}$ ;  $0$ ;  $3\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{-9}$ ;  $3,14159$ ;  $\sqrt{0,09^{-1}}$



6. a) Ordenar de menor a mayor:

$-\sqrt[3]{2}$ ;  $\pi$ ;  $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ ;  $3,2$ ;  $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ ;  $2\sqrt{2}$ ;  $-\frac{7}{5}$ ;  $-\sqrt{2}$ ;  $3,1$ ;  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

b) Señalar entre los números que se ordenaron, aquellos que sean irracionales.

c) Indicar si entre los anteriores existen pares de números opuestos.

7. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Indicar un argumento que fundamente la respuesta.

- a) La suma de dos números irracionales es irracional.
- b) El producto de dos números irracionales es irracional.
- c) La suma de un número racional y de uno irracional es irracional.
- d) El producto de un número racional y de uno irracional es irracional.

8. Los siguientes números irracionales son conocidos como números metálicos de aplicación en el arte y el diseño. Representarlos en la recta numérica en forma exacta utilizando en cada caso una unidad adecuada.

Número de plata:  $\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2}$

Número de oro:  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Número de bronce:  $\sigma_{Br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

## Valor absoluto o módulo de un número real

(Vale la misma definición y propiedades que en Q)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Se deduce que el módulo de todo número real siempre es mayor o igual que cero

### Propiedades muy importantes

Si  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ :

$$|a| \leq k \Leftrightarrow a \leq k \wedge a \geq -k$$

$$|a| > k \Leftrightarrow a > k \vee a < -k$$



**9.** Resolver sin calculadora. Expresar el resultado en forma exacta. (Sin aproximaciones)

a)  $|3,14 - \pi| + 3,14$

b)  $|3,14 - \pi| + 3,14 + \frac{\pi}{2}$

c)  $|\sqrt{2} - 1| - |-\sqrt{2}|$

d)  $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2|$

**10.** Resolver en R mentalmente:

a)  $|x - 2| \geq 0$

b)  $|x - 2| > 0$

c)  $|x - 2| \leq 0$

d)  $|x - 2| < 0$

e)  $|-x + 13| \geq -4$

f)  $|-x + 13| > -4$

g)  $|-x + 13| \leq -4$

h)  $|-x + 13| < -4$

i)  $(x + 10)^2 \geq -4$

j)  $x^4 \leq -5$

k)  $(-x - 5)^2 > -2$

l)  $(-2x - 1/2)^2 < -1$

## **INTERVALOS DE NÚMEROS REALES**

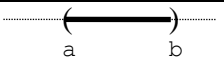
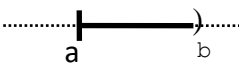

Como los números reales pueden ponerse en correspondencia con los puntos de una recta y recíprocamente, podemos interpretar que un segmento representa un conjunto de números reales.

Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ , llamaremos intervalo cerrado  $a, b$  y lo indicaremos **[a,b]** al conjunto de números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.


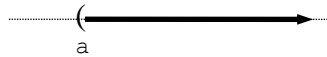
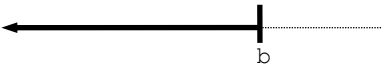
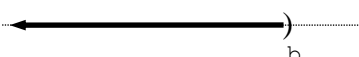
Gráficamente un intervalo cerrado corresponde a un segmento.

$$\text{-----} \underset{a}{|} \text{-----} \underset{b}{|} \text{-----} \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

También se han establecido nombres y notaciones para otros conjuntos de números reales:

Nombre	Notación	Definición	Representación
Intervalo abierto a,b	$(a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Intervalo semiabierto a derecha o semicerrado a izquierda	$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
Intervalo semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha	$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	

El concepto de intervalo se generaliza para representar semirrectas con o sin su origen.

Notación	Definición	Representación
$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	

#### Observaciones:

- ♦ El símbolo “ $\infty$ ” se lee “infinito” y no representa un número. Cuando se escribe “ $+\infty$ ” se está expresando que dado un número cualquiera, en el conjunto hay otro mayor. Si se escribe “ $-\infty$ ”, se quiere indicar que dado un número cualquiera, en el conjunto hay uno menor.
- ♦ Por convención, cuando trabajamos con el símbolo “ $\infty$ ”, colocamos un paréntesis

11. I) Indicar a qué conjunto de números reales nos referimos al escribir:

$$a) (0, +\infty) \quad b) (-\infty, 0] \quad c) (-\infty, +\infty) \quad d) (-\infty, 0)$$

II) Resolver:

$$a) \mathbb{R} \cap \emptyset = \quad b) \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q} = \quad c) \emptyset \cup \mathbb{R} = \quad d) \mathbb{Q} \cap I =$$

12. Representar aproximadamente en la recta y expresar el resultado utilizando intervalos:

$$\begin{array}{ll} a) [-1, 5) \cap \mathbb{R}^+ = & f) (-\infty, \pi) \cap [-\pi, +\infty) = \\ b) (-1, 4] \cap [3, 6] = & g) (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) = \\ c) (-1, 4] \cup [3, 6] = & h) (-\infty, -1) \cap (0, +\infty) = \\ d) [-3, 3] \cap (0, +\infty) = & i) (-\pi, \sqrt{2}] \cup [-\pi; 1, 4] = \\ e) (-\infty, \pi] \cap [\pi, 5) = & j) (-\pi, \sqrt{2}] \cap [-\pi; 1, 4) = \end{array}$$

### RADICACIÓN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

13. Indicar en qué subconjunto de  $\mathbb{R}$  (máximo en el sentido de la inclusión) son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{x^2} = x & \\ b) \sqrt{x^2} = -x & \\ c) \sqrt[3]{x^3} = x & \\ d) \sqrt[3]{x^3} = -x & \\ e) \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 & \\ f) \sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 & \end{array}$$

**Conclusión:**

$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt[n]{x^n} = \dots\dots\dots$

si  $n$  es natural par

$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt[n]{x^n} = \dots\dots\dots$

si  $n$  es natural impar

Como **sólo** se puede simplificar exponente e índice de una raíz de índice par si se sabe que el radicando es no negativo, debemos recordar que:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x^2|} = \sqrt{|x \cdot x|} = \sqrt{|x| \cdot |x|} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

$\uparrow$   
 Como  $x^2 \geq 0$ ,  
 resulta  
 $|x^2| = x^2$

$\uparrow$   
 Definición  
 de cuadrado

$\uparrow$   
 El módulo  
 de un  
 producto es  
 = al producto  
 de los  
 módulos

$\uparrow$   
 Definición  
 de cuadrado

$\uparrow$   
 Puedo simplificar  
 exponente e índice porque el  
 radicando es no negativo

14. Escribir sin radicales: ( $x \in \mathbb{R}$ )

a)  $\sqrt{(x-1)^2}$       b)  $\sqrt{(2-\pi)^2}$       c)  $\sqrt[5]{(x+6)^5}$       d)  $\sqrt[3]{(4-x)^3}$

15. Resolver sin calculadora. Expresar el resultado en forma exacta. (Sin aproximaciones)

a)  $\sqrt{(1,4-\sqrt{2})^2} + |-1,4| =$       b)  $\sqrt{(\sqrt{3}-1,8)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1,8)^3} =$

c) sabiendo que  $a \in \mathbb{R} \wedge a > 3$        $\sqrt{(3-a)^2} + \sqrt[3]{(3-a)^3} =$

d) sabiendo que  $a \in \mathbb{R} \wedge a < 3$        $\sqrt{(3-a)^2} + \sqrt[3]{(3-a)^3} =$

16. Expresar utilizando intervalos, el conjunto de valores de x para el cual las siguientes expresiones corresponden a números reales.

a)  $\sqrt{3x}$       b)  $\sqrt[3]{x-2}$

c)  $\sqrt{x^{-1}}$       d)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e)  $\sqrt{-x^5}$       f)  $\sqrt{(-x)^2}$

g)  $\sqrt[3]{x}$       h)  $\sqrt{x^3}$

i)  $\sqrt{(1-x)^4}$       j)  $\sqrt{(1-x)^3}$

17. Resolver las siguientes ecuaciones y expresar el conjunto solución, en  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  :

a)  $x^3 - x = 0$

b)  $x^3 = 2x$

c)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

d)  $x^2 - 6x + 9 = 16$

e)  $x^3 + 1 = -4$

f)  $(x+1)^2 - 5 = 0$

g)  $(3-x) \cdot (7-x^2) = 0$

h)  $\left| \frac{1}{2} - x \right| + \sqrt{2} = 0$

i)  $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 1} = \frac{1}{2}x + 1$

j)  $\sqrt{x} = -1$

k)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$

l)  $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$

m)  $\sqrt{21 + \sqrt{12 + \sqrt{14 + \sqrt{x}}}} = 5$

n)  $\sqrt{x^2 - x - 2} + x = 5$

**18.** Se pide expresar cada uno de los siguientes conjuntos de números reales utilizando intervalos, siempre que sea posible:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - x \geq 0\}$$

$$G = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x+1|}{x^2} \leq 0\right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - x > 0\}$$

$$H = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 3}{x + \pi} > 0\right\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - x \leq 0\}$$

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x^2}{x^2 + 1} < 0\right\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - x < 0\}$$

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x-1|}{|3x-2|} > 0\right\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \geq x^2\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - x^2 < 0\}$$

### **Potencia de exponente fraccionario**

Si  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $\frac{p}{q}$  es una fracción, se define:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

**19. a)** Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

$$\text{i) } \left( \frac{\sqrt{3^{-3}} \cdot \frac{1}{81}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^{-2}}} \right)^{-\frac{2}{5}}$$

$$\text{ii) } \left[ \frac{(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{10}} \cdot (8x)^{\frac{1}{2}}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{iii) } \sqrt[5]{\left(\frac{a^{-2}b^3}{a^3 \cdot b^{-2}}\right)^{-1}} \cdot \left(\frac{a^{-3} \cdot b^3}{a^3 b^3}\right)^{-1} \quad (a>0, b>0)$$

**b)** Reducir ambos miembros a expresiones más simples utilizando propiedades de la potenciación y resolver la ecuación resultante:

$$2 \cdot \left( \frac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2}}{0,5 \cdot x} \right)^2 = \sqrt[3]{\frac{x^{-1}}{2^{-3}}} \quad (x \neq 0)$$

**Para operar con radicales**



**20.** Reducir a la mínima expresión:

a)  $\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} =$

b)  $\sqrt{12} + 4\sqrt{75} - 6\sqrt{48} =$

c)  $\sqrt{108} - (3\sqrt{192} - 2\sqrt{243}) =$

d)  $\sqrt{10} + \sqrt{10^3} + \sqrt{10^5} =$

e)  $\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{\sqrt{600}}{5} - 5\sqrt{0,06} =$

f)  $2 \cdot (5 - 3\sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 3)^2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} =$

g)  $\sqrt{\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt[8]{4} - \sqrt[4]{32} =$

h)  $2\sqrt{54} : (-3\sqrt[3]{18}) =$

**21.** El **número de oro**  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  que ya era conocido por los pitagóricos como número místico, se obtiene a partir de calcular la razón entre la diagonal de un pentágono regular y el lado del mismo. Demostrar que el cuadrado del número de oro es igual al número de oro aumentado en una unidad.

**22.** Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones y en los casos en los que aparecen variables, hacer las restricciones necesarias para que existan dichas expresiones.

a)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{a}{\sqrt{a}}$

c)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

d)  $\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

e)  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

f)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

g)  $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2y}}$

h)  $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} =$

**23.** Racionalizar los numeradores de las siguientes expresiones:

a)  $\frac{\sqrt{2 \cdot (x+h)} - \sqrt{2x}}{h}$

b)  $\frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h}$



**24. Calcular:**

$$a) \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{3}{25}} - \sqrt{12} =$$

$$d) \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{49}} =$$

$$b) \frac{(\sqrt{2}-1)^2 - \frac{3}{2}}{1-\sqrt{8}} =$$

$$e) \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2 - \frac{1}{2}}{1-\sqrt{27}} =$$

$$c) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-1}$$

**25. Verificar las siguientes identidades:**

$$a) \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = -\frac{9}{5}$$

$$b) \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{27}}\right) = \frac{10}{3}$$

$$c) \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$$

**26. Dada la fórmula**  $A = \frac{x}{1+x+x^2}$  **calcular**  $A$  **si:**

$$a) x = \sqrt{2}$$

$$b) x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**27. Resolver en**  $\mathbb{R}$  **:**

$$a) -(\sqrt{2}x + 3\sqrt{3})^2 + 5 > -22$$

$$b) x - \sqrt{5}x - \sqrt{125} < 0$$

**28. Decidir si las siguientes pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:**  $(\sqrt{3}-1)$  cm;  $(\sqrt{3}+1)$  cm y  $\sqrt{8}$  cm. Justificar.

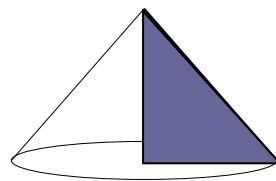
**29. Calcular el perímetro y el área de un trapecio isósceles sabiendo que cada uno de los lados paralelos miden**  $\sqrt{18}$  cm **y**  $\sqrt{2}$  cm **y que la altura del mismo es de**  $\sqrt{7}$  cm.

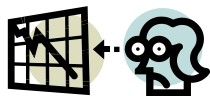
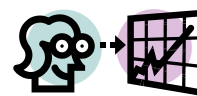
**30. Calcular la superficie de un rectángulo cuya base mide**  $\sqrt{18}$  cm **y la diagonal**  $5\sqrt{2}$  cm.

31. ¿En cuánto aumenta la diagonal de un cuadrado cuando su lado aumenta una unidad?
32. a) Un cuadrado tiene lado **b**; ¿por qué factor habrá que multiplicar a **b** para que el área del cuadrado sea el doble?
- b) Un cubo tiene arista **b**; ¿por qué factor habrá que multiplicar a **b** para que el volumen del cubo sea el doble?
33. Calcular la medida de la arista de un cubo que tiene el mismo volumen que una esfera de radio 5 cm.
34. En una circunferencia de radio  $r$  se inscriben un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono regular.  
Hallar el lado y la apotema de cada uno en función del radio de la circunferencia.  
Completar la siguiente tabla:

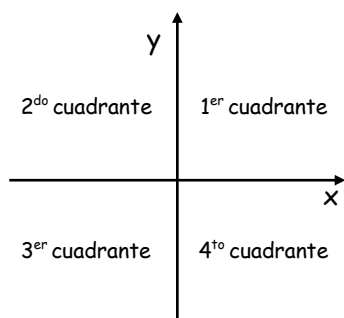
<i>polígono regular</i>	<i>lado</i>	<i>apotema</i>	<i>perímetro</i>	<i>área</i>
<i>triángulo</i>				
<i>cuadrado</i>				
<i>hexágono</i>				

35. Calcular el perímetro y el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de área  $16\pi \text{ cm}^2$ . Expresar el resultado en función de  $\sqrt{3}$
36. Hallar el área total y el volumen del cono que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de su cateto menor, sabiendo que la hipotenusa mide 10cm y que un cateto es los  $\frac{3}{4}$  del otro. ( $A = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$        $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ )



FuncionesSistemas de coordenadasRecordamos que...

Un sistema de coordenadas es un sistema de referencia que nos permite ubicar puntos en el plano. En Matemática y Física suele usarse un sistema de ejes perpendiculares en cuya intersección se ubica el 0 para cada uno de los ejes. Este sistema se conoce como sistema de ***ejes cartesianos ortogonales***.

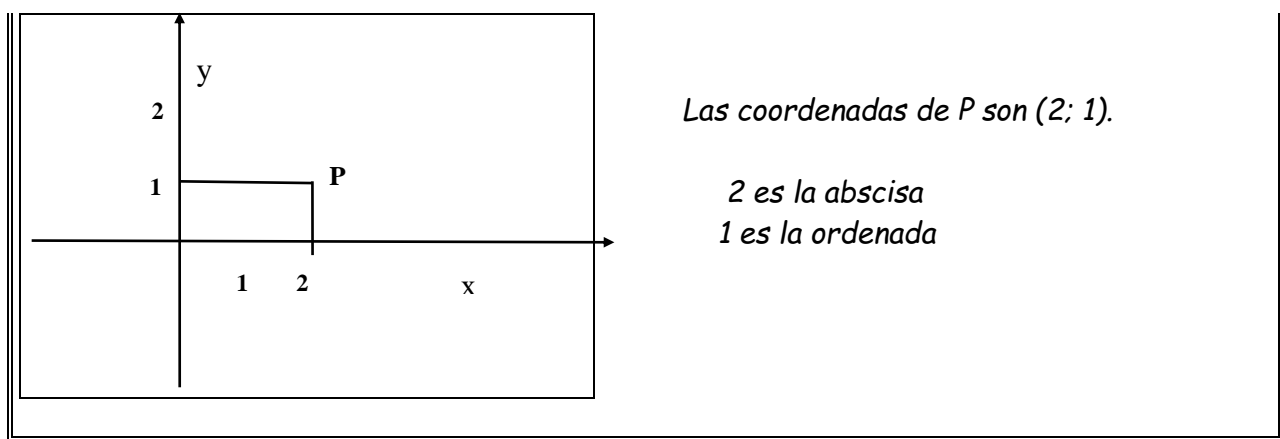


Al eje vertical también podemos llamarlo eje de *ordenadas* o eje de las “y”.

Al eje horizontal también podemos llamarlo eje de *abscisas* o eje de las “x”.

Ambos ejes son rectas numéricas. Las escalas utilizadas en cada eje pueden ser distintas, pero siempre respetando en cada eje la unidad elegida.

Todo punto del plano queda identificado mediante un par ordenado de números (a; b). La primera componente se representa sobre el eje x y la segunda sobre el eje y. El punto es la intersección de las rectas paralelas a los ejes que pasan por a y por b. Tales números reciben el nombre de ***abscisa*** y ***ordenada***, en ese orden. Esos valores son las ***coordenadas*** del punto.



1. a) Ubicar en un sistema de ejes cartesianos los siguientes puntos:

$$A = (-3; 5) \quad B = (5; -3) \quad C = \left(4; \frac{3}{2}\right) \quad D = (-7; -5)$$

$$M = (0; -3) \quad P = \left(0; \frac{1}{2}\right) \quad Q = (0; 0) \quad R = (6; 0) \quad S = (-5; 0)$$

b) En un sistema de ejes cartesianos, representar todos los puntos que tienen abscisa 3

c) Ubicar en un sistema de ejes cartesianos todos los puntos que tienen ordenada -5.

d) Para cada uno de los ítems b) y c), escribir tres pares ordenados.

e) ¿A qué cuadrante o cuadrantes pertenecen los puntos que tienen por abscisa un número mayor que 0?

Completar:

(0; y) Si la abscisa de un punto es 0, o sea,  $x = 0$ , el punto se ubica sobre el eje de las .....

(x; 0) Si la ordenada de un punto es 0, o sea,  $y = 0$ , el punto se ubica sobre el eje de las .....

2. a) En un sistema de ejes cartesianos, sombrear la zona que corresponde a los puntos (a; b) del plano que cumplen con esta condición:  $a < 0$  y  $b > 0$ .

b) ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la zona sombreada?

$$A = (-7; -3) \quad B = (0; 0) \quad C = (-2; 4)$$

3. Determinar en qué cuadrante está ubicado un punto cuyas coordenadas (x; y) son las siguientes:

a)  $x > 0$  e  $y > 0$  ..... cuadrante

b)  $x < 0$  e  $y < 0$  ..... cuadrante

c)  $x > 0$  e  $y < 0$  ..... cuadrante

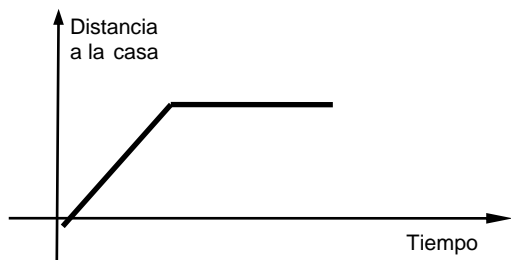
d)  $x < 0$  e  $y > 0$  ..... cuadrante

Lectura, interpretación y confección de gráficos

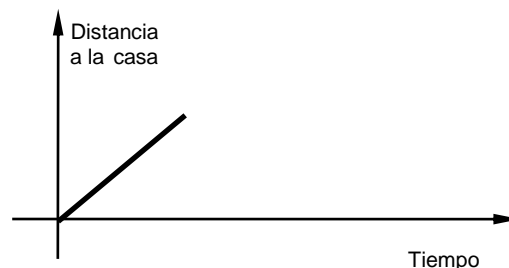
4. Una persona sale de su casa hacia su trabajo. Cuando llega a la parada del colectivo descubre que olvidó el manajo de llaves de su escritorio. Regresa a buscarlas y sale apurada a tomar un taxi.

a) ¿Cuál de los siguientes gráficos considerás que representa la situación relatada?

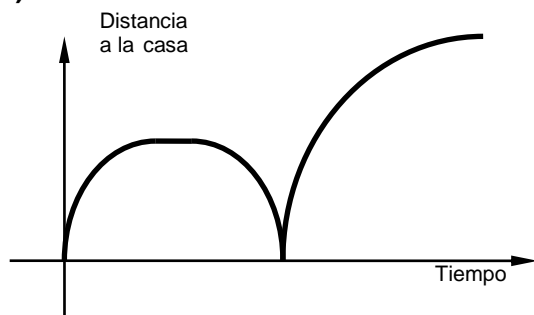
i)



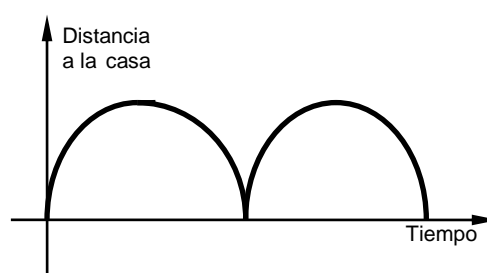
ii)



iii)



iv)



b) Describir una posible situación de partida para el trabajo que esté representada por cada gráfico del ítem a).

5. Como todos sabemos muchos satélites artificiales giran en torno a la Tierra. Para ubicarlos en órbitas distintas es necesario poder predecir dónde se encontrarán en un cierto momento.

Una de las fórmulas que se utilizan para conocer la posición de un satélite en un instante dado vincula la distancia, en kilómetros, que existe entre su órbita y la corteza terrestre con el tiempo, en horas, que demoran en dar una vuelta completa. Dicha fórmula es la siguiente:

$$h = 10\,000 \cdot \sqrt[3]{0,13 \cdot t^2} - 6500$$

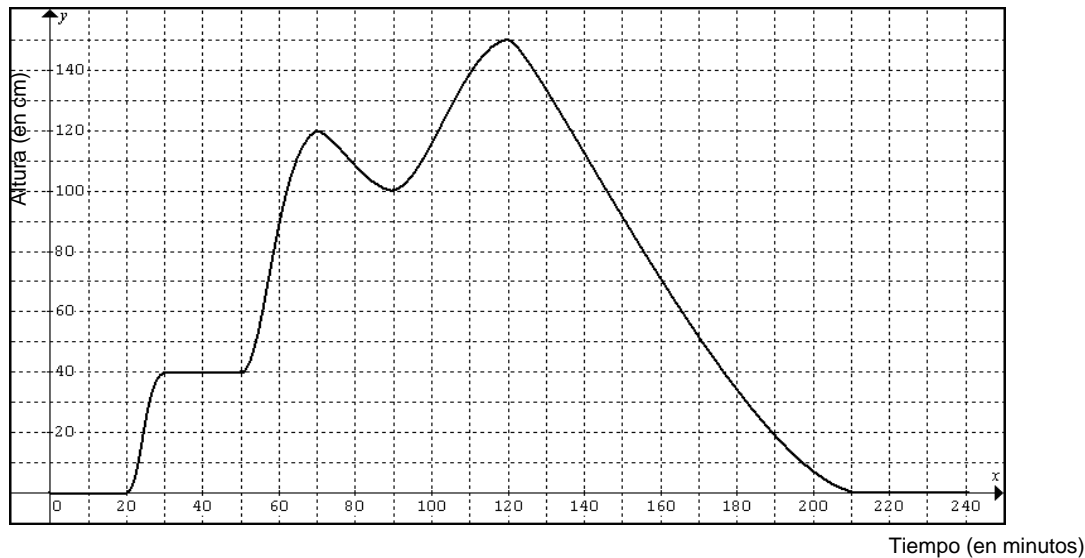
a) Si los satélites de comunicaciones demoran 24 horas en dar una vuelta a la Tierra, ¿a qué altura se encuentran?

b) ¿Cuánto demoran los satélites meteorológicos en dar una vuelta completa a la Tierra si tienen su órbita a 850 km de la corteza terrestre?

6. En una ciudad que se encuentra ubicada en la margen de un río, se desató una tormenta que produjo inundaciones en las calles.

Los vecinos, indignados por la falta de previsión de las autoridades ante situaciones de este tipo, presentaron un reclamo en forma escrita a la intendencia.

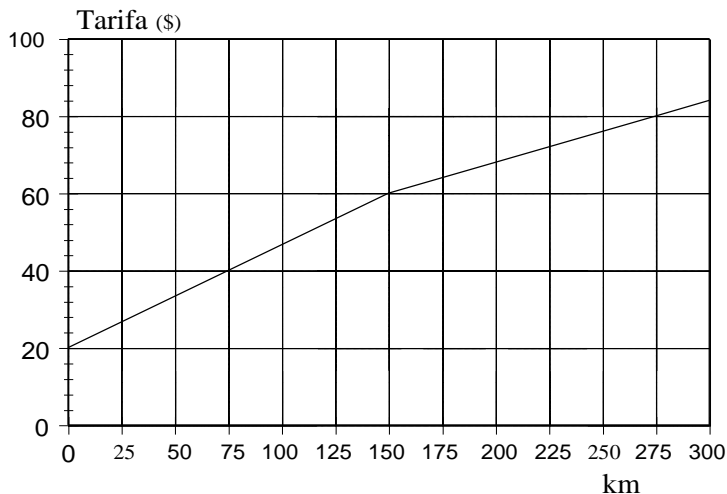
Entre la documentación se encontraba el gráfico que figura a continuación, donde se puede leer el nivel de agua en una esquina céntrica de la ciudad desde el momento que comenzó la última tormenta hasta que el agua se había retirado por completo de la calle.



- a) A los setenta minutos de iniciada la tormenta, ¿cuántos centímetros de altura tenía el agua en la calle?
- b) ¿Cuánto minutos transcurrieron desde que se inició la tormenta hasta que comenzó a subir el nivel de agua en la calle?
- c) En todos los casos en que la gráfica es un segmento horizontal, ¿significa que el nivel de anegamiento es nulo?
- d) ¿Cuál fue el máximo nivel de agua que se obtuvo en las mediciones? ¿Cuánto tiempo había transcurrido desde que comenzó la tormenta?
- e) ¿En cuánto se incrementa el nivel de agua en la calle durante la segunda hora de iniciada la tormenta?
- f) ¿En qué intervalos de tiempo el nivel de agua acumulado desciende?
- g) Elaborar un breve informe sobre cómo evoluciona la inundación durante las cuatro horas registradas en el gráfico.

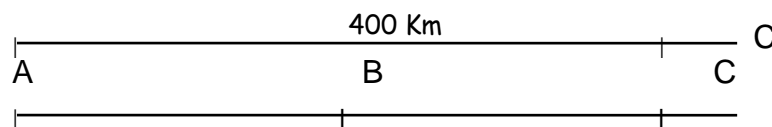
7. Una empresa que alquila autos para turistas cobra una suma fija en concepto de seguro.

El gráfico muestra la tarifa según el kilometraje recorrido hasta los 300 km inclusive.

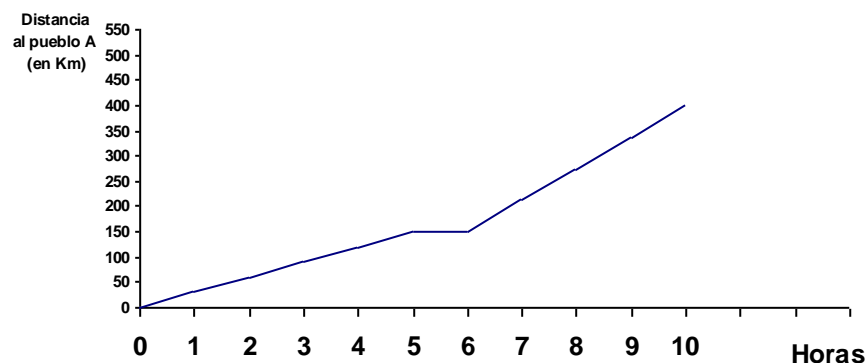


- ¿Cuál es la suma fija que cobra la empresa?
- ¿Cuánto cobra la empresa por cada kilómetro recorrido hasta los 150 km?  
¿Y por más de 150 km?
- ¿Cuántos km recorrió un auto si su conductor debe abonar \$78?

8. Un auto marcha desde un pueblo A hasta un pueblo C, sin retroceder nunca. El pueblo B se encuentra en el punto medio entre A y C.



En el siguiente gráfico se representa la distancia del auto al punto de partida A, a medida que transcurre el tiempo.



- Construir un gráfico cartesiano que represente la distancia del auto al pueblo C a medida que transcurre el tiempo.
- Construir un gráfico cartesiano que represente la distancia del auto al pueblo B a medida que transcurre el tiempo.

9. I- Un silo tiene una capacidad de 500 toneladas. Cuando contiene 25 toneladas de trigo, se abre una compuerta que vierte en su interior 5 toneladas de trigo por minuto.
- ¿Cuánto trigo hay en dicho silo después de 35 minutos de haberse abierto la compuerta? ¿Cuánto, luego de 2 horas?
  - ¿Al cabo de cuánto tiempo se llena el silo?
  - Registrar los datos en una tabla y realizar un gráfico cartesiano que represente la cantidad de trigo en el silo en función del tiempo.

- d) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular cuánto trigo hay en el silo en función del tiempo?

II. Otro silo, que tiene la misma capacidad que el anterior, está totalmente lleno de maíz y se comienza a vaciar a razón de 5 toneladas por minuto.

- Hallar la cantidad de maíz en el silo para distintos valores del tiempo y confeccionar una tabla. ¿Al cabo de cuánto tiempo el silo queda vacío?
- ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la cantidad de maíz que queda en el silo en función del tiempo?
- Graficar en el mismo gráfico cartesiano que en el caso I suponiendo que los dos inician el proceso en el mismo momento ( $t=0$ )
- Hallar en qué momento los dos silos tienen la misma cantidad de maíz usando las fórmulas y verificarlo gráficamente.

### Concepto de función

En todos los problemas anteriores hemos vinculado mediante gráficos, tablas o fórmulas, distintas magnitudes: importe - distancia recorrida; nivel de agua - tiempo, distancia-tiempo, cantidad de maíz - tiempo, etc.

Si analizamos, por ejemplo, el gráfico del problema 8, vemos que hay dos magnitudes en juego: distancia y tarifa. Para la distancia, tenemos un conjunto de cantidades o valores posibles entre 0 y 300 km. En forma similar, para las tarifas tenemos un conjunto de cantidades o valores.

Observemos que mediante el gráfico, se asigna a cada valor de la distancia, un valor para la tarifa correspondiente y éste valor es único. Diremos que la tarifa es **función** de la distancia recorrida, o bien que este gráfico define una función entre un conjunto de distancias y un conjunto de tarifas.

De esta manera, estamos relacionando dos **variables**: distancia - tarifa. La distancia es la variable **independiente** mientras que la tarifa es la **dependiente**.

De la misma forma, el gráfico del problema 9 que nos permite conocer la distancia al pueblo A de un auto respecto al tiempo, se verifica que para cada valor del tiempo tenemos un único valor para la distancia. Se dice que la distancia es función del tiempo. La variable independiente es el tiempo y la dependiente, la distancia a A.

Consideremos dos conjuntos cualesquiera A y B, no vacíos. Llamamos **función de A en B** (y la expresamos  $f: A \rightarrow B$ ) a una asignación tal que a cada elemento de A le hace corresponder un único elemento en B

Llamaremos **dominio** de la función al conjunto de todos los valores a los cuales se les asigna un valor en B a través de esta función. O sea, es el conjunto A. El conjunto B es el **codominio** de la función.

Para indicar que en la función “f” al elemento “x” le corresponde el elemento “y” de B, se escribe  $y = f(x)$ , que significa que “y” es la **imagen** de “x” según la función “f”.

El conjunto de todas las imágenes se llama **conjunto imagen** y está incluido en el codominio B.



**10.** Cada una de las tablas que se dan a continuación establece una asignación entre elementos de dos conjuntos, de forma tal que a cada valor de “x” del primer conjunto se le asigna un valor de “y” del segundo conjunto.

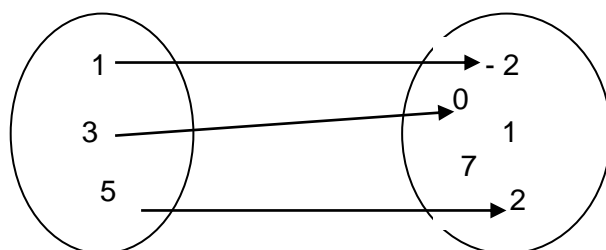
Tabla I					
x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Tabla II					
x	-3	-2	-1	0	1
y	7	5	3	1	-1

- Representar gráficamente los pares de números (x; y) de cada tabla.
- Para cada tabla, encontrar, si existe, una fórmula que permita relacionar la variable dependiente “y” con la variable independiente “x”.
- Indicar si son funciones

Algunas funciones se pueden representar mediante diagramas de flechas. Por ejemplo:

$$A=\{1;3;5\}, B=\{-2; 0; 1; 2; 7\}, f: A \rightarrow B / f(x)=x-3$$

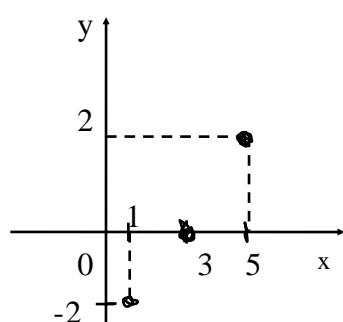


$$f(1) = -2$$

La imagen de 3 es 0.

2 es la imagen de 5.

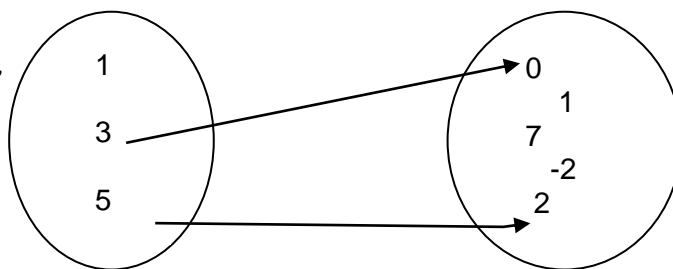
Las funciones también se pueden representar en un sistema de ejes cartesianos. Por ejemplo, la representación gráfica de la función anterior en un sistema de ejes cartesianos es la siguiente:



**11.** ¿Cuál es el dominio de la función “f” del ejemplo anterior? ¿Y cuál es el conjunto imagen?

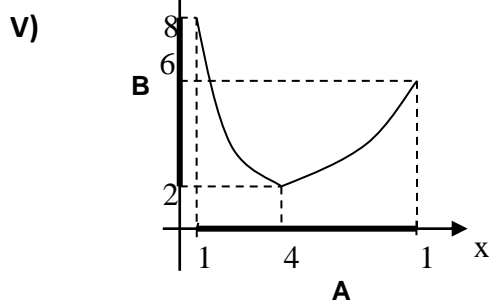
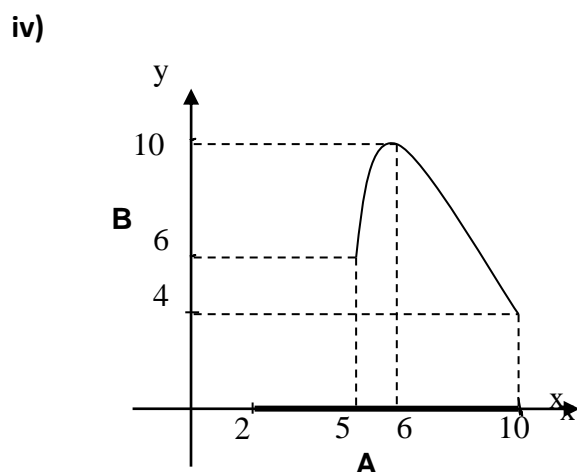
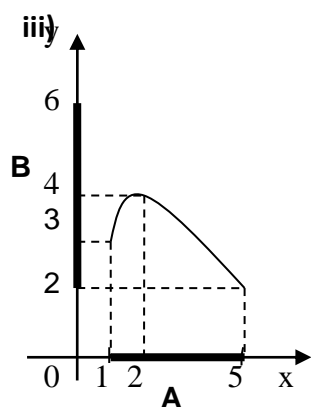
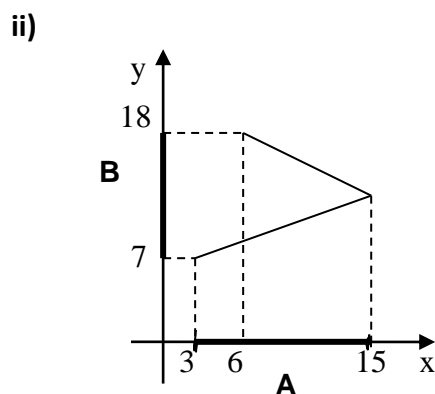
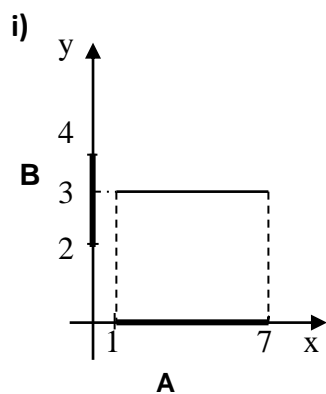
**12.** ¿El siguiente diagrama de flechas representa una función? ¿Por qué?

$A=\{1;3;5\}$ ,  $B=\{-2; 0; 1; 2; 7\}$ ,



**13.a)** Decidir cuáles de los siguientes gráficos representan una función de  $A \rightarrow B$ .

**b)** Para cada una de las funciones del ítem **a)**, determinar el dominio y el conjunto imagen.



**14.a)** Escribir la fórmula que hace corresponder a la variable independiente “x” lo siguiente:

- a. su tercera parte;
- b. su cuadrado;
- c. su doble aumentado en una unidad;
- d. el doble de su siguiente;
- e. el número 5.

**b)** Para cada uno de los casos anteriores, indicar un dominio adecuado en el cual cada asignación mencionada sea función. Indica el correspondiente conjunto imagen.

**15.** Considerar la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2x + 1$  y decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).

- a) La imagen de 3 es 7.
- b) 7 es la imagen de 3.
- c)  $f(3) = 7$

**16.** Considerar las siguientes asignaciones:

i)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{1}{x}$       ii)  $h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \frac{1}{x}$

Para cada una de ellas, responder:

- a) ¿Cuál es la imagen de 3?
- b) ¿El cero tiene imagen?
- c) ¿La asignación es una función en los conjuntos mencionados?

**17.** Considerar la función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \frac{g(x) - 1}{3} = x$ , y completar las siguientes frases:

- a) La imagen de 5 es .....
- b) El punto (.....; 7) pertenece a la gráfica de la función.
- c) Si -3 es la ordenada de un punto de la gráfica de la función “g”, la abscisa es .....

**18.** Considerar las siguientes fórmulas :

i)  $f(x) = x + 1$       ii)  $g(x) = \sqrt{x}$       iii)  $h(x) = x^2$       iv)  $t(x) = \frac{1}{x}$

Analizar si cada una de ellas es función de A en B para estos casos:

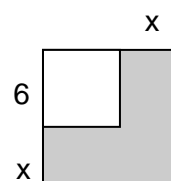
- a)  $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{R}$       b)  $A = \mathbb{N}$  y  $B = \mathbb{N}$
- c)  $A = \mathbb{R}^+$  y  $B = \mathbb{R}$       d)  $A = \mathbb{R}^+_0$  y  $B = \mathbb{R}$

**19.** El lado de un cuadrado mide 6 cm. Se aumenta dicho lado en “x” cm, tal como lo muestra la figura.

**a)** Expresar, mediante una fórmula, el perímetro de la figura sombreada en función de “x”. Si se supone definida de  $\mathbb{R}^+_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿es función?

**b)** Representar gráficamente

**c)** Realizar lo mismo que en los ítems **a)** y **b)**, pero para el área de la región



**20.** Considerar el conjunto de los conos de radio 2 cm.

**a)** Escribir la fórmula del área lateral ( $A$ ) en función de la generatriz ( $g$ ).

**b)** Calcular la imagen de 3 y explicar en términos del problema el significado del valor obtenido.

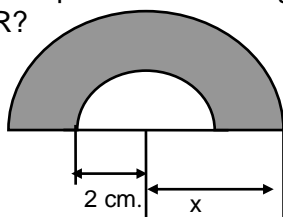
**c)** ¿Es posible hallar  $A(-2)$ ? ¿Por qué?

**d)** Representar gráficamente la función.

**21. a)** Expresar el perímetro de la figura sombreada en función de " $x$ ".

**b)** Hallar la imagen de 4.

**c)** ¿Puede definirse de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  el perímetro de la figura sombreada en función de " $x$ "? ¿Y de  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ?



**22.** Hallar el dominio mayorante  $A$  (máximo en sentido de inclusión) para que cada una de las siguientes expresiones defina una función real de  $A$  en  $\mathbb{R}$

a)  $f(x) = \frac{x}{3x-4}$

b)  $f(x) = 3x - 1$

c)  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2}}$

d)  $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$

e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}}$

g)  $f(x) = \sqrt{-2(x-3)(x+6)}$

h)  $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{1 + \sqrt[3]{x^3-1}}$

i)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{6x+12}}$

j)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2}{|2-x|}}$

k)  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2-x^2}{x^2-3}}$

l)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

\* En a) y en e) Determinar la imagen de  $\sqrt{2}$ .

\*\* En el punto a) ¿Es posible determinar la imagen de  $\frac{4}{3}$ ? ¿Por qué?

\*\*\* En g) y en i) Determinar la imagen de cero.

**23.** Hallar el dominio mayorante (máximo en sentido de inclusión) para que cada una de las siguientes expresiones defina una función real

**a)**  $y = \sqrt{\frac{9x+10}{2x-3}} \quad A \rightarrow \mathbb{R}$

**b)**  $y = \frac{\sqrt{9x+10}}{\sqrt{2x-3}} \quad A \rightarrow \mathbb{R}$

¿Son equivalentes las fórmulas de a) y b)?

En caso de que no lo sean, explicar cuales son las diferencias que se pueden observar en el desarrollo realizado para determinar el conjunto A.

### **Funciones de proporcionalidad**

**24.** Durante las vacaciones Gustavo trabajó 10 días repartiendo publicidad. Le pagaron \$50 por día.

a) Completar la tabla y representar gráficamente.

Número de días	Dinero ganado
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

b) Si en lugar de trabajar 10 días hubiese trabajado 30, ¿cuánto hubiese ganado?

c) ¿Cuántos días debió trabajar para ganar \$2000?

d) Para cada fila de la tabla, efectuar el cociente entre el dinero ganado y el número de días, ¿qué conclusión se puede obtener?

e) Escribir una fórmula que te permita calcular el dinero  $d$  ganado a partir del número  $n$  de días trabajados.

**25.** Se desea llenar un balde de  $12 \text{ dm}^3$  de volumen. Completar la tabla en la que se relacionan el volumen de los jarros que se utilizan para llenarlo con la cantidad de jarros utilizados. Representar gráficamente

Volumen de 1 jarro (en $\text{dm}^3$ )	1	2		4		7		10
Cantidad de jarros			4		2		1,5	

a) Si se duplica la capacidad del jarro, ¿cómo será el número de jarros para llenar el mismo volumen?

b) Si se desean emplear la tercera parte de los jarros utilizados, ¿cómo deberá ser el volumen de los mismos?

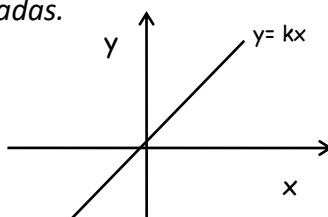
c) Encontrar una fórmula que permita expresar el número de jarros utilizados en función del volumen de los mismos.

La función del problema 23 es una función de **proporcionalidad directa**, mientras que la del problema 24 es una función de **proporcionalidad inversa**.

### **I.- Función de proporcionalidad directa**

Las funciones de proporcionalidad directa son aquellas en que la asignación se realiza mediante :  $f(x) = k.x$  , donde  $k$  es un número real distinto de cero llamado **constante de proporcionalidad**.

La representación gráfica de una función de proporcionalidad directa es una recta a la que pertenece el origen de coordenadas.



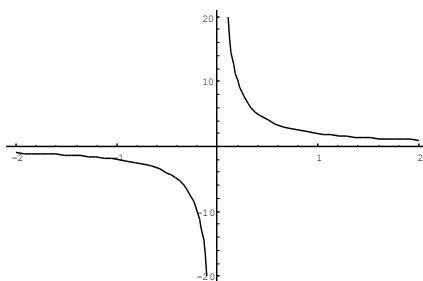
Estas funciones están caracterizadas por el hecho de que los puntos  $(x,y)$  de la gráfica verifican  $\frac{y}{x} = k$

Observemos que en este tipo de función al, por ejemplo, duplicarse o triplicarse el valor de la variable  $x$ , se duplica o triplica el valor de su imagen.

### **II.- Función de proporcionalidad inversa**

Las funciones de proporcionalidad inversa son aquellas en que la asignación se realiza mediante :  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $x \neq 0$ , donde  $k$  es un número real distinto de cero y recibe el nombre de **constante de proporcionalidad inversa**

La curva que se obtiene al representar gráficamente una función de proporcionalidad inversa es una **hipérbola equilátera**.



Estas funciones están caracterizadas por el hecho de que los puntos  $(x,y)$  de la gráfica verifican  $x.y = k$

Observemos que en las funciones de proporcionalidad inversa al, por ejemplo, duplicarse o reducirse a la tercera parte el valor de  $x$  su imagen queda reducido a la mitad o triplicado respectivamente.

26. Teniendo en cuenta los rectángulos de base 6 se pide completar la siguiente tabla:

Altura: x	1cm	2	3	4	5	6	7
perímetro: $y_1$							
área : $y_2$							

a) ¿Existe proporcionalidad entre x e  $y_1$ ? ¿Por qué?

b) ¿Y entre x e  $y_2$  ? ¿por qué?

c) Proponer las fórmulas correspondientes e indicar, si corresponde, el coeficiente de proporcionalidad.

d) Graficar en un sistema de coordenadas el perímetro en función de la altura y el área en función de la altura.

e) Indicar similitudes y diferencias.

27. Indicar cuáles de las siguientes situaciones corresponden a funciones de proporcionalidad directa, cuáles a funciones de proporcionalidad inversa y cuáles a ninguna de las dos:

a) La cantidad de agua por minuto que arroja una bomba y el tiempo que tarda en llenar una pileta determinada.

b) La altura de una pared de ancho constante y la cantidad de pintura necesaria para pintarla.

c) El área de una pared y la cantidad de pintura necesaria para pintarla.

d) La cantidad de libros por estante y el número de estantes que se utilizan para distribuir 200 libros en una biblioteca, colocando la misma cantidad de libros por estante.

e) El peso y la altura de una persona.

f) El peso y la edad de una persona.

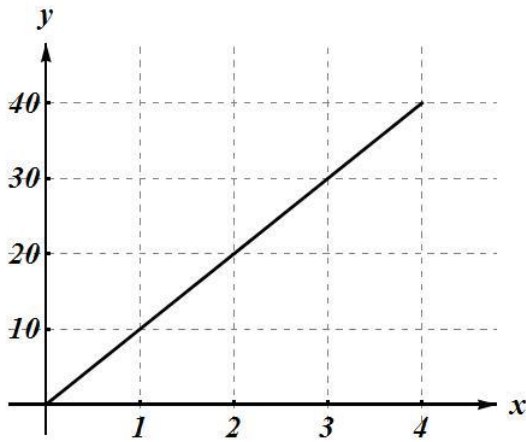
g) La cantidad de vasos que pueden llenarse con un litro de gaseosa y la capacidad del vaso.

28. a) En una función de proporcionalidad directa definida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  se cumple que  $f(\sqrt{5})=3$  . Calcular la constante de proporcionalidad, hallar su fórmula y representar gráficamente.

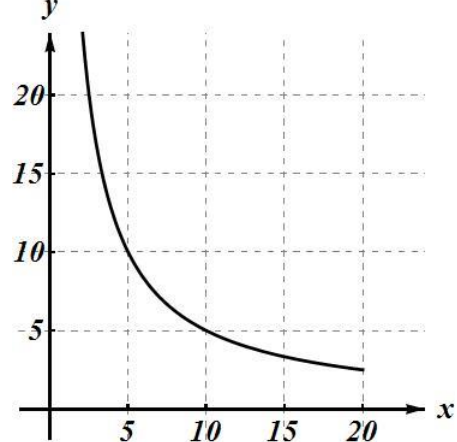
b) En una función de proporcionalidad inversa,  $f(1/2)=4$  . Calcular la constante de proporcionalidad. Expresar la función y representarla gráficamente.

29. Indicar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones de proporcionalidad directa o inversa. Determinar para esos gráficos, las respectivas constantes de proporcionalidad.

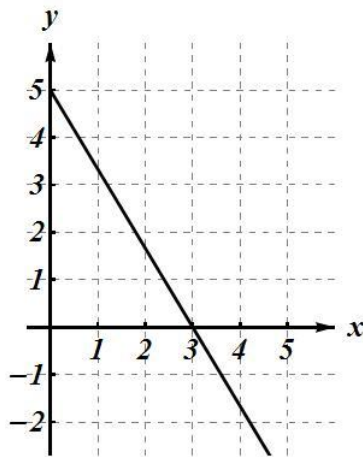
a)



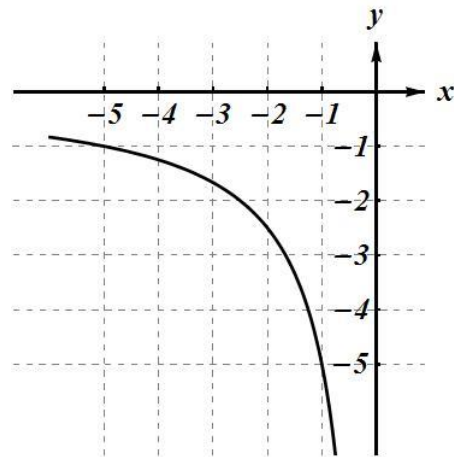
b)



c)



d)



30. Considerar todos los rectángulos de  $16 \text{ cm}^2$  de área

- Hallar una expresión que permita calcular la altura "h" en función de la base "b". Construir la tabla de valores correspondiente.
- Determinar el dominio de la función. Escribir la función.
- Representar gráficamente la función.
- Indicar si se trata de una función de PD. o PI. Justificar.

31. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

- En la fórmula  $P = \frac{F}{S}$ , P y S son magnitudes inversamente proporcionales
- El área del círculo es directamente proporcional a su radio.
- En la familia de conos de área lateral  $50 \text{ cm}^2$ , el radio de la base es inversamente proporcional a la generatriz. (Dato  $A = \pi r g$ )
- Dada la familia de conos de radio en la base  $4 \text{ cm}$ , el área lateral es directamente proporcional a la generatriz.
- El volumen de la esfera es directamente proporcional a su radio.
- El área del círculo es directamente proporcional al cuadrado del radio.



**32.** Indicar si las siguientes afirmaciones se verifican: Siempre, a veces o nunca, justificando la respuesta.

I. Si dadas dos magnitudes A y B se observa que cuando una cantidad en A aumenta su correspondiente en B disminuye, entonces A y B son magnitudes:

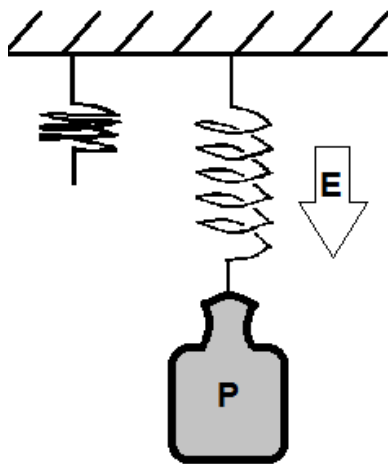
- a) directamente proporcionales                      b) inversamente proporcionales

II. Si dadas dos magnitudes A y B se observa que cuando una cantidad en A aumenta su correspondiente en B también aumenta, entonces A y B son magnitudes:

- a) directamente proporcionales                      b) inversamente proporcionales

**33.** De acuerdo con la llamada “Ley de Hooke”, al colgar un peso  $P$  de un resorte se produce un estiramiento  $E$  directamente proporcional a la magnitud de dicho peso.

Suponiendo que el resorte de la figura se estira  $3\text{ cm}$  cuando se le cuelga un peso de  $5$  kilogramos fuerza:



kilogramos fuerza:

- Establecer el estiramiento en función del peso y graficar.
- Establecer el peso en función del estiramiento.
- Calcular el estiramiento que corresponderá a un peso de  $1000$  kilogramos fuerza. Discutir si el resultado que predice la función tiene sentido en la práctica.

**34.** Si se sabe que en una función de proporcionalidad inversa se cumple que

$$f(5\sqrt{6}) = \frac{1}{5}\sqrt{3}, \text{ calcular:}$$

- La imagen de  $1 - \sqrt{7}$
- El valor de  $x$  tal que  $f(x) = \sqrt{5}$ .

**35.** Consideremos la siguiente ley física:

***“La intensidad de iluminación de una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al foco luminoso”.***

a) Comparar la intensidad de iluminación de una página de un libro que dista  $50\text{cm}$  de una lamparita, con la iluminación producida sobre la misma página cuando el libro está a dos metros de la lámpara.

b) Esta ley, también se aplica al sonido es decir, si el aire está en calma, también la intensidad del sonido varía en relación inversa al cuadrado de la distancia al cuerpo emisor.

Comparar las intensidades de sonido percibidas por dos personas que oyen un cañonazo si una se encuentra a  $300\text{m}$  y la otra a  $1000\text{m}$  del disparo.

## PROPORCIONES

Se dice que cuatro números  $a, b, c, d$  (en ese orden) forman proporción si y solo si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**36.** Justificar las siguientes propiedades: Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces:

a)  $a \cdot d = b \cdot c$       b)  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$       c)  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$       d)  $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

**37.** Escribir todas las proporciones posibles con los números:

a) 2, 8, 5 y 20.      b) 3, 6,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{8}$       c) 2, 3, 15, 7

**38.** Verificar con ejemplos y luego demostrar que si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$

**39. a)** En una clínica un día, por cada tres varones nacen dos niñas. Si hay 30 bebés recién nacidos cuántos hay de cada sexo?

**b)** Un teatro reparte 2000 entradas entre 4 colegios proporcionalmente al número de alumnos. El colegio A cuenta con 560 alumnos, el B con 640, C con 1280 y D con 720. ¿Cuántas entradas corresponden a cada uno?

**c)** Una persona desea repartir una suma de \$ 1 000 000 entre sus tres hijos en forma directamente proporcional a sus edades, que son de 18, 20 y 25 años. ¿Qué suma le corresponderá a cada uno?

**40.** Resolver en  $\mathbb{R}$

a)  $\frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{5}} = \frac{x}{x+\sqrt{3}}$

b)  $\frac{1}{x+\frac{1}{3}} = \frac{3}{(x+1)^2}$

c)  $\frac{x}{x-3} = \frac{x+4}{x+1}$

d)  $\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}-x}{x-\sqrt{2}}$

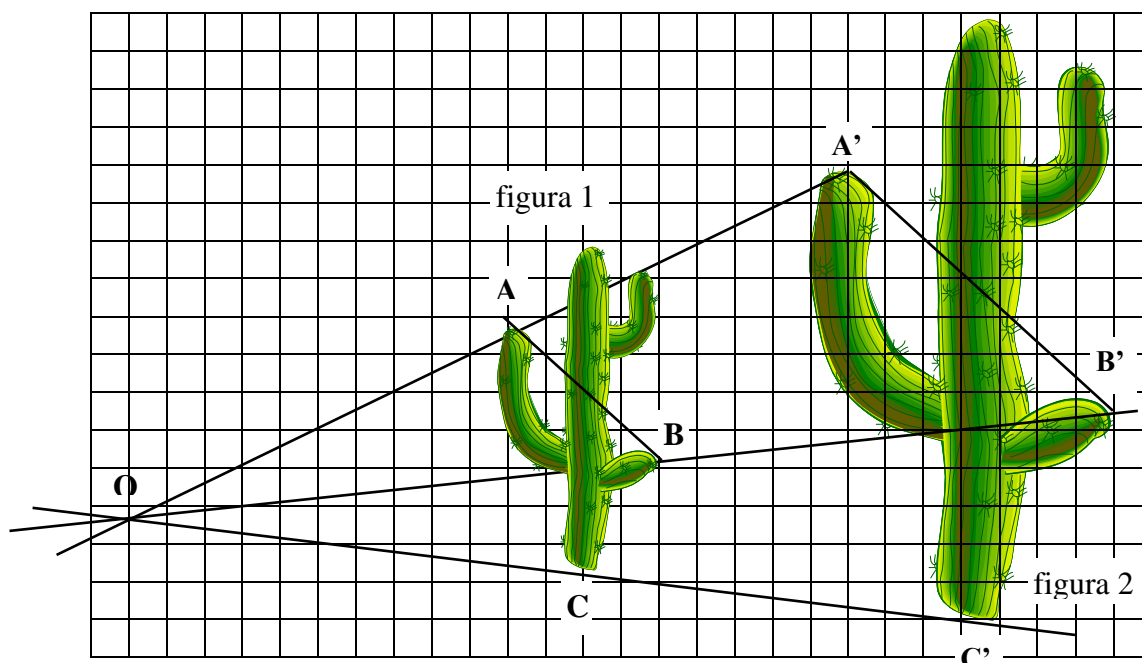
e)  $\frac{x^2+\sqrt{6}-1}{x-\sqrt{2}} = x-\sqrt{3}$

f)  $\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$



### Segmentos proporcionales

Supongamos que las figuras que se muestran a continuación son las proyecciones de una misma diapositiva, sobre pantallas paralelas, situadas a distinta distancia del observador (O)



Hemos marcado tres puntos en la figura 1 y sus correspondientes en la fig. 2.

a) Completar la tabla:

MEDIDA	$ \overline{OA'}  =$	$ \overline{OB'}  =$	$ \overline{OC'}  =$	$ \overline{A'B'}  =$
	$ \overline{OA}  =$	$ \overline{OB}  =$	$ \overline{OC}  =$	$ \overline{AB}  =$
RAZÓN	$\frac{ \overline{OA'} }{ \overline{OA} } =$	$\frac{ \overline{OB'} }{ \overline{OB} } =$	$\frac{ \overline{OC'} }{ \overline{OC} } =$	$\frac{ \overline{A'B'} }{ \overline{AB} } =$

b) ¿Se puede encontrar una constante de proporcionalidad? Si la respuesta es afirmativa, indicar cuál es.

c) Comparar los resultados entre compañeros. ¿Qué conclusión se puede extraer?

### Definición

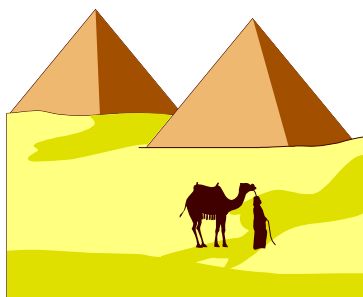
Se dice que  $n$  segmentos son proporcionales a otros  $n$  segmentos cuando entre sus medidas existe una función de proporcionalidad directa.

### Teorema de Thales

#### Un poco de historia...

Thales nació en la ciudad griega de Mileto (actualmente pertenece a Turquía). Vivió entre los años 624 a.C. y 548 a.C. Fue sobre todo comerciante, pero también ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático.

Aunque de su vida se sabe muy poco, no hay dudas acerca de su inteligencia. Fue el primero de los siete grandes sabios griegos

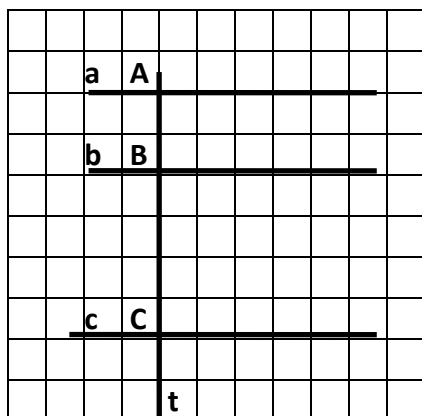


Vivió muchos años en Egipto, donde recogió todos los conocimientos geométricos de la época.

Fue el primer matemático en utilizar el método deductivo para probar propiedades. Según la leyenda, utilizó el teorema que lleva su nombre para medir la altura de una pirámide utilizando su propia altura, la medida de su sombra y la de la sombra de la pirámide.

También causó gran asombro cuando pronosticó, mediante cálculos matemáticos, un eclipse total de Sol en el año 585 a.C.

1. a) Completar el dibujo trazando una recta transversal  $t'$ , no paralela a  $t$ , que corte a  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  respectivamente.

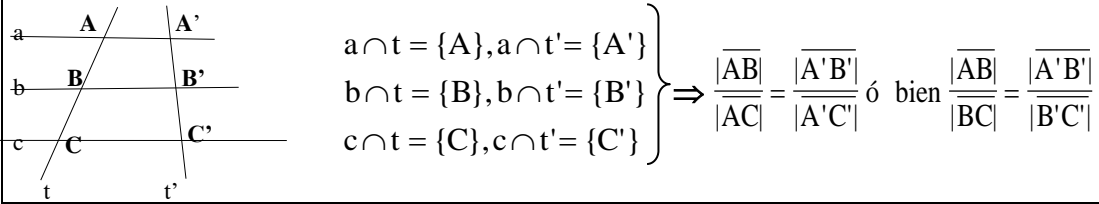


- b) Completar la tabla:

$ \overline{AB}  =$	$ \overline{A'B'}  =$
$ \overline{BC}  =$	$ \overline{B'C'}  =$
$\frac{ \overline{AB} }{ \overline{BC} } =$	$\frac{ \overline{A'B'} }{ \overline{B'C'} } =$

- c) ¿Qué conclusión se puede sacar?

**Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, dos segmentos cualesquiera sobre una de ellas forman proporción con sus correspondientes en la otra. En símbolos:  $a//b//c$ ,  $t$  y  $t'$  transversales**



También se cumple que:

Si tres rectas, de las cuales dos son paralelas son cortadas por dos transversales de manera tal que dos segmentos cualesquiera sobre una de las transversales forman proporción con sus correspondientes sobre la otra, entonces la tercera recta es paralela a las otras dos.

## 2. Para construir con regla y compás

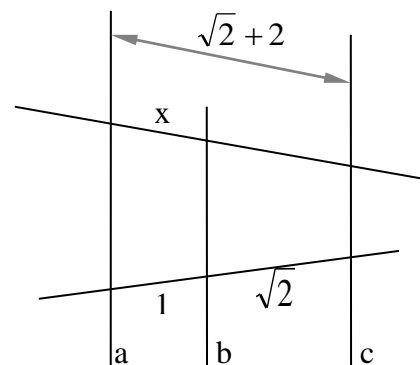
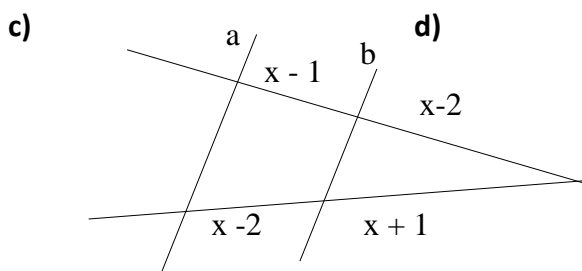
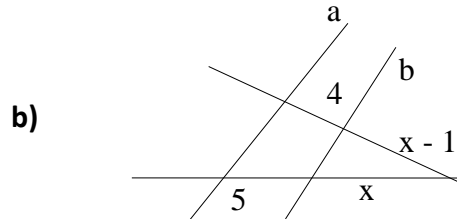
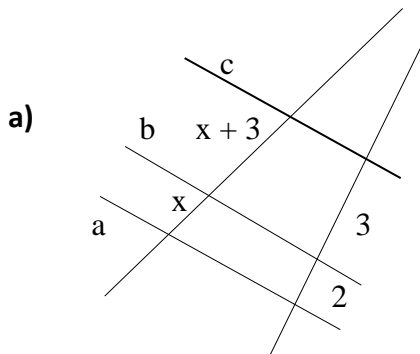
- Dibujar un segmento cualquiera y dividirlo en 5 partes congruentes. Justificar.
- Dibujar un segmento cualquiera y dividirlo en partes proporcionales a:

i)  $2/5$

ii)  $5/3$

- Dado un segmento, dividirlo en tres partes tales que la razón entre la primera y la segunda sea  $1/3$  y entre la segunda y la tercera  $4/5$ .

- Hallar, si es posible, el valor de  $x$  en cada una de las siguientes situaciones, sabiendo que  $a//b//c$ .



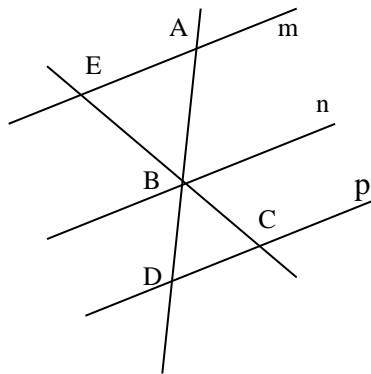
4. Considerar el triángulo ABC. P y Q son puntos de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente, tales que  $PQ \parallel AC$ . Si  $|\overline{AP}| = \frac{2}{3}|\overline{BP}|$  y  $|\overline{BC}| = 72$ , calcular  $|\overline{BQ}|$  y  $|\overline{QC}|$ .

5. Dadas las siguientes figuras, hallar x sabiendo que  $m \parallel n \parallel p$ .

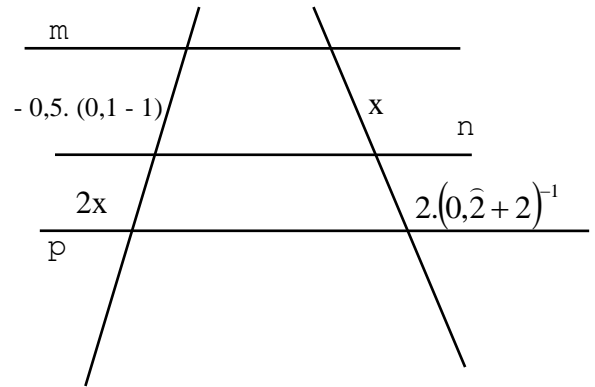
a)

$$|\overline{EB}| = x - \sqrt{2}, \quad |\overline{AB}| = \frac{3}{2}\sqrt{2} - x$$

$$|\overline{BC}| = 2\sqrt{2}, \quad |\overline{BD}| = x - \sqrt{2}$$



b)



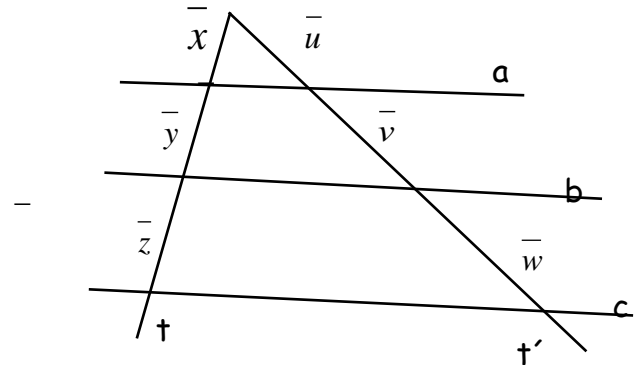
6. Dadas  $a \parallel b \parallel c$  y  $t$  y  $t'$  transversales, y sabiendo que:

$$|\overline{x}| + |\overline{y}| + |\overline{z}| = 14$$

$$|\overline{u}| + |\overline{v}| + |\overline{w}| = 21$$

$$|\overline{v}| + |\overline{y}| = 1$$

$$|\overline{w}| = 4 \cdot |\overline{v}|$$



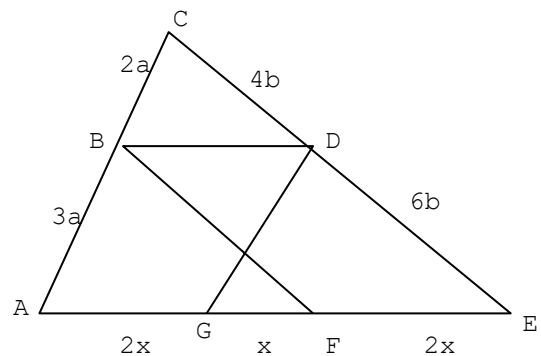
Hallar las medidas de los segmentos  $\overline{x}$ ,  $\overline{y}$ ,  $\overline{z}$ ,  $\overline{u}$ ,  $\overline{v}$  y  $\overline{w}$ .

7. Teniendo en cuenta el gráfico, demostrar:

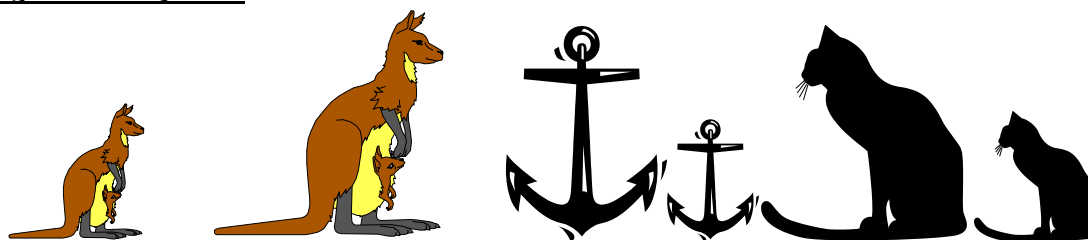
a)  $DG \parallel CA$ ,

b)  $BD \parallel AE$ ,

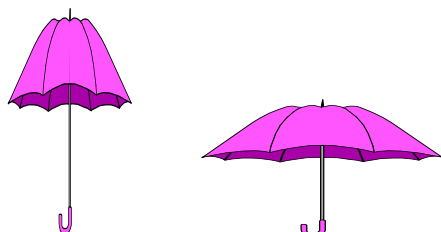
c)  $BF \parallel CE$ .



## Figuras semejantes



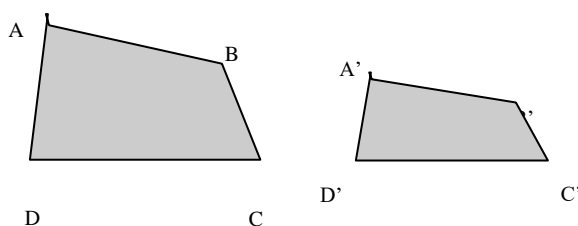
Estas figuras son ampliaciones o reducciones de un mismo motivo. Es decir conservan la **forma** pero no el **tamaño**. Las figuras que tienen la misma forma se llaman **semejantes**. Para que la forma se conserve, la variación del tamaño no puede ser arbitraria, las medidas deben variar en forma proporcional. Por ejemplo, en el canguro la razón entre las medidas de las colas debe ser igual a la razón entre las medidas de las cabezas. Si no se cumple con la condición de la proporcionalidad, hay una “deformación” de la imagen.



Estas figuras no tienen la misma forma pues las distintas medidas no se modificaron proporcionalmente.

## POLÍGONOS SEMEJANTES

Dos polígonos son semejantes si y sólo si tienen sus ángulos congruentes y sus lados proporcionales. La constante de proporcionalidad se llama razón de semejanza. Por ejemplo:



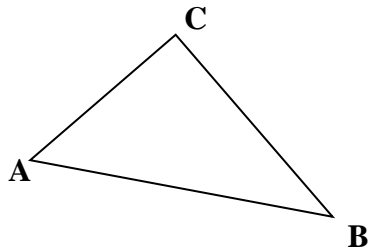
$ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son **semejantes** ya que sus lados son proporcionales y sus ángulos congruentes.

El símbolo con que se indica semejanza es: “ $\sim$ ”

$$ABCD \sim A'B'C'D' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DA|}{|D'A'|} \\ |\hat{A}| = |\hat{A}'| \\ |\hat{B}| = |\hat{B}'| \\ |\hat{C}| = |\hat{C}'| \\ |\hat{D}| = |\hat{D}'| \end{array} \right.$$

8. Dos triángulos equiláteros cualesquiera, ¿son siempre semejantes? ¿Por qué?  
Y los polígonos regulares de igual número de lados, ¿son todos semejantes? ¿Por qué?

**Teorema fundamental de semejanza de triángulos**



- a) Marcar sobre AC un punto cualquiera y llamarlo P.
- b) Por P, trazar  $m \parallel AB$ , que corta a BC en Q.
- c) Comparar los ángulos del triángulo ABC con los del triángulo PCQ. Justificar.
- d) Analizar si existe proporcionalidad entre los lados de ambos triángulos. (Se puede trazar por Q, la paralela a AC)

Las conclusiones son independientes de la ubicación del punto P en la recta AC, por lo tanto podemos enunciar de manera general:

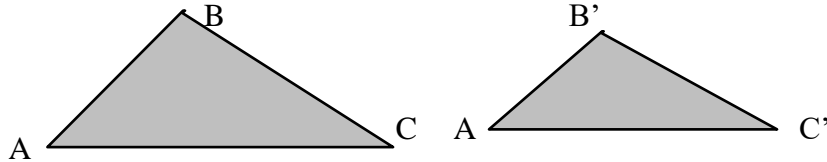
*Toda paralela a un lado de un triángulo determina con las rectas que incluyen a los otros dos lados un triángulo semejante al dado.*



**Condiciones suficientes para que dos triángulos resulten semejantes**

De la misma forma que para asegurar que dos triángulos son congruentes, no es necesario probar la congruencia de todos sus lados y todos sus ángulos, para probar la semejanza de dos triángulos alcanza con probar la congruencia de algunos pares de ángulos y / o la proporcionalidad de algunos pares de lados.

Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes:



Para demostrarlo es suficiente probar que:

I.- tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} \\ |\hat{B}| = |\hat{B'}| \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$$

II.- tienen dos ángulos homólogos congruentes

$$\left. \begin{array}{l} |\hat{A}| = |\hat{A'}| \\ |\hat{B}| = |\hat{B'}| \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$$

III.- tienen sus tres pares de lados proporcionales.

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} = \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{C'A'}|} \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$$

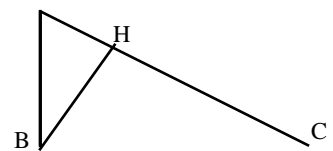
IV.- tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} \\ |\overline{BC}| > |\overline{AB}| \\ |\hat{A}| = |\hat{A'}| \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$$

9. El triángulo de la figura es rectángulo en  $\hat{B}$ .  $\overline{BH}$  es la altura correspondiente a la hipotenusa.

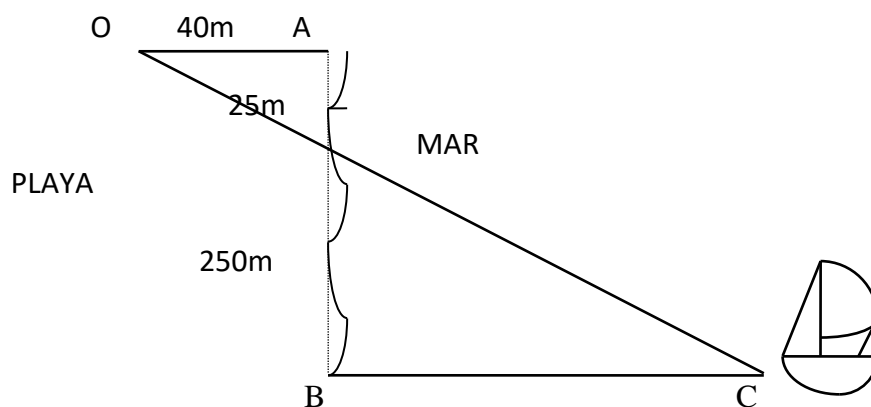
a) Demostrar que son semejantes los triángulos que se indican en cada caso y escribir la serie de razones entre los pares de lados homólogos :

i)  $\triangle ABC \approx \triangle AHB$       ii)  $\triangle CHB \approx \triangle AHB$       iii)  $\triangle ABC \approx \triangle CHB$



b) Suponiendo que  $|\overline{BC}| = 2 \cdot |\overline{AB}|$  calcular en cada caso, la razón de semejanza.

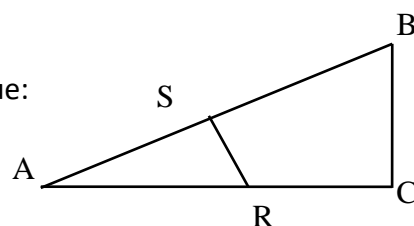
10.  $\triangle RST$  es rectángulo en S. Si la hipotenusa mide 15 cm y la medida de  $\overline{ST}$  es 9 cm, calcular:
- la medida de la altura correspondiente a la hipotenusa.
  - la medida de la proyección de RS sobre la hipotenusa.
11.  $\triangle RST$  es rectángulo en S. Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 6 cm y 2 cm respectivamente, calcular:
- la medida del cateto mayor.
  - la medida de la altura correspondiente a la hipotenusa.
12. Dado un triángulo rectángulo, se pide calcular la medida de cada lado sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa mide 4 cm y la proyección de uno de los catetos sobre la hipotenusa mide 3 cm.
13. Probar que:
- si dos triángulos son semejantes la razón de sus perímetros es igual a la razón de un par de lados homólogos cualesquiera.
  - si dos triángulos son semejantes la razón de alturas homólogas es igual a la razón de un par de lados homólogos cualesquiera.
  - si dos triángulos son semejantes la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de un par de lados homólogos cualesquiera.
14. Un observador sobre la playa, ve un barco anclado fuera de la costa. Para encontrar la distancia al barco, hace las mediciones mostradas en el dibujo. ¿Qué distancia hay de la playa al barco?



15. Sea  $\triangle ABC$  y P y Q puntos de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente.  
Si  $\frac{1}{2}|\overline{BP}| = |\overline{AP}|$  y  $|\overline{BQ}| - |\overline{QC}| = |\overline{QC}|$ , demostrar que  $PQ \parallel AC$ .

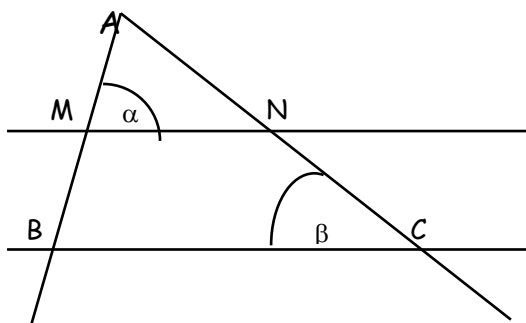
16. En el gráfico es  $BC \perp AC$  y  $RS \perp AB$ , demostrar que:

$$|\overline{AS}| \cdot |\overline{AB}| = |\overline{AC}| \cdot |\overline{AR}|.$$



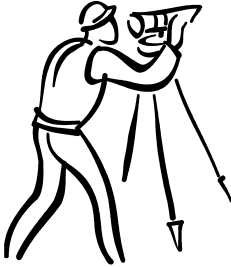
17. Teniendo en cuenta el gráfico y sabiendo que  $|\overline{AM}| = |\overline{AN}|$ ,  
 $|\hat{\alpha}| = |\hat{\beta}|$ ,

probar que:  $|\overline{MB}| = |\overline{NC}|$



18. ¿Cuál es la razón entre las áreas de dos triángulos equiláteros cuyos lados miden respectivamente 15 y 5 cm?
19. En un triángulo de base  $|\overline{BC}| = 4\text{cm}$  y altura  $|\overline{AH}| = 6\text{cm}$ , se traza un segmento paralelo a la base, que corta a la altura en un punto  $H'$  tal que  $|\overline{AH'}| = \frac{1}{3} |\overline{AH}|$ . Determinar las áreas de las dos partes en que queda dividido el triángulo.
20. a) Dos triángulos isósceles cualesquiera, ¿son siempre semejantes? ¿Por qué?
- b) Si dos triángulos son congruentes ¿son semejantes?
- c) ¿Cuál es la razón entre ángulos homólogos de polígonos semejantes?
- d) Si dos polígonos son semejantes, ¿deben también ser regulares?
- e) Si dos polígonos con igual número de lados no son semejantes ¿se puede concluir que los ángulos correspondientes no son congruentes?
- f) La semejanza entre polígonos ¿es reflexiva? ¿simétrica? ¿transitiva?
- g) ¿Pueden ser los lados de un triángulo la mitad de los de otro? ¿Y los ángulos de un triángulo, pueden ser la mitad de los de otro?
21. Una fotografía mide 6,5 por 2,5 cm; se quiere amplificar de modo que el lado mayor mida 26cm. ¿cuál es la longitud del perímetro de la fotografía amplificada?
22. Los lados de un polígono son 4,5,8,10 y 12 cm respectivamente. Encontrar las longitudes de los lados de un polígono semejante cuyo lado mayor mide 15cm.
23. Los lados de un polígono miden 3,5,6,8, y 10cm, respectivamente. El perímetro de un polígono semejante mide 40cm. Calcular la longitud de cada uno de los lados del segundo polígono.
24. Dados dos polígonos semejantes, un par de lados homólogos miden 12cm y 15 cm. El perímetro del polígono menor mide 30cm. Encontrar el perímetro del otro polígono.

- 25.** La razón de semejanza de dos paralelogramos es  $\frac{2}{3}$  y el área del primero mide  $60\text{cm}^2$ . Hallar el área del segundo.
- 26.** Los lados correspondientes de dos polígonos semejantes miden respectivamente 15 y 25cm; el área del primero es de  $150\text{cm}^2$ . ¿Cuál es el área del segundo?
- 27.** Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
- a) Si dos cuadriláteros tienen sus cuatro lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.
  - b) La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre un par de diagonales homólogas.
  - c) Si dos paralelogramos tienen un ángulo congruente son semejantes.
  - d) Si dos paralelogramos tienen dos lados consecutivos proporcionales y el ángulo comprendido congruente, entonces son semejantes.
  - e) Si dos rombos tienen un ángulo congruente, entonces son semejantes.
  - f) Si dos polígonos cualesquiera tienen todos sus ángulos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.
  - g) Las diagonales de un trapecio se cortan en segmentos proporcionales.
  - h) Si la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es  $\frac{2}{5}$ , entonces la razón de semejanza es  $\frac{1}{5}\sqrt{10}$ .

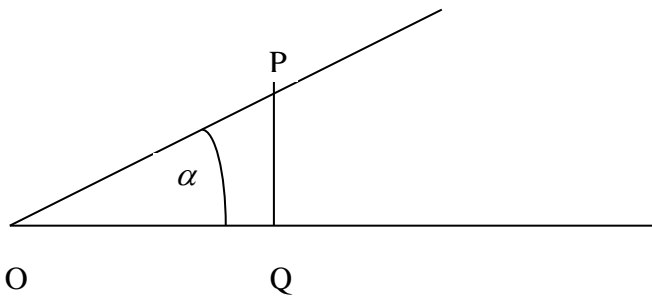


## TRIGONOMETRÍA

### Un poco de historia...

La trigonometría es una de las ramas más antiguas de la Matemática. Los egipcios ya conocían algunas relaciones, que debieron utilizar en los cálculos para construir sus pirámides; las observaciones astronómicas de los babilonios permitieron a los griegos, entre ellos a Hiparco, hacia el siglo II AC, hacer un estudio sistemático de las relaciones entre los lados de un triángulo y sus ángulos. Esta rama de la matemática creció considerablemente con los indios y fundamentalmente, con los árabes en el siglo X; el Renacimiento y la revolución copernicana contribuyeron al reconocimiento de su importancia y a su difusión. Además de la astronomía, la navegación, la agrimensura, la cartografía., fueron también fuentes de motivación para su desarrollo.

Considerar un ángulo agudo  $\alpha$ . Se traza PQ perpendicular a uno de los lados del ángulo de modo que  $\triangle POQ$  resulta un triángulo rectángulo.



Trazar una paralela a PQ que corte a los lados del ángulo en  $P'$  y  $Q'$  respectivamente.

Los triángulos  $\triangle POQ$  y  $\triangle P'OQ'$  son semejantes. ¿Por qué?

Por lo tanto podemos afirmar que  $\frac{|PQ|}{|P'Q'|} = \frac{|OP|}{|OP'|}$  esto resulta equivalente a:

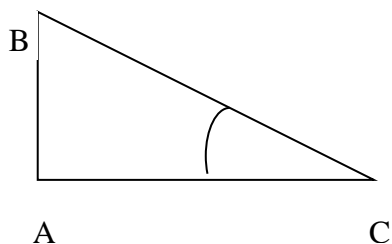
$\frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{|P'Q'|}{|OP'|}$  es decir la razón entre la medida del cateto opuesto de  $\alpha$  y la medida

de la hipotenusa es la misma. Esta razón depende sólo de la medida del ángulo  $\alpha$  y no de las medidas de los lados del triángulo rectángulo considerado.

El cociente entre la longitud del cateto opuesto a un ángulo y la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo se llama **seno** del ángulo.

Definiciones:

Dado el triángulo ABC rectángulo en A, si consideramos el ángulo agudo C, resulta que  $\overline{AB}$  es el cateto opuesto del ángulo C y  $\overline{AC}$  es el cateto adyacente a dicho ángulo.



Se definen:

$$\text{seno de } \hat{C} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{C}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{coseno de } \hat{C} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{C}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{tangente de } \hat{C} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{C}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{C}}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{C} &= \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} \\ \text{cos } \hat{C} &= \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} \\ \text{tg } \hat{C} &= \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} \end{aligned}$$



Para calcular las funciones trigonométricas de los distintos ángulos se puede utilizar la calculadora científica donde aparecen las teclas:



Verificar que el modo sea **DEG** (degrees=grados sexagesimales) ya que la calculadora tiene distintos sistemas de medición angular.

Las recíprocas de las razones anteriormente definidas se denominan:

$$\text{cosecante de } \hat{C} = \frac{1}{\text{sen } \hat{C}} \quad (\text{se abrevia: "cosec } \hat{C}")$$

$$\text{secante de } \hat{C} = \frac{1}{\text{cos } \hat{C}} \quad (\text{se abrevia: "sec } \hat{C}")$$

$$\text{cotangente de } \hat{C} = \frac{1}{\text{tg } \hat{C}} \quad (\text{se abrevia: "cotg } \hat{C}")$$

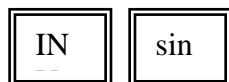
## ¿Cómo calcular la medida de un ángulo agudo si se conoce una de sus funciones trigonométricas?

Ejemplo:

Se sabe que  $\text{sen} \hat{\alpha} = 0,7071067$  y queremos calcular  $|\hat{\alpha}|$



Con la calculadora:



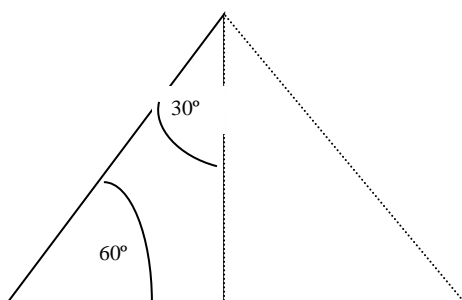
0,7071067= 45

Es decir que  $|\hat{\alpha}| = 45^\circ$

En algunas calculadoras, la tecla “INV” se reemplaza por “2ND”(second function) o por la tecla “SHIFT”.

## Ejercicios

1. En un triángulo rectángulo con ángulos agudos de  $60^\circ$  y  $30^\circ$  respectivamente, puede completarse por simetría un triángulo equilátero como muestra el dibujo:



Teniendo en cuenta que el cateto adyacente al ángulo de  $60^\circ$  mide la mitad de lo que mide la hipotenusa, calcular, sin hacer aproximaciones, el seno, el coseno y la tangente de los ángulos de  $60^\circ$  y  $30^\circ$ .

2. Demostrar que:

a)  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$  para todo ángulo agudo  $\alpha$ .

b)  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$  para todo ángulo agudo  $\alpha$ .

3. Sin hallar la medida de  $\alpha$  y sabiendo que:

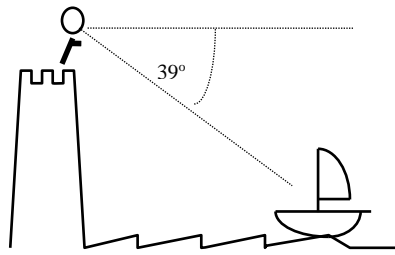
a)  $\text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  calcular  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{tg } \alpha$

b)  $\text{sen } \alpha = 0,7$  calcular  $\text{cos } \alpha$  y  $\text{tg } \alpha$

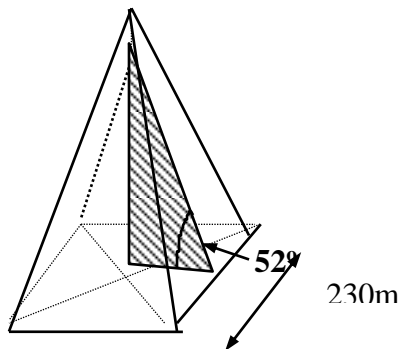
c)  $\text{tg } \alpha = 2$  calcular  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{cos } \alpha$

4. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal en el momento que una persona de 1,82m de altura proyecta una sombra de 1,65 metros?
5. Calcular el perímetro y el área de un triángulo isósceles si cada uno de los ángulos congruentes mide  $27^\circ$  y cada uno de los lados congruentes, 40 metros.
6. Las diagonales de un rombo miden 16cm y 10 cm. ¿Cuánto miden sus ángulos?
7. Las hojas de una tijera tienen 12 cm de largo y forman un ángulo de  $26^\circ$ . ¿Cual es la separación de las hojas en las puntas?

8. Desde lo alto de una torre, a 34m del piso, se distingue una embarcación siendo el ángulo de la visual  $39^\circ$ . Despreciando la redondez de la tierra, ¿a qué distancia del pie de la torre está la embarcación? ¿A qué distancia del observador?



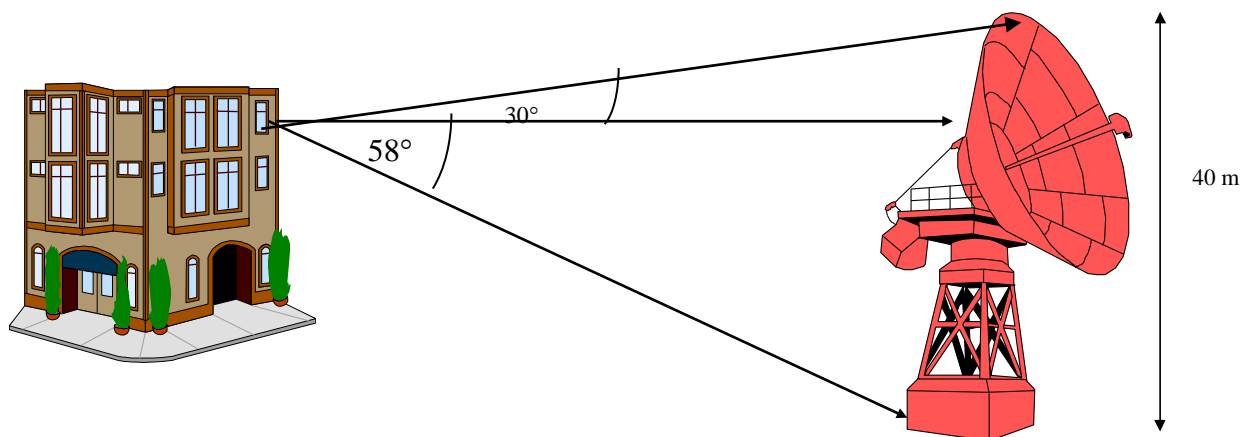
9. Calcular el perímetro y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.
10. Calcular la altura de la pirámide de Keops sabiendo que su base es un cuadrado de 230 metros de lado y el ángulo que forma una cara con la base es de  $52^\circ$ .



11. Una escalera de 4m está apoyada contra una pared. ¿Cual será su inclinación, si su base dista 2m de la pared?
12. La diagonal de un rectángulo mide 30cm y forma con uno de los lados un ángulo de  $25^\circ$ . Calcular el perímetro del rectángulo.
13. Un árbol y un observador se encuentran en orillas distintas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene  $35^\circ$ ; retrocede 10 metros y mide el nuevo ángulo, obteniendo un resultado de  $25^\circ$ .
- a) ¿Qué altura tiene el árbol?
- b) Si la primera medición la realiza justo en una de las orillas y el árbol se encuentra justo sobre la otra, ¿cuál es el ancho aproximado del río?
14. Un observador ubicado a 50m de un témpano de hielo ve el extremo superior con un ángulo de  $30^\circ$  y la base con un ángulo de  $45^\circ$ . Hallar la altura del témpano.

15. Desde la parte más alta de un edificio se ve la punta de una antena parabólica de 40 metros de alto con un ángulo de  $30^\circ$  por encima de la horizontal. Desde el mismo lugar, se ve la base de la antena, apoyada sobre el piso, con un ángulo de  $58^\circ$  por debajo de la horizontal. Calcular la altura del edificio y su distancia a la torre. (Esquema en la próxima hoja).





**16.** Se dibuja en un sistema de ejes cartesianos el gráfico de una función de proporcionalidad directa cuya constante es  $k = 0,75$ . ¿Qué ángulo forma la recta con el semieje positivo de las  $x$ ?

**17.** Calcular el área y el perímetro de un trapecio isósceles sabiendo que las bases miden 30 mm y 42mm respectivamente y uno de los ángulos adyacentes a la base mayor mide  $53^\circ 7' 48''$ .

**18.** Ubicar en un sistema de ejes cartesianos los puntos  $P=(3;1)$  y  $Q=(1;-2)$ . Si  $O$  es el origen de coordenadas, calcular:

a) La medida del segmento  $\overline{PQ}$ .

b) La medida del ángulo  $\widehat{POQ}$ .

**19.** ABCDE es un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio  $x$ .

Expresar:

a) El lado en función del radio.

b) El perímetro en función del radio.

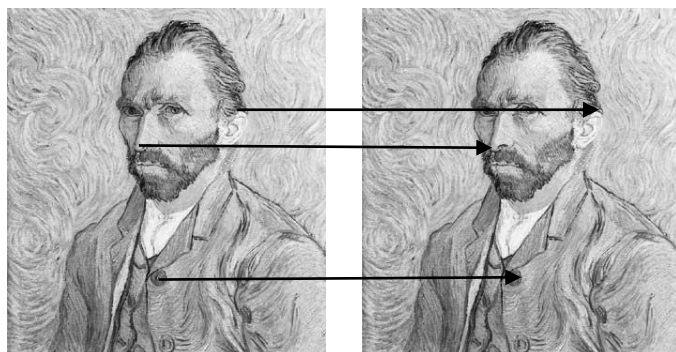
c) El área en función del radio.

d) Indicar si existe proporcionalidad en las funciones anteriores. Justificar.



## VECTORES

Supongamos que marcamos los puntos que indiquen la posición de la punta de la oreja, del botón del saco y de la punta de la nariz en el primer cuadro. Supongamos, también, que corremos ese cuadro hasta la segunda posición y unimos con flechas los puntos correspondientes:



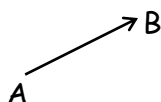
Observamos que las tres flechas están sobre rectas paralelas, tienen la misma longitud y “apuntan” hacia el mismo lado.

Las magnitudes que, como el desplazamiento, las fuerzas, etc., para quedar bien definidas requieren el conocimiento de una **dirección**, un **sentido** y un **módulo o norma** se denominan magnitudes vectoriales, a diferencia de las magnitudes escalares que representan fenómenos que pueden ser descriptos con un número, por ejemplo, la temperatura.

El elemento característico de las magnitudes vectoriales es el **vector**. La representación de un vector, cuando se trabaja en el plano o el espacio, es un segmento orientado (flecha), ya que una flecha tiene las tres características mencionadas: una dirección, un sentido y un número asociado (módulo) que es la longitud del segmento orientado.

Notación:  $\overrightarrow{AB}$

Se lee: vector AB.



**Dirección:** está dada por la recta sostén del segmento o por cualquiera de sus paralelas.

**Sentido:** lo indica la flecha.

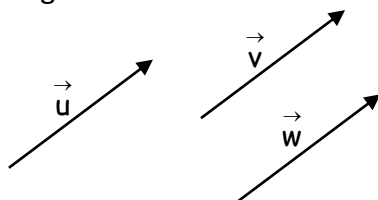
**Módulo o norma:** está representado por la longitud del segmento.

### ❖ Algunas definiciones

**Vector nulo:** lo indicaremos con  $\vec{0}$ . En él, el origen y el extremo coinciden. Carece de dirección y sentido. Su norma o módulo es 0. Su representación es un punto.

**Vectores opuestos:** dos vectores son opuestos cuando tienen igual dirección, igual módulo y sentido contrario.

**Vectores equipolentes:** dos vectores son equipolentes si tienen la misma dirección, el mismo sentido e igual módulo



$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son equipolentes, y todos ellos representan a un mismo vector libre.

### ❖ Operaciones

- **Suma de vectores:** significa la resultante de dos vectores del plano actuando simultáneamente. Esa resultante se obtiene de la siguiente forma, según los vectores que se suman tengan la misma dirección o no.

a) Si los vectores tienen la misma dirección:

i) y el mismo sentido, entonces la resultante es un vector con la misma dirección de los vectores dados, el mismo sentido de estos y su módulo es la suma de los módulos de los vectores dados.

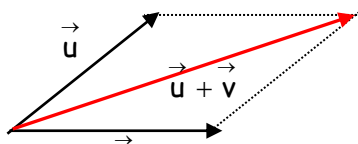
ii) y sentidos opuestos, entonces la resultante es un vector con la misma dirección de los vectores dados, con el sentido del que tiene mayor módulo y su módulo es la diferencia entre los módulos de los vectores dados.

La suma de vectores opuestos es un caso particular de la suma de vectores que tienen la misma dirección y sentidos opuestos. La suma de dos vectores opuestos es el vector nulo:

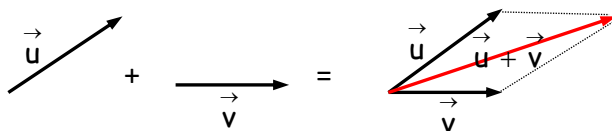


b) Si los vectores tienen distinta dirección, entonces la resultante se obtiene según la **regla del paralelogramo**.

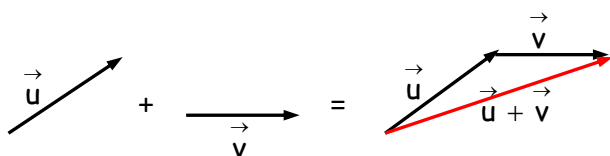
i) Si los vectores tienen origen común:



ii) Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no tienen origen común, entonces se consideran dos vectores equipolentes a ellos que tengan el mismo origen y se procede de igual forma que en el ítem i). Por ejemplo:



En este caso es equivalente la **regla de la poligonal**, la cual consiste en disponer vectores equipolentes a los dados de forma tal que el origen de uno de ellos coincida con el extremo del otro. La resultante es el vector que tiene por origen el origen del primer vector y por extremo el extremo del segundo vector.



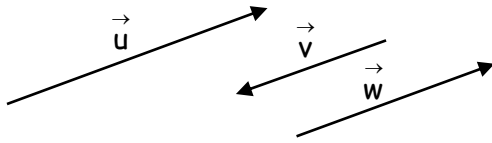
Propiedades de la suma de vectores

- 1) Si se suman dos vectores del plano, se obtiene un vector del plano.
- 2) La suma de vectores del plano es asociativa, es decir, cualesquiera que sean los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , se cumple que:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- 3) La suma de vectores del plano tiene elemento neutro, que es el vector nulo ( $\vec{O}$ ). Es decir, para cualquiera que sea  $\vec{u}$ , se cumple que:  $\vec{u} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{u} = \vec{u}$ .
- 4) Para cada vector  $\vec{u}$  del plano, existe un vector que sumado a él da el vector nulo y se lo denomina "el opuesto" ( $-\vec{u}$ ). Es decir,  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}$ .
- 5) La suma de vectores del plano es conmutativa, es decir, para cualesquiera que sean los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , se cumple que:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

❖ **Resta de vectores:** se define como la suma del primer vector dado del plano con el opuesto del segundo vector dado del plano, es decir,  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ .

## Actividades

### 1. Considerar los siguientes vectores:



Hallar gráficamente la resultante en cada caso:

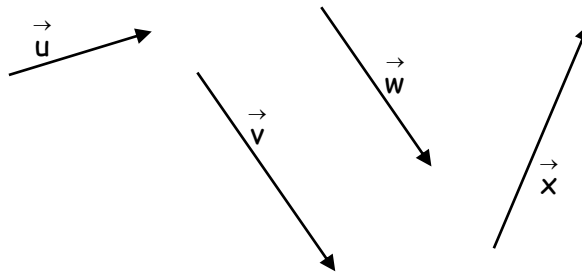
a)  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b)  $\vec{u} - \vec{v}$

c)  $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

Sabiendo que  $|\vec{u}| = 5$ ,  $|\vec{v}| = 2$ ,  $|\vec{w}| = 3$ , hallar el módulo de las resultantes en a), b) y c)

### 2. Considerar estos vectores:



En cada uno de los siguientes casos, hallar gráficamente la resultante usando la regla del paralelogramo y verificar el resultado usando la regla de la poligonal.

a)  $\vec{u} + \vec{v}$

b)  $\vec{u} - \vec{x}$

c)  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

d)  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{x}$

3. Dados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , **ambos con módulo 4**, aplicados al mismo punto y formando un ángulo de  $60^\circ$ ,

a) graficar y hallar la resultante de  $\vec{u} + \vec{v}$  mediante la regla del paralelogramo

b) Hallar los ángulos que forma esta la resultante con cada uno de los vectores sumandos y el módulo de dicha resultante.

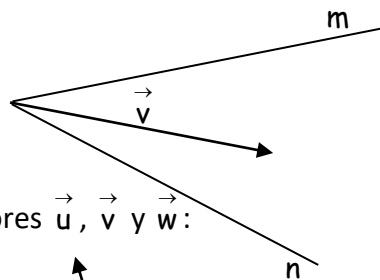
c) Hallar gráficamente  $\vec{u} - \vec{v}$ , y el módulo de dicha diferencia

4. Dados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , **con direcciones perpendiculares**, aplicados al mismo punto

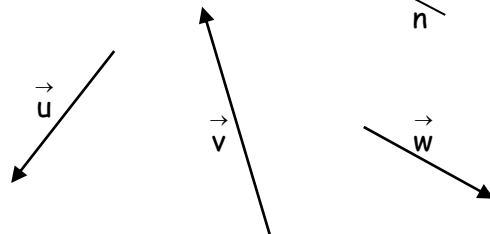
y tal que  $|\vec{u}| = 5$  y  $|\vec{v}| = 2$ ,

- graficar y hallar la resultante de  $\vec{u} + \vec{v}$  mediante la regla del paralelogramo
- Hallar los ángulos que forma esta la resultante con cada uno de los vectores sumandos y el módulo de dicha resultante.
- Hallar gráficamente  $\vec{u} - \vec{v}$ , y el módulo de dicha diferencia

5. Considerar el vector  $\vec{v}$  y las rectas  $m$  y  $n$ , y hallar dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  en las direcciones de  $m$  y  $n$ , tales que  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$  (Descomposición del vector  $\vec{v}$  en dos direcciones dadas).

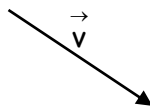


6. Considerar los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ :



- Descomponer el vector  $\vec{u}$  en las direcciones de  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .
- Descomponer el vector  $\vec{v}$  en las direcciones de  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ .

7. a) Dado el vector  $\vec{v}$  de módulo 5, descomponerlo gráficamente en la suma de dos vectores,  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ , de direcciones horizontal y vertical respectivamente.

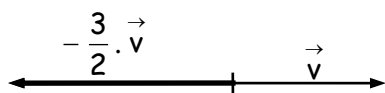


- Considerar que, en las condiciones del ítem a), el ángulo que  $\vec{v}$  forma con la dirección horizontal es de  $20^\circ$  y hallar los módulos de  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ .
- En las condiciones del ítem a), el módulo de  $\vec{u}$  es 4. Calcular la medida de los ángulos que forma  $\vec{v}$  con las direcciones horizontal y vertical, y el módulo de  $\vec{w}$ .

#### • Producto de un número real (o escalar) por un vector

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v}$  es un vector fijo del plano,  $\alpha \cdot \vec{v}$  es un vector de la misma dirección que  $\vec{v}$ , cuando  $\alpha \neq 0$  y  $\vec{v}$  es distinto del vector nulo. El módulo de  $\alpha \cdot \vec{v}$  es el siguiente:

$||\alpha \cdot \vec{v}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{v}||$ . El sentido de  $\alpha \cdot \vec{v}$  coincide con el sentido de  $\vec{v}$ , si  $\alpha > 0$ ; es opuesto al sentido de  $\vec{v}$ , si  $\alpha < 0$ ; y si  $\alpha = 0$ , entonces  $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{O}$ . Por ejemplo:



Algunas propiedades del producto de un número real por un vector

1) El producto de un número real por un vector del plano es un vector del plano.

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v}$  y  $\vec{u}$  son vectores del plano, entonces:

2)  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v})$  (Asociatividad mixta)

3) a)  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$   
 b)  $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{u}$  (Distributividad)

4)  $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

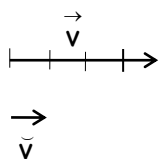
5)  $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{O} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{O}$

## 6) Condición de paralelismo entre vectores

Dos vectores no nulos del plano son paralelos si y solo si uno de ellos es el producto del otro por un número real distinto de cero.

### ❖ Versor

Es todo vector de módulo 1. El versor que tiene la dirección y sentido de un vector  $\vec{v}$  se indica  $\vec{v}$  y se lee: "versor v".

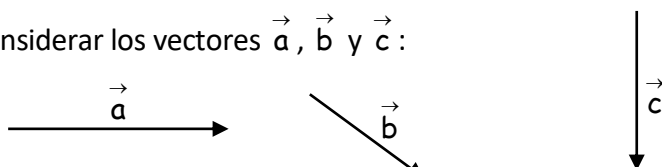


En este ejemplo:  $\vec{v} = 4 \cdot \vec{v}$

En general:  $\vec{v} = ||\vec{v}|| \cdot \vec{v}$

### Actividades

8. Considerar los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ :



Obtener gráficamente lo siguiente:

a)  $\vec{a} - \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

b)  $-\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$

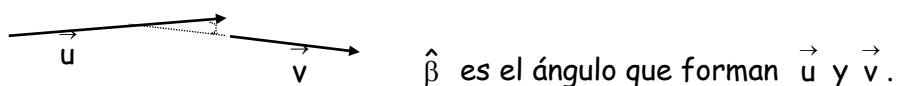
9. ABCDEF es un hexágono regular inscrito en una circunferencia de centro O. Se considera que  $\overrightarrow{FA} = \vec{u}$  y  $\overrightarrow{FB} = \vec{v}$ . Graficar y expresar cada uno de los siguientes vectores en función de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

- a)  $\overrightarrow{AB}$       b)  $\overrightarrow{FO}$       c)  $\overrightarrow{FC}$       d)  $\overrightarrow{BC}$       e)  $\overrightarrow{AO}$       f)  $\overrightarrow{FD}$

10. Probar vectorialmente que la base media correspondiente a un lado de un triángulo es paralela a ese lado y su medida es la mitad de la de este.

### ❖ Ángulo entre dos vectores no nulos

Es el ángulo, entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , que forman dos semirrectas concurrentes que tienen la dirección y sentido de los vectores dados del plano.

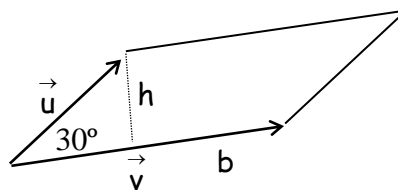


Dos vectores de igual dirección y del mismo sentido forman un ángulo de  $0^\circ$ . Dos vectores de igual dirección y de sentido contrario forman un ángulo de  $180^\circ$ .

### Actividades

11. a) Dados dos vectores,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , de módulos conocidos y que forman un ángulo  $\varphi$ , probar que el área del paralelogramo que los tiene por lados puede calcularse mediante el producto  $|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \text{sen } \varphi$ .

b) Calcular el área del paralelogramo cuyos lados son dos vectores de módulos 3 cm y 4 cm respectivamente y que forman un ángulo de  $30^\circ$ .



12. Si el área del paralelogramo que tiene por lados a dos vectores,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , mide  $20 \text{ cm}^2$ , el ángulo que forman esos vectores mide  $60^\circ$  y  $|\vec{u}| = 2 \cdot |\vec{v}|$ , hallar el módulo de cada uno de esos vectores y la medida de la altura del paralelogramo.



- **Producto escalar de dos vectores**

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores no nulos del plano que forman entre sí un ángulo  $\varphi$ , el producto escalar entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es el número real que se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

El producto escalar entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se anota así:  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

Luego:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$ .

Propiedades del producto escalar

1) Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores del plano, entonces se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \text{ (Propiedad conmutativa)}$$

2) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores del plano, entonces se cumple que:

$$(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \text{ (Asociatividad mixta)}$$

3) Si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son vectores del plano, entonces se cumple que:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ (Distributividad del producto escalar con respecto a la suma de vectores)}$$

**4) Condición de perpendicularidad entre vectores**

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores no nulos del plano,  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

5) Si  $\vec{u}$  es un vector del plano, entonces se cumple que:  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ .

Actividades

**13.** Hallar el ángulo que forman los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , sabiendo que el producto escalar entre ellos es 2,  $|\vec{u}| = 2$  y  $|\vec{v}| = \sqrt{2}$ .

**14.** Si  $\beta$  un número real, ¿cuáles de las siguientes expresiones son números reales siendo  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  vectores de un plano?

a)  $-\vec{a}$

b)  $|\vec{a}|$

c)  $\vec{a} + \vec{b}$

d)  $\beta \cdot \vec{b}$

e)  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

15. Dados  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$  no nulos y sabiendo que el ángulo que forman  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$  es de  $60^\circ$  y  $|\vec{OB}| = 3$ , calcular  $|\vec{OA}|$  para que  $\vec{OA} - \vec{OB}$  sea perpendicular a  $\vec{OA}$ .

16. a) El área del paralelogramo que tiene por lados a los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $30 \text{ cm}^2$  y el ángulo que forman esos vectores mide  $30^\circ$ . Hallar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

b) Si, además, se sabe que  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ , calcular  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$ ,  $|\vec{u} + \vec{v}|$  y  $|\vec{u} - \vec{v}|$ .

17.  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores no nulos y tales que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . El área del paralelogramo que tiene a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  por lados es  $12 \text{ cm}^2$  y  $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$ . Hallar  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$  y  $|\vec{u} - \vec{v}|$ .

18. Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$  y el área del paralelogramo que tiene a esos vectores por lados es  $20 \text{ cm}^2$ , calcular la medida del ángulo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

19. Demostrar que si  $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$ , entonces  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

20. Demostrar el Teorema de Pitágoras utilizando vectores.

21. Probar que si  $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ , entonces  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales.

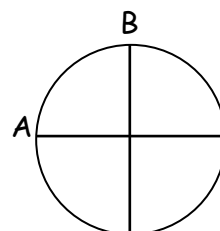
22. En el gráfico, el radio de la circunferencia es 1,5 y  $AC \perp OB$ . Calcular lo siguiente:

a)  $\vec{OB}^2$

b)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

c)  $\vec{OC} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB})$

d)  $(\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB})$



23. Sean dos vectores,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , de la misma dirección. Demostrar que:

$$|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 0.$$

## Respuestas

### Trabajo Práctico 1. Reales

1) (No son los únicos posibles)

0,121122111222....      5,10200300040000500000...

0,123456789101112131415.....

2) (No son los únicos posibles) racional: 2,330 ; irracional: 2,301234567891011...

3) (No son los únicos posibles) racional: 2,21; irracional:  $\sqrt{4.9}$

4) a), b), e), g)

5)  $-3, \sqrt[3]{-8}, 0 \in \mathbb{Z}; \sqrt{\frac{4}{9}}, 3, 14159, \sqrt{0,09^{-1}} \in \mathbb{Q}; -\pi, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 3\sqrt{5} \in \mathbb{R}; \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

6) a)  $-\sqrt{2} < -\frac{7}{5} < -\sqrt[3]{2} < -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} < -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} 2\sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} < 3, 1 < \pi < 3, 2$

b)  $-\sqrt{2}, -\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} 2\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \pi$

c) No

7) a) F      b) F      c) V      d) F (considerar que  $0 \in \mathbb{Q}$ )

9) a)  $\pi$       b)  $\frac{3}{2}\pi$       c)  $-1$       d) 1

10) a)  $\mathbb{R}$       b)  $\mathbb{R} - \{2\}$       c)  $\{2\}$       d)  $\emptyset$       e)  $\mathbb{R}$

f)  $\mathbb{R}$       g)  $\emptyset$       h)  $\emptyset$       i)  $\mathbb{R}$       j)  $\emptyset$

k)  $\mathbb{R}$       l)  $\emptyset$

11) I) a)  $\mathbb{R}^+$       b)  $\mathbb{R}_0^-$       c)  $\mathbb{R}$       d)  $\mathbb{R}^-$

II) a)  $\emptyset$       b)  $\mathbb{Q}^+$       c)  $\mathbb{R}$       d)  $\emptyset$

12) a)  $(0,5)$       b)  $[3,4]$       c)  $(-1,6]$       d)  $(0,3]$       e)  $\{\pi\}$

f)  $[-\pi, \pi)$       g)  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$       h)  $\emptyset$       i)  $[-\pi, \sqrt{2}]$       j)  $(-\pi; 1, 4)$

13) a)  $\mathbb{R}_0^+$       b)  $\mathbb{R}_0^-$       c)  $\mathbb{R}$       d)  $\{0\}$       e)  $\mathbb{R}_0^+$       f)  $\mathbb{R}$

14) a)  $|x-1|$       b)  $\pi-2$       c)  $x+6$       d)  $4-x$

15) a)  $\sqrt{2}$       b) 0      c) 0      d)  $6-2a$

16) a)  $[0, +\infty)$       b)  $(-\infty, +\infty)$       c)  $(0, +\infty)$       d)  $(-1, 1)$       e)  $(-\infty, 0]$

f)  $(-\infty, +\infty)$       g)  $(-\infty, +\infty)$       h)  $[0, +\infty)$       i)  $(-\infty, +\infty)$       j)  $(-\infty, 1]$

17. a)  $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 0; 1\}$ , b)  $S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ , c)  $S_{\mathbb{R}} = \{-3\}$ , d)  $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 7\}$ ,

e)  $S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[3]{-5}\}$ , f)  $S_{\mathbb{R}} = \{-1 - \sqrt{5}; \sqrt{5} - 1\}$ , g)  $S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}; 3\}$ , h)  $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ ,

i)  $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$ , j)  $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ , k)  $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$ , l)  $S_{\mathbb{R}} = \{4\}$ , m)  $S_{\mathbb{R}} = \{4\}$ , n)  $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

$$18) A = [-1; 0] \cup [1; +\infty), B = (-1; 0) \cup (1; +\infty), C = (-\infty; -1] \cup [0; 1], \\ D = (-\infty; -1) \cup (0; 1), E = [1; +\infty) \cup \{0\}, F = (-\infty; 0) \cup (0; 1), G = \{-1\}, \\ H = (-\pi; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty), I = \emptyset, J = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

$$19. a) i) 27, ii) 2\sqrt{x}, iii) \frac{a^7}{b} \quad b) x=2$$

$$20. a) 0, b) -2\sqrt{3}, c) 0, d) 111\sqrt{10}, e) \frac{7}{4}\sqrt{6}, f) -1, g) \sqrt[4]{2}, h) -2\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

$$24) a) -\frac{22}{15}\sqrt{3}, b) \frac{13}{14} - \frac{1}{7}\sqrt{2}, c) \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{7}}{6}, d) \frac{3}{14}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6}, e) \frac{31}{104} - \frac{11}{104}\sqrt{3}$$

$$26. a) \frac{3}{7}\sqrt{2} - \frac{2}{7}, b) \frac{3}{7}\sqrt{2} - \frac{2}{7}$$

$$27. a) (-3\sqrt{6}; 0), b) \left(-\frac{25}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{5}; +\infty\right)$$

$$29. (6 + 4\sqrt{2})cm \quad y \quad 2\sqrt{14}cm^2$$

$$30. 24cm^2$$

$$31. \sqrt{2}$$

$$32. a) \sqrt{2} \quad b) \sqrt[3]{2}$$

$$33. \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{36\pi}$$

$$34. \text{ triángulo } \sqrt{3} \cdot r, \frac{r}{2}, 3\sqrt{3} \cdot r, \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot r^2$$

$$\text{cuadrado } \sqrt{2} \cdot r, \frac{\sqrt{2}}{2}r, 4\sqrt{2} \cdot r, 2 \cdot r^2$$

$$\text{hexágono } r, \frac{\sqrt{3}}{2}r, 6 \cdot r, \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot r^2$$

$$35. 24 \text{ cm} ; 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$36. 144\pi cm^2; 128\pi cm^3$$

## Trabajo Práctico 2: Funciones

1. e) Al primer y cuarto cuadrantes.

2. b) El punto C.

3. a) Primer b) Tercer c) Cuarto d) Segundo

4. a) La opción iii).

5.a) 35649,13 km b) 1,75 hs (Aproximadamente 1 h 45 min)

6. a) 120 cm b) 20 minutos c) No d) 150 cm y 120 min. e) 60 cm f) De 70 a 90 minutos y de 120 a 230 minutos.

7 a) \$ 20 b) Aproximadamente \$ 0,27; y \$ 0,16. c) 262,5 km

10. b) Tabla I:  $y = x^3$  Tabla II:  $y = -2x + 1$

11.  $A = \{1; 3; 5\}$  e  $I = \{-2; 0; 2\}$

12. No es función porque no cumple la condición de existencia

13. i) a) Es función b)  $A = [1; 7]$  e  $I = \{3\}$  ii) a) No iii) a) Es función

b)  $A = [1; 5]$  e  $I = [2; 4]$  iv) a) No es función v) a) Es función b)  $A = [1; 10]$  e  $I = [2; 8]$

14. a)  $y = \frac{1}{3}x$   $y = x^2$   $y = 2x + 1$   $y = 2(x + 1)$   $y = 5$

b)  $A = \mathbb{R}$  e  $I = \mathbb{R}$ ;  $A = \mathbb{R}$  e  $I = \mathbb{R}^+_0$ ;  $A = \mathbb{R}$  e  $I = \mathbb{R}$ ;  $A = \mathbb{R}$  e  $I = \mathbb{R}$ ;  $A = \mathbb{R}$  e  $I = \{5\}$ .

15. a) V b) V c) V

16. i) a)  $\frac{1}{3}$  b) No c) No ii) a)  $\frac{1}{3}$  b) No c) Sí

17. a) 16 b) 2 c)  $-\frac{4}{3}$

18. i) a) Sí b) Sí c) Sí d) Sí

ii) a) No b) No c) No d) Sí

iii) a) Sí b) Sí c) Sí d) Sí

iv) a) No b) No c) Sí d) No

19. a)  $p(x) = 24 + 4x$  c)  $a(x) = x^2 + 12x$

20. a)  $A(g) = 2\pi g$  b)  $A(3) = 6\pi$  c) No

21. a)  $p(x) = (2 + \pi)x + 2\pi - 4$  b)  $p(4) = 6\pi + 4$  c) No; sí.

22. a)  $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$  b)  $A = \mathbb{R}$  c)  $A = [-\sqrt{2}; +\infty)$  d)  $A = \mathbb{R}$  e)  $A = \mathbb{R} - \{0\}$

f)  $A = \mathbb{R} - \{0\}$  g)  $A = [-6; 3]$  h)  $A = [-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2}]$

i)  $A = (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$  j)  $A = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

k)  $A = (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{3})$  l)  $A = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

23. a)  $A = \left(-\infty, -\frac{10}{9}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$  b)  $A = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

24. b) \$ 600 c) 50 días d) 20 es una constante e)  $d(n) = 20n$

25. a) Se reduce a la mitad b) Se triplica c)  $c(v) = 12/v$

27. P.I.: a) d) g) P.D.: b) c)

28. a)  $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt{5}x$ ,  $K = \frac{3}{5}\sqrt{5}$  b)  $K = 2$ ,  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{2}{x}$

29. a) directa,  $k=10$  b) inversa,  $k=50$  c) No hay proporcionalidad d) inversa,  $k=5$
30. a)  $h(b) = \frac{16}{b}$  b) Dominio =  $R^+$   $h: R^+ \rightarrow R / h(b) = \frac{16}{b}$  d) P.I.
31. Verdaderas: a) c) d) y f) Falsas: b) y e)
32. I a) Nunca, b) A veces II a) A veces, b) Nunca
34. a)  $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{14}$  b)  $\frac{3}{5}\sqrt{10}$
39. a) Hay 18 varones y 12 niñas b) A:350, B: 400, C: 800, D: 450
- 40.) a)  $S_R = \left\{ \frac{3}{5}\sqrt{5} \right\}$  b)  $S_R = \{0;1\}$  c)  $S_R = \emptyset$
- d)  $S_R = \{-2;2\}$  e)  $S_R = \{\sqrt{3} - \sqrt{2}\}$  f)  $S_R = \{\sqrt{3}\}$

### Trabajo Práctico 3: Proporcionalidad en geometría

- 3) a) 6 b) 5 c) - d)  $\sqrt{2}$
- 4)  $|\overline{BQ}| = 43,2 \text{ cm.}$   $|\overline{QC}| = 28,8 \text{ cm.}$
- 5) a)  $x = 2$  b)  $x = 9/20$
- 6)  $|x| = 12$   $|y| = 2/5$   $|z| = 8/5$   $|u| = 18$   $|v| = 3/5$   $|w| = 12/5$
- 8) Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes.  
Los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.
- 9) a) i)  $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BH}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}$  ii)  $\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{BH}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{CH}|}{|\overline{BH}|}$  iii)  $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BH}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{HC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|}$
- b)  $r = \sqrt{5}$   $r = 2$   $r = \frac{1}{2} \sqrt{5}$
- 10) a) 7,2 cm. b) 9,6 cm.
- 11) a)  $4\sqrt{3} \text{ cm.}$  b)  $2\sqrt{3} \text{ cm.}$
- 12) Los catetos miden 5 cm. Y  $20/3 \text{ cm.}$  , y la hipotenusa  $25/3 \text{ cm.}$
- 14)  $|\overline{BC}| = 400 \text{ m.}$
- 18) 9 o  $1/9$
- 19) Área del Trapecio =  $\frac{32}{3} \text{ cm}^2$  Área del Triángulo =  $\frac{4}{3} \text{ cm}^2$
- 20) a) No b) Si c) 1 d) No e) No f) Si g) Si. No
- 21) 72 cm.
- 22) 5 cm. / 6,25 cm. / 10 cm. / 12,5 cm.
- 23) 3,75 cm. / 6,25 cm. / 7,5 cm. / 10 cm. / 12,5 cm.
- 24) 37,5 cm.
- 25)  $135 \text{ cm}^2$
- 26)  $416,67 \text{ cm}^2$
- 27) a) F b) V c) F d) V e) V f) F g) V h) V

### Trabajo Práctico 4: Trigonometría

$$1. \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. a)  $\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\operatorname{tg} \hat{\alpha} = 1$  b)  $\cos \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ ;  $\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \frac{7}{51} \sqrt{51}$  c)  $\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \frac{2}{5} \sqrt{5}$ ;  $\cos \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

4.  $|\hat{\alpha}| = 47^{\circ} 48' 17''$

5. 151,28m y 647,22m<sup>2</sup>

6. 115°59'21'' y 64°0'39''

7. 5,54cm

8. 41,99m y 54,03m

9. 23.51cm y 38,09cm<sup>2</sup>

10. 147,19m

11. 60°

12. 79,74cm

13. a) 14,3m b) 20,43m

14. 78,87m

15. 29,36m y 18,35m

16. 36°52'12''

17. 288mm<sup>2</sup> y 92mm

18.  $|\overline{PQ}| = \sqrt{13}$   $|\widehat{POQ}| = 82^{\circ} 52' 12''$

19. a)  $L(x) = 1,18x$  b)  $P(x) = 5,88x$  c)  $A(x) = 2,38x^2$  d) En a) y b) hay proporcionalidad directa y las respectivas constantes son 1,18 y 5,88.

## **PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA SEGUNDO AÑO. 2017**

### **Unidad 1. El número real**

Concepto de número real. Propiedades de las operaciones en  $\mathbb{R}$ . Operaciones con radicales. Intervalos de números reales. Ecuaciones e inecuaciones en  $\mathbb{R}$ . Problemas.

### **Unidad 2. Funciones**

Función, definición, Representaciones gráficas, Resolución de problemas. Funciones en  $\mathbb{R}$ . Dominio, codominio, conjunto imagen. Función de proporcionalidad directa e inversa. Proporciones numéricas. Problemas.

### **Unidad 3 Proporcionalidad en geometría**

Teorema de Thales en el plano. Problemas de aplicación. Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza de triángulos. Propiedades de los triángulos semejantes. Semejanza de polígonos, razón de perímetros y áreas de polígonos semejantes. Problemas de aplicación.

### **Unidad 4. Trigonometría**

Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos. Problemas.

### **Unidad 5. Vectores en el plano**

Concepto de magnitud vectorial. Representación del vector como segmento orientado. Vectores equipolentes. Suma de vectores, propiedades. Producto de un vector por un escalar. Propiedades. Versor. Condición de paralelismo entre vectores. Producto escalar, propiedades. Angulo entre dos vectores. Condición de perpendicularidad. Problemas.



### Trabajo Práctico 0 (Tercer Año)

1) Operar para reducir la expresión:

a)  $a(a+1)(a-1) - a^3 - a(2a+1)$

b)  $(1-b)^2 \cdot (b-1)^3 : (1-b)^4$

2) Completar las siguientes expresiones para que sean trinomios cuadrados perfectos y escribir como binomio al cuadrado.

a)  $x^2 - 4x + \dots$

b)  $4a^2 - 8a + \dots$

c)  $9 + 2a + \dots$

3) Factorizar las siguientes expresiones:

a)  $x^2 + 2x$

b)  $x^3 - x^2$

c)  $ax + ab + cx + cb$

d)  $x^2 - 2x + ax - 2a$

e)  $x^2 + x - ax - a$

f)  $x^2 - a^2$

g)  $4x^2 - a^2$

h)  $a^2x^2 - \frac{1}{4}$

i)  $x^2 - 3$

j)  $x^2 - 6x + 9$

k)  $4x^2 + 4x + 1$

l)  $x^3 - x$

m)  $25x^2 + 10x + 1$

4) Dados los siguientes conjuntos de números reales, expresarlos como intervalo y realizar las operaciones que se indican:  $A \cup F$ ,  $B \cap C$ ,  $F^c$ ,  $D - A$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x-2| \cdot (x^2 - x) < 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{x - \frac{5}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} \right| \geq 2^{-1} \cdot \frac{1}{2} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{x^2-2} > 0 \right\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \leq 0 \right\}$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^3 \leq 3x \right\}$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{x-3}{x} \right| > 2 \right\}$$

5) Realizar las siguientes operaciones en  $\mathbb{R}$  en forma exacta:

a)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

b)  $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{5^3}}$

c)  $\sqrt{\frac{18}{4}} + 2\sqrt{\frac{8}{9}} + \sqrt{32} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

d)  $\frac{1}{1 - \sqrt{3}} + \sqrt{27} + \frac{1}{5}\sqrt{75} - \frac{1}{3}\sqrt{12}$

6) Verificar las siguientes identidades  $\forall a, b \in \mathbb{R} / a > b > 0$

a)  $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a - b}$

$$b) \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \sqrt{ab}$$

$$c) \frac{(a-b)^2}{a+b-2\sqrt{ab}} = a+b+2\sqrt{ab}$$

$$d) \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$e) \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2ab}} \cdot \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{2ab}} = a - b$$

$$f) \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}$$

$$g) \frac{ab}{\sqrt{b^3} - \sqrt{ab^2}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{b - a}$$

7) Resolver las siguientes ecuaciones

$$a) x + 2 = \frac{4}{x - 2}$$

$$b) \frac{7 + x^2}{4} + \frac{1 - x}{2} = (x + 2)^2 - 3 \cdot \left( \frac{x^2}{4} + 1 \right)$$

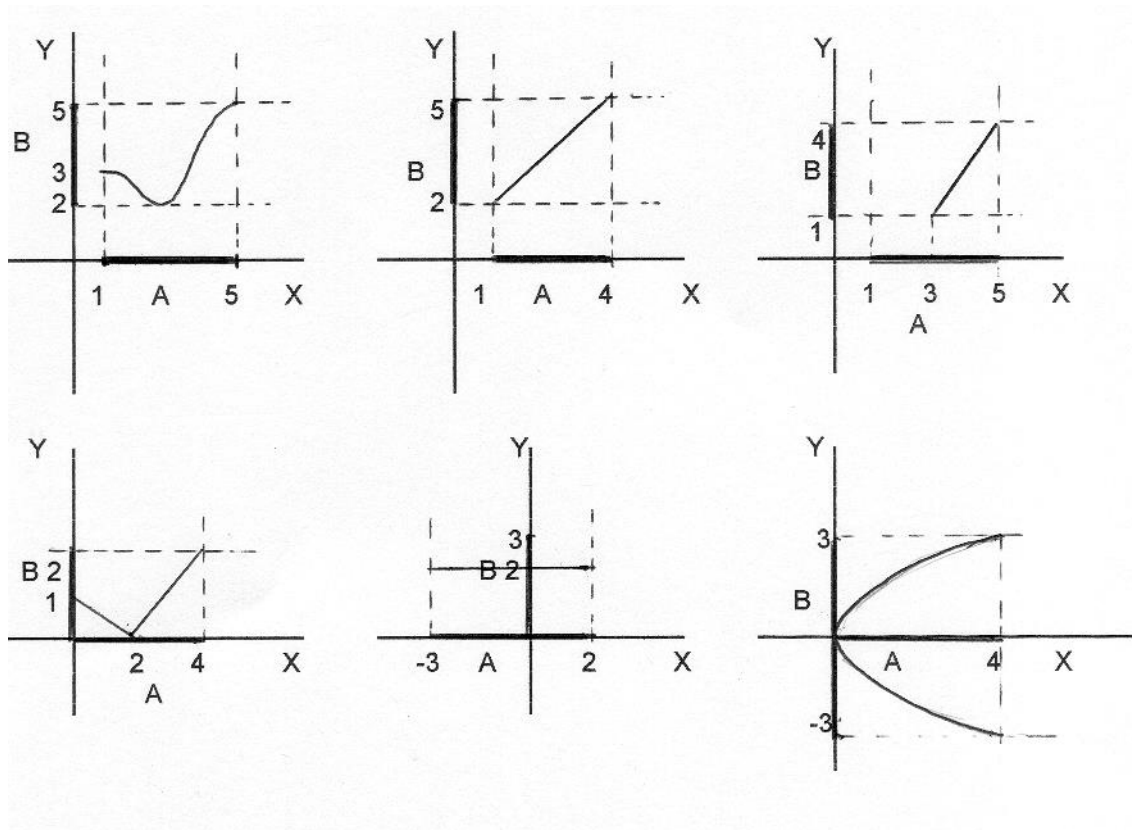
$$c) \frac{(3x - 2)^2}{4} - \frac{(3x + 2)^2}{2} + 8 = -\frac{9}{4}x^2$$

$$d) \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 4} = 3$$

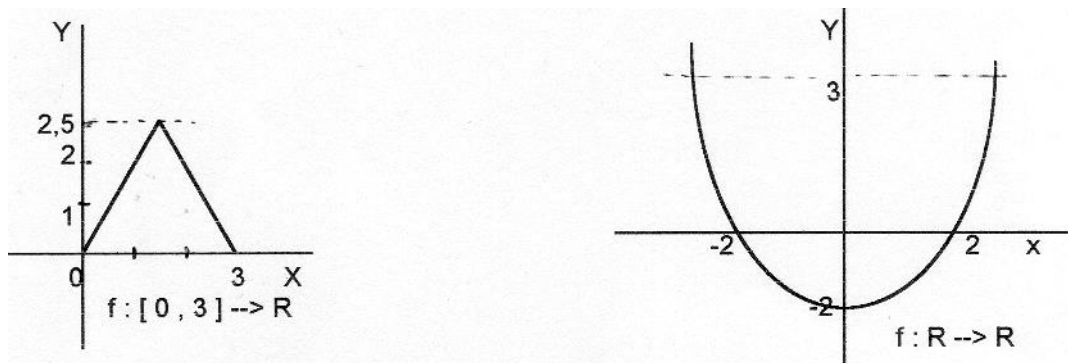
$$e) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = 3$$

8] Indicar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones de A en B y cuáles no. Justificar la respuesta.

$A \subseteq \mathfrak{R} \quad B \subseteq \mathfrak{R}$



9) Indicar cuál es el conjunto imagen de  $f$



10)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -2x - 1$  calcular el valor de  $x$  tal que

- a)  $f(x)=2$       b)  $f(x)=-1$

11) Dada la función:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -x^3 + x - 1$  calcular :  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0,5)$ ,  $f(-1/3)$

12) Hallar dominio mayorante (máximo en sentido de inclusión) de las siguientes funciones y expresarlo como intervalo:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{|x+1|}-2}$$

$$b) f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-9)(x+1)}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x^2-1)}$$

$$e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^2-1}$$

$$f) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$$

13) Las localidades A, B y C estan alineadas, B se encuentra entre A y C a 40 km de A. Un tren parte de A hacia C con una velocidad constante de 90 km/h. Simultáneamente parte de B hacia C otro tren a velocidad constante de 60 km/h.

- graficar la distancia hasta A en función del tiempo para ambos trenes en un mismo grafico.
- En que momento y a que distancia de A se encuentran?

14) Un recipiente con agua que se encuentra a 30° se pone a calentar de forma tal que la temperatura aumenta en forma constante hasta alcanzar el punto de ebullición (100°) a los 5 minutos. Se retira y se deja a temperatura ambiente de 20° tardando 20 minutos en llegar a la misma (y suponiendo que desciende en forma constante). A temperatura ambiente se mantiene el resto el tiempo.

- Graficar la temperatura del agua en función del tiempo.
- Cuál es la temperatura a los 3 minutos, 10 minutos y 40 minutos de comenzada la experiencia?

15) Pedro sale en bicicleta de su casa a las 12 del mediodía a velocidad constante de 20 km/h hasta la casa de su amigo que dista 50 km de su casa, al llegar, permanece allí por 2 hs y regresa a velocidad constante de 30 km/h

- Graficar la función distancia (a la casa de Pedro) en función del tiempo.
- Leer en el gráfico:
  - Momento en que se encuentra a 40 km de su casa
  - Distancia a su casa a las 13 hs

### Respuestas:

1) a)  $-2a(1-a)$ , b)  $b-1$

2) a)  $(x-2)^2$       b)  $(2a-2)^2$       c)  $\left(3 + \frac{a}{3}\right)^2$

3) a)  $x(x+2)$       b)  $x^2(x-1)$       c)  $(a+c)(x+b)$       d)  $(x-2)(x+a)$   
e)  $(x+1)(x-a)$       f)  $(x-a)(x+a)$       g)  $(2x-a)(2x+a)$       h)  $(ax-1/2)(ax+1/2)$   
i)  $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$       j)  $(x-3)^2$       k)  $(2x+1)^2$   
l)  $x(x-1)(x+1)$       m)  $5x+1)^2$

4)  $A = (0,1)$  ;  $B = (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [\frac{7}{2}; +\infty)$  ;  $C = (-\sqrt{2}; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$   $D = [-2; 0] - \{-1\}$

$E = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$  ;  $F = (-3; 1) - \{0\}$

$A \cup F = (-3; 1) - \{0\}$  ;  $B \cap C = (-\sqrt{2}; 1) \cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$

$F^c = (-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$  ;  $D - A = [-2; 0] - \{-1\}$

5) a)  $3-2\sqrt{6}$       b)  $\frac{3}{5}$       c)  $\frac{35}{6}\sqrt{2}+1$       d)  $-\frac{1}{2} + \frac{17}{6}\sqrt{3}$

7) a)  $\pm\sqrt{8}$       b)  $\frac{5}{18}$       c)  $\frac{7}{9}$       d)  $\pm 2$       e)  $\frac{5}{3}$

8) a) si, b) si c) no d) si e) si f) no

9) a)  $[0; 2.5]$       b)  $[-2, +\infty)$

10) a)  $-\frac{3}{2}$       b) 0

11)  $f(0)=-1$ ;  $f(-1)=-1$ ;  $f(-2)=5$  ;  $f(0.5)=-\frac{5}{8}$  ;  $f(-\frac{1}{3})=-\frac{107}{27}$

12) a)  $[-3; 3]$       b)  $\mathbb{R} - \{-3; -1; 3\}$       c)  $(-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup (2; +\infty)$   
d)  $(1; +\infty)$       e)  $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [4; +\infty)$       f)  $(-2; 1]$

13) Se encuentran después de 1h 20 min y a una distancia de A de 120 km

14) A los 3 min:  $72^\circ$ , a los 10 minutos:  $80^\circ$ , a los 40 minutos:  $20^\circ$

# Más problemas ingeniosos

*Aquí incorporamos un conjunto de problemas correspondientes al primer nivel de Olimpiadas matemáticas. Para consultas, dirígete a la Página Web o acércate al Aula 33 del subsuelo.*

1. ¿Cuál es el menor número natural  $m$  tal que  $936m$  es cuadrado perfecto?
2. Se tiene varios números que son múltiplos de  $k$ . Probar que si se escribe uno a continuación del otro da un múltiplo de  $k$ .
3. De los números del 1 al 1000, ¿cuántos son divisibles por 5 o por 9 pero no por ambos?
4. En un conjunto de cinco números el promedio de los tres primeros es 15 y el de los dos últimos es 10. ¿Cuál es el promedio de los cinco números?
5. Tres apostadores A, B y C pronostican el resultado de cinco partidos de fútbol. (L = local, E = empate y V = visitante). Los tarjetas presentadas fueron:

L	E	V
X		
X		
	X	
	X	
		X
Jugador A		

L	E	V
		X
	X	
X		
	X	
X		
Jugador B		

L	E	V
X		
X		
		X
X		
	X	
Jugador C		

Finalizando los partidos se observó que los apostadores obtuvieron: A, tres aciertos; B tres aciertos; C, dos aciertos.

Construir una tarjeta con cinco aciertos.

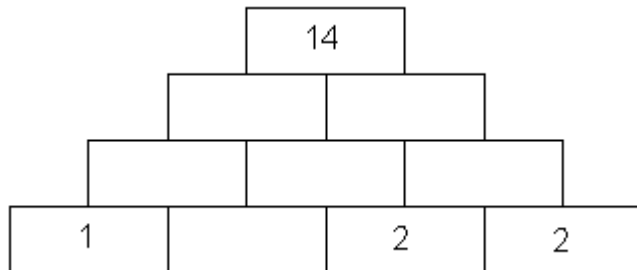
6. Tenemos un tablero de  $6 \times 6$ , ¿cuál es la mínima cantidad de casillas que hay que pintar para que no se pueda ubicar una ficha -de la forma que muestra la figura- sobre tres casillas sin pintar?



Aclaración: vale rotar la ficha.

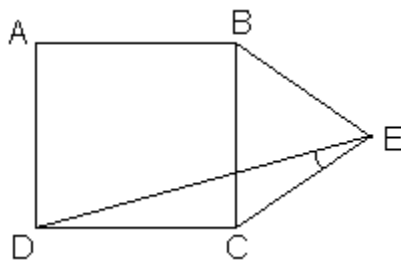
7. Un juego para dos personas comienza con una pila de 21 piedras. Cada jugador en su turno puede quitar una o dos piedras. Gana el que se lleva la última. Determinar cuál de los dos jugadores (el primero o el segundo) tiene una estrategia ganadora.

8. En el tablero de la figura hay cuatro casillas ocupadas.



Escribir en cada una de las seis casillas vacías un número (no necesariamente entero) de modo que una vez completo el tablero con los 10 números, se verifique que el número escrito en cada casilla sea igual a la suma de los dos números escritos en las dos casillas sobre las que está apoyada.

9. ABCD es un cuadrado y BCE un triángulo equilátero.



Hallar la medida del ángulo CED.

10. Sea ABC un triángulo y  $r$  la recta paralela a BC que pasa por A. Sea P el punto de intersección entre  $r$  y la bisectriz del ángulo ABC. Sea Q el punto de intersección entre  $r$  y la bisectriz del ángulo ACB. AB mide 7 y AC mide 8. Hallar la medida de PQ.

11. Sea ABCD un cuadrado y M el punto medio de AB. Sea P la intersección de BD con MC. Hallar el área del triángulo MBP.

12. ABCD es un rectángulo. P un punto cualquiera sobre el lado BC. Sea Q el punto sobre AP tal que DQ es perpendicular a AP.  $AB=5$ ,  $AD=3$ . Hallar el producto de las medidas AP y DQ.