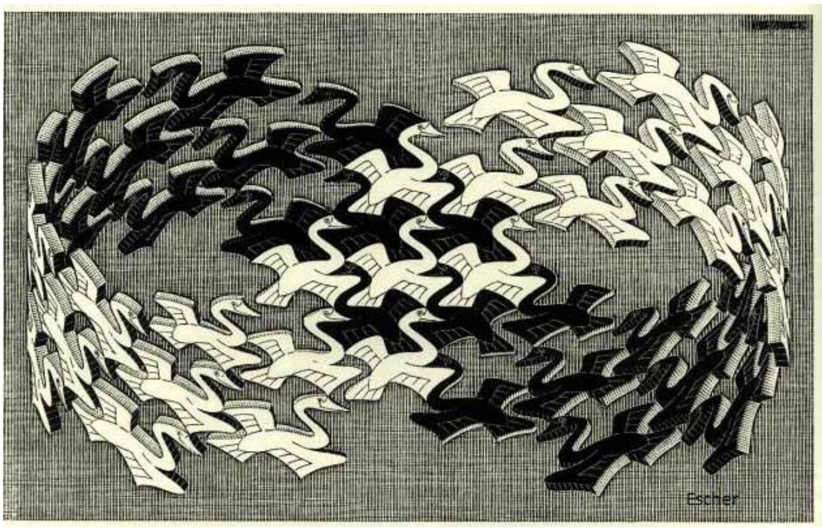
Colegio Nacional de Buenos Aires

MATEMÁTICA DE 4to AÑO

Guía de Trabajos Prácticos



2022

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

ÍNDICE

PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA CUARTO AÑO. 2019

Unidad 1: ***Funciones exponenciales y logarítmicas***

- Función exponencial. Definición. Características. Representación gráfica.
- Logaritmo: definición. Propiedades. Cambio de base.
- Función logarítmica. Definición. Características Representación gráfica.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Unidad 2:***Trigonometría***

Primera parte

- Sistemas de medición angular: sistema sexagesimal y radial.
- Definición de las funciones trigonométricas. Teorema del seno y del coseno. Aplicaciones.
- Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Signo de las funciones en los cuatro cuadrantes.
- Funciones de la suma y diferencia de dos ángulos. Funciones del ángulo duplo. Relaciones entre las funciones de los ángulos complementarios, suplementarios, que difieren en π y opuestos. Identidades.

Segunda parte

- Ecuaciones trigonométricas.
- Representaciones gráficas de seno, coseno y tangente. Función armónica generalizada.

Unidad 3: ***Vectores en el plano y en el espacio***

- Concepto de vector. Versores fundamentales. Expresión canónica y cartesiana de un vector.
- Adición de vectores. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades.
- Ángulo entre dos vectores. Producto escalar de dos vectores: definición y propiedades Norma de un vector.
- Producto vectorial entre dos vectores: definición y propiedades. Cálculo.
- Paralelismo y perpendicularidad de vectores.

Unidad 4: ***Geometría lineal en $\mathbb{R}^3$. Sistemas de ecuaciones lineales.***

Primera parte

- Ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$. Intersección entre dos rectas. Rectas paralelas. Rectas alabeadas.
- Ecuación general de un plano. Obtención de la ecuación de un plano conocidos un punto y un vector normal ; dados tres puntos no alineados; determinado por una recta y un punto exterior; determinado por dos rectas paralelas no coincidentes; determinado por dos rectas que se cortan.

Segunda parte

- Planos proyectantes de una recta.
- Intersecciones: recta –plano y plano-plano.
- Distancias: punto-punto; punto-recta; punto plano; recta - recta; recta – plano.
- Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad 5: ***Números complejos***

- Número complejo: definición. Parte real e imaginaria de un número complejo. Unidad imaginaria. Adición y multiplicación en $\mathbb{C}$. Forma cartesiana y binómica. Complejos conjugados. Propiedades. División de números complejos. Potencias de i
- Argumento y módulo de un complejo. Propiedades del módulo. Forma trigonométrica y polar de un complejo. Multiplicación y división de complejos en forma polar y/o trigonométrica. Representación gráfica de números complejos.
- Potenciación de números complejos. Fórmula de De Moivre.

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

TRABAJO PRÁCTICO 0

1. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $(-x+2)^3=1$ b) $x^3=x$ c) $4x^4-5x^2+1=0$

d) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$ e) $4x^4+15x^2-4=0$ f) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{18})\,x=-6$

g) $(x-1)^4-3(x-1)^2=-2$ h) $(m^2-1)(m^2+3)=2m^2$

i) $4a^2(1-a-a^2)=-a^4+a^3$ j) $3(x^4-16)(x^3-2x^2+x)=0$

k) $\frac{7}{5}\left(1-\frac{3}{10}y\right)\left(\frac{7}{3}+\frac{14}{9}y\right)=0$ l) $(x^3-8)(x^3+8)(6x^2+7x+8)(1-x)=0$

m) $9p^9-7p^7=6p^9+2p^7$

2. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$ b) $\frac{x+11}{x}=7-\frac{9+4x}{x^2}$ c) $4x-\frac{2}{x}=2x+\frac{35}{3}$

d) $x+\frac{1}{x-3}=5$ e) $(x-5\sqrt{x})^2+10(x-5\sqrt{x})+24=0$ f) $\frac{t+1}{t^2-1}=\frac{1}{t-1}$

3. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a) $\left(x+\frac{1}{5}\right)(-3x+9)\geq 0$ b) $(2x+1)\,.\,(3x-2)<0$ c) $3x^2+15x\geq 0$

d) $(x+10)^2\geq -4$ e) $x^4\leq -5$ f) $|x-2|.(x^2-5)\geq 0$

g) $x^2-x<0$ h) $x^2-½\leq 4-x^2$ i) $(2x-3)^2>4(x+1)(x+2)$

j) $x^2+2x+1\leq 4$ k) $x^3>x$

4. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas inecuaciones:

a) $\frac{25x^2-9}{3+\sqrt{x^2-5}}<0$ b) $\frac{2}{x}<-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{2}{x}>\frac{3}{5}$ d) $\frac{27-x^3}{|x+3|}<0$

e) $\frac{|x-2|}{x^2-5}\leq 0$ f) $\frac{x^2-5}{|x-2|-2}\leq 0$ g) $\frac{x^2-5}{|x-2|+2}\leq 0$ h) $\frac{2x-4}{x^2-9}\geq 0$

i) $\frac{2}{x}-3<-1$ j) $\frac{1}{x}\geq\frac{6}{x}$ k) $\frac{3}{x+2}<-2$ l) $\frac{3x+2}{x+1}<1$

5. Dadas las siguientes funciones definidas de su dominio D en R:

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ii) $f(x) = x^2 + 5x - 2$ iii) $f(x) = |x - 3|$ iv) $f(x) = |x^2 - x|$

v) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ vi) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) Hallar dominio e imagen
b) Clasificarlas de D en R y hallar conjuntos mayorantes en los que sean biyectivas
c) En dichos conjuntos, hallar la función inversa

Conjunto mayorante: Máximo en sentido de inclusión

6. Dada la recta **r**: y = $-\dfrac{1}{2}$x + 1, obtener la ecuación de la recta **s** que cumple con la condición establecida en cada ítem:

a**) s // r** y contiene al origen de coordenadas; b) **s** $\perp$ **r** y tiene ordenada al origen -3;

c) **s** $\perp$ **r** e interseca al eje de abscisas en -3; d) **s // r** y contiene al punto (2/3; 9).

7. ¿Para qué valor de m, las rectas **r**: (5m - 1) x - y + 2 = 0 y **s**: 3 x – 6 y + 9 = 0 son perpendiculares?

8. Un auto circula por la ruta 2 y la distancia (en km) que lo separa de Buenos Aires en función del tiempo (en hs) está dada por una función lineal. Se sabe que a las dos horas de haber partido de la ciudad de origen se encontraba en el km 150 y que media hora más tarde se encontraba a 100 km de Bs. As.

a) Encontrar la fórmula de la función lineal de la que habla el enunciado.
b) ¿Qué parámetro de la fórmula hallada en el ítem a) indica que el auto se acerca a Buenos Aires? ¿Por qué?
c) ¿A qué distancia de Bs. As. se encontraba el automóvil en el momento de partir? ¿A qué velocidad circula?
d) ¿En qué momento pasó por el km 225 de la ruta?
e) Graficar e indicar un dominio que dé cuenta de la situación.

9.Escribir la fórmula de una función cuadrática definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que verifique lo pedido en cada caso:

a) su vértice es el punto (-6; 0) y tiene concavidad positiva.
b) su vértice es el punto (–1; -3) y contiene al punto (1; –2).
c) sus raíces son 0 y -2 y tiene concavidad negativa.
d) sus raíces son 3 y -1 y contiene al punto (0; 1).
e) tiene un máximo en x = –3, f(–3) = 6 y f(0) = 0.
f) es creciente en $(-\infty; -3)$, f(–3) = 6 y f(0) = 0.

10. Se están haciendo pruebas desde un submarino lanzando misiles desde cierta profundidad y registrando su altura, medida en metros respecto del nivel del mar, en función del tiempo, medido en segundos.
Un misil fue lanzado desde una profundidad de 160 m, atravesó la superficie a los 2 seg. de haber sido lanzado y explotó contra el blanco que flotaba en el mar 6 seg. después.
a) ¿Cuál es la variable independiente del problema? ¿Y la dependiente?
b) Definir la función que permite calcular su altura en función del tiempo sabiendo que se trata de una función cuadrática. (**Nota**: Dar un dominio que sea coherente con la situación planteada.)
c) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó el proyectil? ¿En qué momento sucedió?
d) ¿A qué altura se encontraba 1 seg. después de haber sido lanzado? ¿Y a los 3 seg.?
e) ¿En qué intervalo de tiempo estuvo por encima del nivel del mar? ¿Y por debajo?

11. Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 10 = 3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -3x(x+2) \\ y = 4(x-1)(x-3) \end{cases}$

12. Factorizar cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x$ b) $S(x) = \frac{1}{27}x^3 - 8$ c) $Q(x) = x^2 - 5$

d) $T(x) = (2x+1)^2 - 9$ e) $R(x) = 4x^4 - 12x^3 + 9.x^2$ f) $U(x) = 25x^4 - 16$

g) $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$ h) $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

i) $S(t) = -\frac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 + 2t$ j) $T(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

k) $M(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ l) $N(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

13. Indicar para que valores están definidas las siguientes expresiones y simplificarlas.

a) $\dfrac{x^4 - 16}{x^4 - 2x^2 - 8}$ b) $\dfrac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$ c) $\dfrac{2t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{t^2 + t}$

d) $\dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2}$ e) $\dfrac{-x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 6x}$ f) $\dfrac{3x^2 - 3x}{2x^3 - 2x^2}$

Respuestas

1. a) {1} b) {0; 1; -1} c) {1; -1; ½; -1/2} d) {3; 2; -2; -1} e) {1/2; -1/2} f) $\left\{-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$

g) {2; 0; $\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1$} h) $\left\{\sqrt[4]{3}; -\sqrt[4]{3}\right\}$ i) $\left\{0; \frac{5+\sqrt{73}}{-6}; \frac{5-\sqrt{73}}{-6}\right\}$ j) {2; -2; 0; 1} k) {10/3; -3/2} l) {2; -2; 1}

m) $\left\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$

2. a) {-10; 10} b) {3; -1/2} c) {6; -1/6} d) {4} e) {16; 1; 9; 4} f) $\mathbb{R}$ - {-1; 1}

3. a) [-1/5; 3] b) (-1/2; 2/3) c) $(-\infty; -5]\cup[0; +\infty)$ d) $\mathbb{R}$ e) $\varnothing$

f) $\left(-\infty; -\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5}; +\infty\right)\cup\{2\}$ g) (0; 1) h) [-3/2; 3/2] i) $(-\infty; 1/24)$ j) [-3; 1]

k) $(-1; 0)\cup(1; +\infty)$

4. a) $\varnothing$ b) (-10/3; 0) c) (-10/3; 0) d) (3; +∞) e) $\left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$ f) $\left[-\sqrt{5}; 0\right)\cup\left[\sqrt{5}; 4\right)$

g) $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ h) (-3; 2] $\cup$ (3; + ∞) i) (- ∞ ; 0) $\cup$ (1; + ∞) j) (- ∞ ; 0) k) (-7/2; -2) l) (-1; -1/2)

6. a) y = - 0,5x b) y = 2x - 3 c) y = 2x + 6 d) y = -0,5x + 28/3

7. -1/5

8. a) y = -100 km/h x + 350 km c) 350 km; 100 km/h d) A las 1,25 h (1 h 15 min.) de haber partido.

9. a) Una respuesta posible es y = $(x+6)^2$ b) y = 1/4 $(x + 1)^2$ - 3 c) Una respuesta posible es y = -x (x + 2). d) y = -1/3 (x - 3) (x + 1) e) y f) y = -2/3 $(x + 3)^2$ + 6

10. b) f(t) = –10 (t – 2) (t – 8); Dom(f) = [0; 8] c) 90m a los 5seg. d) A 70m bajo el mar. e) (2; 8) y [0; 2)

11. a) {(2; 4); (-1; 1)} b) {(2; - 4)} c) $\varnothing$

12. a) x (x - 1) (x + 1) b) 1/27 (x - 6) $(x^2 + 6x + 36)$ c) (x - $\sqrt{5}$) (x + $\sqrt{5}$)

d) 4 (x -1) (x + 2) e) 4 x^2 $(x - 3/2)^2$ f) 25 (x - 2 $\sqrt{5}$ /5) (x + 2 $\sqrt{5}$ /5) $(x^2 + 4/5)$ g) 8 (x + 1/2) (x + 1) (x - 3/4)

h) 4 (x + 1) (x -1/2) (x - 2)

i) –1/2 t (t + 2) (t - $\sqrt{2}$) (t + $\sqrt{2}$) j) (x - 1) $(x + 3)^2$ k) $(x - 2)^2$ (x + 3)

l) (x -1) (x + 2) $(x^2 + 9)$

13. a) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$; $\frac{x^2+4}{x^2+2}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1 \wedge x \neq -1\}$; $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

c) $\{t \in \mathbb{R} \ / \ t \neq 0 \wedge t \neq -1\}$; $\frac{2\left(t^2+1\right)}{t}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0 \wedge x \neq 2\}$; $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$

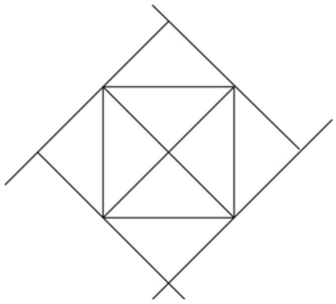
- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

Unidad 1 – Funciones Exponenciales y logarítmicas

Los siguientes problemas son un extracto de los "Aportes para la enseñanza. Nivel Medio". Ministerio de Educación. CABA 2007.

PROBLEMA 1: LOS CUADRADOS SOMBREADOS

Observen la siguiente figura:



"A partir de un cuadrado realizaremos una nueva construcción: se trazan las diagonales y por cada vértice se dibuja una paralela a la diagonal. A esta construcción que da origen a otra figura la denominaremos el paso."

a) Comparen el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.

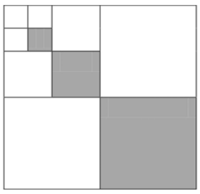
b) Si se repite el paso varias veces ¿podrían indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo respecto del cuadrado original?

c) Si llamamos A al área del cuadrado original, determinen qué área tendrá el cuadrado generado en el paso 17.

d) ¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado obtenido en el paso n? (también en este caso el cuadrado original tienen área A).

PROBLEMA 2: LOS CUADRADOS SOMBREADOS

Observen la siguiente figura:



A un cuadrado -el más grande, que llamaremos inicial - cuya área es 1, se le trazaron las medianas y se sombreó el cuadrado inferior derecho. En este caso se llama paso al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. Al cuadrado que queda determinado en la parte superior izquierda se le trazan sus medianas y se sombrea el cuadradito que queda en la parte inferior derecha. Y así se continúa.

a) ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el primer paso, en el segundo y en el cuarto?

b) ¿Habrá algún paso en el que se obtenga un cuadrado de área 1/60?

c) Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es 1/16384 ¿cuál será el área sombreada en el cuadrado que se obtenga en el siguiente paso? ¿ y en el anterior?

d) ¿Habrá una expresión general que me permita saber el área de los sucesivos cuadraditos sombreados según la cantidad de pasos que se hicieron?

e) ¿Podrían contestar la pregunta anterior si el área del cuadrado original fuera A en lugar de 1?

PROBLEMA 3: LOS PIOJOS

En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 05-05-08 y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (o sea, los piojos se pueden contar ¡con precisión!). Transcurridos 10 días el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse,

a. ¿Cuántos piojos habrá transcurridos 20 días?

b. ¿Cuántos piojos había transcurridos 5 días?

c. ¿Cuántos piojos se pusieron en la cabeza?

d. ¿Cuántos piojos había el primer día?

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

1. Se parte de una muestra de dos kilogramos de una sustancia que se reduce un 75% cada año.

a) ¿Cuánto tiempo habrá pasado para que quede una masa de $\frac{1}{32}$ kg.?

b) Definir y graficar una función que modelice el problema.

c) La masa, ¿puede desaparecer? Justificar la respuesta.

2. Sean $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

$f_1(x) = 3^x$	$f_4(x) = 3^{x-1}$	$f_7(x) = -3^x$
$f_2(x) = 2.3^x$	$f_5(x) = 3^x+1$	$f_8(x) = -2.3^x$
$f_3(x) = 3^{2x}$	$f_6(x) = 3^{-2x}$	$f_9(x) = -3^x + 1$

Para cada una de las funciones:

a) Obtener la ecuación de la asíntota horizontal y la intersección con el eje y.

b) Indicar intervalos de crecimiento o decrecimiento.

c) Representar gráficamente.

3. Hallar los números reales a y b tal que la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2^{x+a} + b$ tenga asíntota horizontal en $y = 1$ y $f(2) = 3$.

4. Hallar, si existe, el conjunto de ceros, la intersección con el eje de ordenadas, la ecuación de la asíntota y graficar aproximadamente las funciones exponenciales cuyas fórmulas están dadas por:

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = -2.\left(\frac{4}{3}\right)^x + \frac{3}{2}$

c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x + \frac{1}{2}$

5. Hallar, si existe, la fórmula de una función exponencial f creciente de la forma $f(x) = k.a^x + b$, con asíntota horizontal en $y = -3$ y tal que $f(0) = -2$. ¿Es única?.

6. Dada la función exponencial dada por la fórmula $f(x) = a.b^x + c$, *se saben los siguientes datos:* $C_0 = \{1\}$; $y = -\frac{3}{2}$ *es A.H.;* $P_0 = (2;3)$ *pertenece al gráfico de "f".* Hallar los valores de los números reales "a, b y c".

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $7^{-x+4} = 1$ b) $3^{-x+2} = 9$ c) $25^{x-2} = 5^{-x}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = 4$

e) $3^{\frac{x}{2}} = 27$ f) $\sqrt[x]{2^{x+5}} = 4$ g) $2^{x+1} + 4^x = 80$ h) $17.6^x - 12.6^{-x} = 5$

8. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2.3^x = 9.\dfrac{2}{27^x}$ b) $\sqrt{4^{x-1}} = \sqrt[3]{8^{2x}}$ c) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 2^x$

d) $4^{2x-1} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1-x}$ e) $(0,5)^{x+3} = 8\sqrt{2}$ f) $4.3^{2x+1} + 17.3^x - 7 = 0$

g) $8^x - 8^{-x} - \dfrac{3}{2} = 0$

9. A partir del gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ obtener los gráficos de:

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_1(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 3$, $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_2(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$,

$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_3(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_4(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} - 3$,

$f_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_5(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|}$

En cada caso escribir el conjunto imagen, la ecuación de la asíntota horizontal e intersección con el eje y.

10. Calcular, utilizando la definición de logaritmo

a) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3}$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ c) $\log_{\sqrt{3}} 81$ d) $\log_a a$ (con $a>0$, $a \neq 1$)

e) $\ln(e^5)$ f) $\ln^5 e$ g) $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ h) $\log_4\left(\dfrac{3}{5}\right) - \log_4\left(\dfrac{12}{5}\right)$

11. Definir funciones logarítmicas de la forma $f_i: A_i \to \mathbb{R} \,/\, f_i(x) = \log_a(x-b)$ que verifiquen las condiciones dadas y obtener el gráfico aproximado de cada una de ellas:

a) Tenga asíntota vertical en $x = -2$ y pasa por el punto $(2; 2)$.

b) El dominio es $(4, +\infty)$ y pasa por el punto $(6; -1)$.

12. La molaridad en iones de hidrógeno H_3O^+ es el cociente entre el número de moles de H_3O^+ y el volumen de la solución en litros y se expresa como $[H_3O^+]$. La acidez de una solución se mide por su pH (potencia hidrógeno) que se define por: $pH = -\log[H_3O^+]$, definición propuesta por el químico danés Sörensen en 1909.

a) ¿Cuál es el pH (redondeado a dos decimales) de una solución que contiene 3.10^{-5} moles de H_3O^+ por litro?

b) ¿Cuál es la molaridad en iones H_3O^+ de una solución para la cual el pH es 2? ¿Y si el pH es 9?

c) Evaluar el porcentaje de descenso de la molaridad en iones H_3O^+ cuando el pH de una solución varía de 2 a 3.

13. Graficar cada una de las siguientes funciones $f_i: A_i \to \mathbb{R}$, indicando: dominio, ecuación de la asíntota vertical, intersección con el eje y, ceros, conjunto de positividad y negatividad, crecimiento y /o decrecimiento.

a) $f_1(x) = \log_2 x$ b) $f_2(x) = -\log_{\frac{1}{4}} x$ c) $f_3(x) = 1 - \log_{\frac{1}{4}} x$

d) $f_4(x) = 2.\log_2 x$ e) $f_5(x) = \dfrac{2}{1-\ln x}$ f) $f_6(x) = \ln(2x-6)$

g) $f_7(x) = \log(2x+3) + \log(4-x) - 2$ h) $f_8(x) = \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right|$ i) $f_9(x) = \log_5 |x+5|$

14. Una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto es medir la actividad (A) de carbono 14 presente en el mismo. Esta actividad viene dada por: $A = 15{,}3.(0{,}866)^t$ donde t es la antigüedad en miles de años y A se mide en desintegraciones por minuto por gramo (dpm/g) de carbono 14.

Calcular la antigüedad aproximada de un objeto en el que A= 7,65 dpm/g

15. La fórmula de Ehremberg $\ln P = \ln 2{,}4 + 1{,}84 \,.\, A$ es una fórmula empírica que relaciona la altura A (en metros) con el peso P (en kg fuerza) para niños entre 5 y 13 años. Se pide:

a) Calcular el peso aproximado de un niño de 1,20m de altura.

b) Calcular la altura aproximada de un niño que pesa 40 kg.

16. Encontrar, si es posible, $x \in \mathbb{R} \,/\, \log_3\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right) = 1$

17. Calcular:

a) $\log_{\sqrt{2}}\left(2^{-30}\right)$ b) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5^{-3}}$ c) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}$ d) $\log_{\sqrt{3}} 1$

18. Qué relación tiene que existir entre **a** y **b** para que se verifique que:

$\log a + \log b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$

19. Calcular **a** sabiendo:

$\log_a n = 2$ y $\log_a 64.n = 5$

20. La intensidad "I" de un terremoto medida en la escala Richter está vinculada con la energía liberada (en Kwh) en el mismo mediante la fórmula:

$I = \frac{2}{3} \,.\, \log \frac{E}{E_0}$ Donde $E_0 = 7.\ 10^{-3}$ Kwh.

Calcular:

a) La energía liberada en un terremoto de intensidad 8 en esta escala.

b) En cuánto aumenta la energía liberada si se aumenta en una unidad la intensidad del terremoto.

21. Resolver en $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt[3]{\log x} + \log x = 10$ (Pista: sustituir $\sqrt[3]{\log x}$)

b) $\log(x^2) = (\log x)^2$

c) $\log_2(x^{-1}) + (\log_2 x)^{-1} = -\frac{3}{2}$

d) $\log_2(9-2^x) = 3-x$

e) $\ln(2x^2 + x + e) = 1$

f) $\left[\ln(2e) + \ln\left(\frac{1}{2}e\right)\right] . \ln x = 12$

22. Encontrar $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ para que el gráfico de f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = k.a^x$ pase por los puntos P y Q si:

a) $P = (-2; 16)$ y $Q = (2; 1)$ b) $P = (3; 1/3)$ y $Q = (1; 3)$

23. Un grupo de científicos estudió la cantidad de árboles jóvenes existentes en un bosque, ya que notaron que la misma decrecía con el tiempo debido a la existencia en la zona de residuos industriales. Llegaron a la conclusión que, la ecuación que mide la cantidad *"q"* de árboles jóvenes a medida que transcurre el tiempo *"t"* medido en años es:

$$q = 200.e^{-0,025.t}$$

Si la investigación se realizó a comienzos de 2015 (*t=0*). Se pide:

a) Calcular aproximadamente la cantidad de árboles jóvenes presentes en ese instante.

b) Calcular cuántos árboles se espera que haya a comienzos del año 2030.

c) Estimar para qué año se espera que cantidad de árboles jóvenes se haya reducido a la mitad.

24. Encontrar el error del siguiente razonamiento:

$(-1)^4 = 1^4 \Rightarrow \log_a (-1)^4 = \log_a 1^4 \Rightarrow 4\log_a(-1) = 4.\log_a 1$ (por propiedad de logaritmo de una potencia)

Aplicando logaritmo a ambos miembros

$\log_a(-1) = \log_a 1 \Rightarrow -1 = 1$, por ser log una función inyectiva

25. Resolver en $\mathbb{R}$:

a) $\log_3(x^2 - 12x + 20) = 2$ b) $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$

c) $\log_{35} x + \log_{35}(12 - x) = 1$ d) $x^{\log x} = 100x$

e) $\log_2\left[\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)\right] = 4$ f) $10^x.100^{1/x} = 1000$ g. $\log_4 x + \log_2 x = 1$

26. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k + \log_a(x + b)$.

a) Encontrar a, k y $b \in \mathbb{R}$, sabiendo que los puntos $(0; -3)$, $(1; -4)$ y $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ pertenecen al gráfico de f.

b) Para los valores obtenidos, analizar la existencia de la función inversa y, si es posible, obtenerla. Si existen, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

   a. Graficar ambas funciones en forma aproximada e indique ecuaciones de las asíntotas.

Respuestas

1. a) 3; c) No.

2.

A.H	Ordenada
y=0	y=1
y=0	y=2
y=0	y=1
y=0	y=1/3
y=1	y=2
y=0	y=1
y=0	y=-1
y=0	y=-1
y=1	y=0

3. a=2; b=3/2; c=-1.
5. k=1; $a \in \mathbb{R}^{+}_{\neq 1}$, b=-3.
6. A=2; B=3/2 y C=-1
7. a) x=4; b) x=0; c) x=-4/3; d) x=-7; e) x=6; f) x=5; g) x=3; h)x=0.
8.
9. a)x= 0,5; b)x=-1 ; c)x=0,75; d)x=-1; e)x= -6,5; f)x=-1; g) x= 1/3
10. a) -2; b) -1/2; c=8; d=1; e=5; f) 1; g)0; h)-1
11. a) f_1: $(-2,+\infty) \to \mathbb{R} / f_1(x) = \log_2(x+2)$, b) f_2: $(4,+\infty) \to \mathbb{R} / f_2(x) = \log_{1/2}(x-4)$
12. a) ph ≅ 4,52; b) 0,01 y 10^{-9}; c) 990% aprox

14. 4.818 años.
15. a) 21,8kg; b) 1,52m.
16. x= 6/5
17. a) –60; b) 3/2; c) –6; d)0.
18. a.b= 1
19. a=4; n=16.
20. 7.10^{-9}
21. a)S= $\{10^8\}$;b) S={1,100} ; c) S= $\left\{4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ d)S={0,3} ; e)S={0,-1/2}; f)S={e^6} 19)a) k = 4, a= 0,5 ; b) k=9, a = 1/3;
22. a) $f(x) = \frac{1}{4} . \frac{1}{2}^x$; b) a) $f(x) = 9 . \frac{1}{3}^x$
23. a) 200; b) aproximadamente 137; c) aproximadamente 28 años.
25. a) S ={1,11}; b) S={100, 1/10}; c)S={7,5}; d) S={100, 1/10}; e) S= {2^{128}} ; f) S={1,2} g) $2^{2/3}$; 22) a) a= ½; b=1; k=-3.

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico 2

Funciones Trigonométricas

1) Completar las tablas estableciendo las equivalencias entre el sistema sexagesimal y el circular

a)

sexagesimal	360°	330°	300°	270°				150°		120°	90°	60°		30°
circular	2π				$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	π		$\frac{3\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}\ \pi$	

b)

sexagesimal	1°	300°30´	-1250°		
circular				3	$\frac{\pi}{12}$

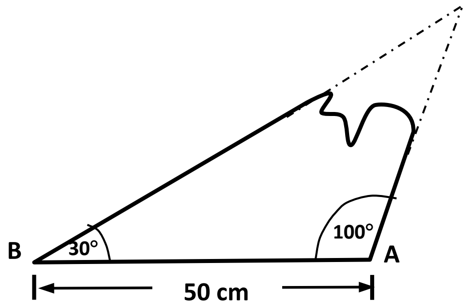
2) Mediante el uso de las identidades trigonométricas fundamentales, calcular el valor de todas las funciones trigonométricas restantes, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$ si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$ si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

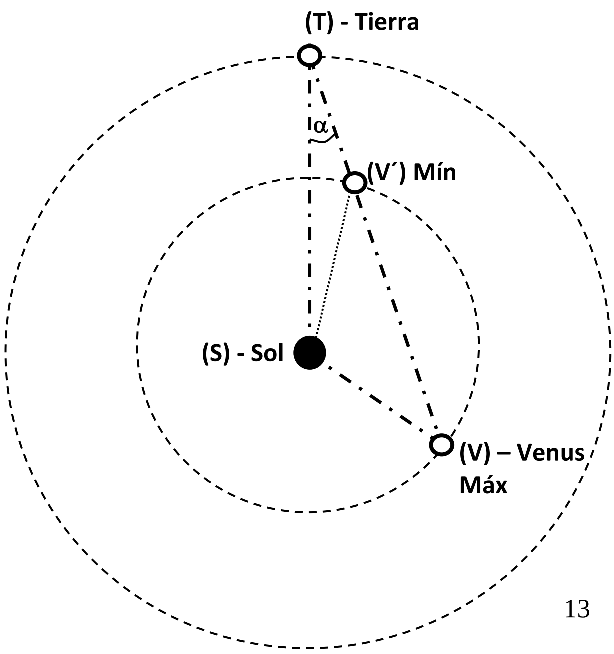
c) $\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ si $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

3) Demostrar que $\operatorname{tg}\alpha = a \quad \Rightarrow \quad \left|\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha\right| = \frac{|a|}{a^2+1}$

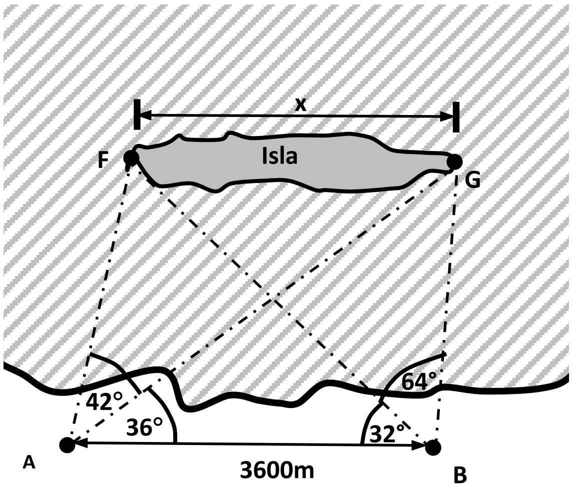
4) Se quiere reconstruir un triángulo del que sólo se conserva el fragmento que indica la figura. ¿Cuál es la longitud de los lados faltantes?



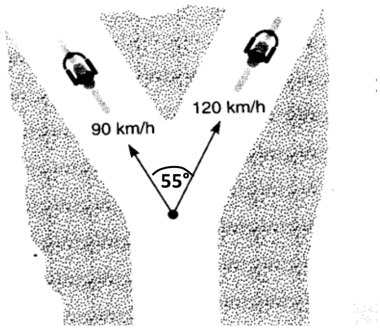
5) Suponiendo que las órbitas de la Tierra y de Venus al girar en torno al Sol son circulares y que sus radios respectivos tienen una longitud de 150.000.000 km y de 109.000.000 km respectivamente. ¿A qué distancia máxima y mínima, se encuentra Venus de la Tierra cuando el ángulo de observación Sol-Tierra-Venus ($\hat{\alpha}$ en la figura) es de 22°? Expresar el resultado con 3 cifras significativas.



6) Desde dos puntos A y B situados sobre la costa y distantes 3600m, en un terreno plano, se divisa una isla cercana. Con los datos de la figura, calcular la longitud "x" de la isla.



7) Dos motociclistas parten del punto en que se bifurcan dos carreteras rectas que forman un ángulo de 55°. Si viajan con una rapidez constante de 90 km/h y 120 km/h respectivamente ¿A qué distancia se encuentran uno de otro al cabo de 3 minutos?



8) Verificar las siguientes identidades. Determinar, en cada caso, el conjunto en el que son válidas

a) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

b) $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $(\operatorname{tg}\alpha - 1)^2 = \sec^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha$

d) $\dfrac{1}{\sec^2\alpha} = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}$

e) $\sec\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{tg}\alpha$

f) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = (1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)$

g) $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha - 1}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha}$

h) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tg}\alpha$

i) $\operatorname{cotg}^2\alpha - \cos^4\alpha . \operatorname{cosec}^2\alpha = \cos^2\alpha$

j) $\sec^4\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha = 1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$

k) $\sec\alpha . \operatorname{sen}\alpha + 1 = \dfrac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

l) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$

m) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 2\operatorname{tg}\alpha . \cos^2\alpha + 1$

n) $\dfrac{\sec\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha - 1}$

9) Reducir cada una de las siguientes expresiones

a) $x = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

b) $x = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)}$

10) Verificar las siguientes identidades. Determinar, en cada caso, el conjunto en el que son válidas

a) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{2\,\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) $\operatorname{tg}(2\beta) = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$

d) $2+\operatorname{tg}(2\beta).\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}(2\beta)}{\operatorname{tg}\beta}$

11) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0;2\pi)$

a) $2\ .\cos(2x)-1=0$

b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1$

c) $2.\operatorname{sen} x - \sec x = 0$

d) $\operatorname{sen}(2x).\cos x - 2\cos^3 x = 0$

12) Resolver las siguientes ecuaciones en $\Re$

a) $-2+\sqrt{3}\operatorname{cosec} x = 0$

b) $\cos^2 x = \cos x$

c) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}\sec x - \operatorname{tg}^2 x = 1$

e) $\cos^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} = 0$

f) $\sec x + \operatorname{tg} x = 1$

g) $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x = 0$

h) $\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(4x) = 0$

i) $\operatorname{sen}^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$

j) $\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x + 2 = 0$

k) $4\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 7$

l) $\cos(2x) = 1 - \operatorname{sen} x$

m) $4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0$

n) $2\operatorname{sen}(t).\cos^2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)$

o) $\operatorname{tg}^4\varphi - 2\sec^2\varphi + 3 = 0$

p) $\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x} = 0$

13) Verificar las siguientes identidades, presuponiendo válidas las operaciones algebraicas que se realizan.

a) $\dfrac{\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 1 - \operatorname{sen} x.\cos x$ (Ayuda: Recordar cómo se factoriza a^3+b^3)

b) $\dfrac{\cos(-x)}{1+\operatorname{tg}(-x)} - \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{1+\operatorname{cotg}(-x)} = \operatorname{sen} x + \cos x$

c) $\operatorname{cosec}^4 x - \operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{cotg}^4 x + \operatorname{cotg}^2 x$

d) $\dfrac{\text{cotg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha}{\text{cotg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha} = \cos(2\alpha)$

14) **Ejercicios para trabajar con un software de apoyo – (Se sugiere Geogebra)**

Dadas las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

a) $y = \text{sen}(2x)$

b) $y = \frac{1}{2}\ \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $y = 2\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

e) $y = 5.\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y = -4.\text{sen}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

Se pide, calcular:

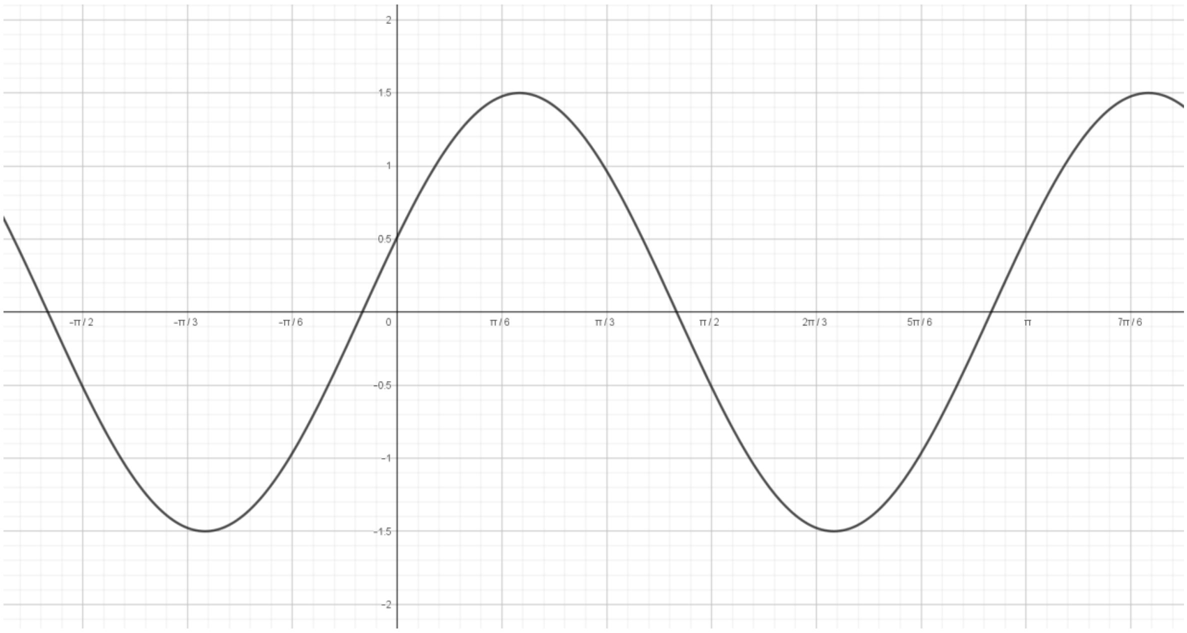
i) Amplitud, pulsación, ángulo de desfasaje y período.

ii) Representación gráfica aproximada

iii) Máximos y mínimos

iv) C_0, C_+, C_-.

15) El gráfico siguiente, corresponde a una función de la forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = A\ \text{sen}(bx + \alpha)$



a) Encontrar A, b y α.

b) Determinar amplitud, pulsación, ángulo de desfasaje y período.

16) **a)** Representar gráficamente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 2\text{sen}\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)$

b) Determinar amplitud, pulsación, período y desfasaje.

c) Encuentre una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que tenga la misma gráfica que f , pero que responda a una fórmula del tipo $g(x)=A\cos(ax+b)$. Justificar la respuesta.

17) Una boya en un canal se balancea hacia arriba y hacia abajo con el movimiento de las olas describiendo una trayectoria sinusoidal. La boya se desplaza un total de 60 cm desde su punto más alto hasta su punto más bajo y regresa a su punto más alto cada 10 segundos. Sabiendo que en t=0 la boya se encuentra en su punto más alto, escribir una ecuación que describa su movimiento. Realizar un gráfico aproximado.

18) El número de predadores y el número de presas, en un sistema predador - presa tiende a variar periódicamente. En una cierta región con halcones como predadores y roedores como presas, la población de roedores R varía de acuerdo con la ecuación $R=1200+300\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y la población de halcones varía con la ecuación $H=250+25\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)$, con t medido en años desde el 1° de enero de 2010.

a) ¿Cuál era la población aproximada de roedores y cuál la de halcones el 1° de enero de 2010?

b) ¿Cuáles son las poblaciones máximas de roedores y halcones? Estos máximos, ¿ocurren alguna vez al mismo tiempo?

c) ¿En qué fecha se alcanzó la primera población máxima de roedores?

d) ¿Cuál es la mínima población de halcones? ¿En qué fecha se alcanzó por primera vez?

19) Resolver en $\mathbb{R}$

a) $\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

b) $\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

c) $\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

d) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\text{tg}(3x)$

20) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=-2\,\text{sen}\left(bx+\frac{\pi}{3}\right)$ con $b\in\mathbb{R}^+$

a) Obtener b sabiendo que la distancia entre dos ceros consecutivos es $\frac{2\pi}{3}$.

b) Encontrar el conjunto de ceros, el conjunto de valores de x para los cuales “f” presenta máximos y mínimos.

c) Realizar un gráfico aproximado.

Respuestas

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

1)

a)

sexagesimal	360°	330°	300°	270°	240°	210°	180|	150°	135°	120°	90°	60°	45°	30°
circular	2π	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}\ \pi$	$\frac{\pi}{6}$

b)

sexagesimal	1°	300°30´	-1250°	171°53´14,4”	15°
circular	$\frac{\pi}{180} \cong 0{,}017$	$\frac{601}{360}\pi \cong 5{,}245$	$-\frac{125}{18}\pi \cong 21{,}817$	3	$\frac{\pi}{12}$

2)

	sen	**cos**	**tg**	**cosec**	**sec**	**cotg**
a)	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{13}{12}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{5}{12}$
b)	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$
c)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

4) 32,64 cm y 64,28 cm aprox **5)** $4{,}57.10^7$ km y $2{,}32.10^8$ km **6)** aprox. 3570m **8)** aprox. 1899 m

9) **a)** $\cot g\ \beta$ **b)** $tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

11) **a)** $\left\{\frac{5\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$ **b)** $\{0 ; \pi\}$ **c)** $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ **d)** $\left\{\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right\}$

12) ***Nota: En todas aquellas respuestas en que el resultado depende de un parámetro “k”, el mismo debe ser un número entero.***

a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **b)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = 2k\pi$ **c)** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$;

d) $\varnothing$ **e)** $x = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6}$ **f)** $x = 2k\pi$ **g)** $x = k\pi$

h) $x = \frac{k\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} \vee \quad x = \frac{2\pi}{3}$ **i)** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **j)** $x = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{3}$

k) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ **l)** $x = k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

m) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ **n)** $t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad t = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad t = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

o) $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ **p)** $x = k\pi$**;**

15) **a)** $A = \frac{3}{2}$; $b = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{9}$ **17)** $x = 30\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \quad \vee \quad x = 30\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$

18) **a)** 1200 y 232 **b)** 1500, 275, no **c)** 1/1/2011 **d)** 225, 1/7/2013

19) **a)** $\left\{\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, 2k\pi\right\}$ **b)** $\left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{11\pi}{12} + 2k\pi\right\}$ **c)** $\left\{-\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right\}$ **d)** $\left\{\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}\pi\right\}$

20) **a)** $b = \frac{3}{2}$ **b)** $C_0 = \left\{x \in \mathbb{R} / x = -\frac{2}{9}\pi + \frac{2k}{3}\pi\right\}$; Cmáx= $C_{MÁX} = \left\{x \in \mathbb{R} / x = -\frac{5}{9}\pi + \frac{4k}{3}\pi\right\}$; Cmín= $C_{MÍN} = \left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{9}\pi + \frac{4k}{3}\pi\right\}$

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico 3

Vectores en el plano y en el espacio

1) Si **ABCD** es un paralelogramo y O es el punto de intersección de las diagonales, realizar en forma gráfica las siguientes operaciones:

a) $2.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ **b)** $\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{DB}$ **c)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{CO}$ **d)** $2.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-2.\overrightarrow{AB}$

2) Dados $P=(-3;2)$ y $Q=(3;0)$ obtener:

a) Las componentes de $\overrightarrow{PQ}$ y expresar dicho vector en forma canónica

b) $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{QP}\right\|$

c) El versor asociado a $\overrightarrow{PQ}$

d) Un vector de módulo 3, con la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$, pero de sentido contrario.

3) Sean los vectores $\vec{u}=3.\breve{i}+\breve{j}$ y $\vec{v}=(-2{,}5)$. Hallar, en forma analítica:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $3.\vec{u}-\vec{v}$ c) $\frac{1}{2}.\vec{u}-\frac{3}{2}.\vec{v}$

4) Dados $\vec{u}=2\breve{i}-\breve{j}$ y $\vec{v}=\breve{i}-3.\breve{j}$

a) Obtener $\vec{u}+\vec{v}$

b) Comparar $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$ con $\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$.

c) ¿En qué caso se verifica la igualdad $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$?

5) ¿Cuáles son los vectores de módulo 10 que resultan paralelos a $\vec{a}=3\breve{i}+4\breve{j}$.

6) Planteando un sistema de ecuaciones lineales, hallar los dos versores perpendiculares al vector $\vec{a}=\breve{i}+2\breve{j}$.

7) Calcular, en cada caso, la amplitud del ángulo determinado por los vectores indicados:

a) $\vec{a}=3\breve{i}+\breve{j}$ y $\vec{b}=\breve{i}+2\breve{j}$

b) $\vec{a}=-3\breve{i}+\breve{j}$ y $\vec{b}=6\breve{i}-2\breve{j}$

8) Demostrar que para cualquier vector $\vec{u}$, no nulo, se cumple que: $\left\|\frac{1}{\left\|\vec{u}\right\|}.\vec{u}\right\|=1$

9) Sean en el plano, los puntos $A=(1;1)$; $B=(2;3)$; $C=(5;x)$; $D=(y;1)$

a) Hallar los valores de "x" e "y" para los cuales la figura ABCD es un paralelogramo.

b) Con los valores calculados anteriormente, calcular el perímetro de mismo.

10) Dados los puntos del plano: $A=(3;-1)$; $B=(7;0)$; $C=(6;4)$; $D=(2;3)$

a) Demostrar analíticamente que la figura **ABCD** es un cuadrado.

b) Verificar analíticamente la perpendicularidad entre sus diagonales.

11) Demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

12) Encontrar, en cada caso, el vector $\vec{x}$ que verifica la igualdad indicada:

a) $(3;3;2)+\vec{x}=(1;4;1)$ b) $(3;2;1)+\vec{x}-(1;1;3)+(2;4;1)=(2;3;5)$

13) En un vector de tres componentes, se sabe que su módulo es $2\sqrt{5}$ y que además está formado por tres números pares consecutivos ¿Qué vectores verifican esto?

14) Dados los puntos $A=(2;0;0)$; $B=(0;1;0)$; $C=(0;0;5)$, se pide:

Demostrar vectorialmente que no están alineados y clasificar el tipo de triángulo que forman según sus lados.

a) Verificar vectorialmente que no están alineados e indicar qué tipo de triángulo forman

b) Representar gráficamente el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y calcular aproximadamente su perímetro.

c) Hallar el conjunto de todos los puntos del espacio que verifican la igualdad $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=1$

¿De qué superficie se trata?

15) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 60°. Si $\|\vec{u}\|=3$ y $\|\vec{v}\|=4$. Calcular:

a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

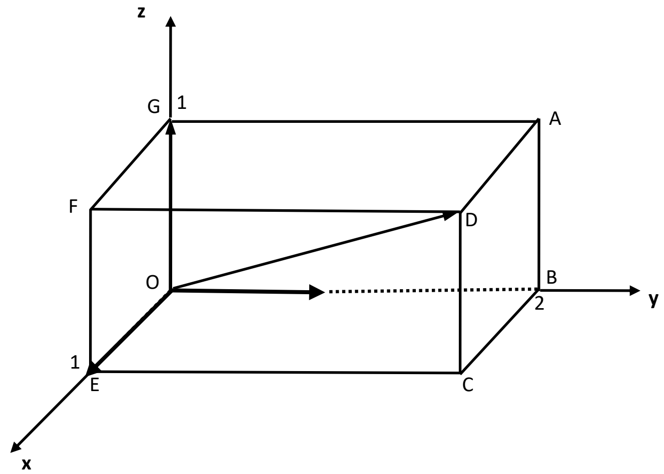
b) $\|2\vec{u}-3\vec{v}\|$

16) El ángulo que forman dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene una amplitud de 60° y además $\|\vec{u}\|=3$. Determinar cuánto debe valer $\|\vec{v}\|$ para que $\vec{u}-\vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{v}$.

17) Sean dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u}+\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}-\vec{v}$ ¿Qué relación debe existir entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

18) El vector $\vec{w}=(a;b;3)$ es ortogonal simultáneamente a los vectores $\vec{u}=(1;-1;2)$ y $\vec{v}=(2;1;1)$. Calcular $\left\|\vec{w}\right\|$.

19)



La figura muestra un prisma de base rectangular apoyado sobre los planos coordenados, de tal forma que el vértice oculto es el origen de coordenadas (O)

a) Si $B=(0;2;0)$, $E=(1;0;0)$ y $G=(0;0;1)$, calcular la amplitud de los ángulos que forma $\overrightarrow{OD}$ con los versores $\breve{i}$; $\breve{j}$ y $\breve{k}$ respectivamente.

b) Encontrar un vector de módulo 4 que tenga la dirección y sentido de $\overrightarrow{OD}$.

20) Hallar los vectores cuyo módulo sea igual a $\sqrt{35}$ y que además sean ortogonales simultáneamente a los vectores $\vec{u}=-2\breve{i}+3\breve{j}+\breve{k}$ y $\vec{v}=\breve{i}-2\breve{j}+\breve{k}$

21) Sean los vectores $\vec{u}=(0;1;7)$; $\vec{v}=(1;4;5)$ y $\vec{c}=(x;y;7)$. Hallar todos los vectores $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen la relación:

$$\left\|\vec{u}\,x\,\vec{v}+23.\breve{i}\right\|^2=\vec{u}\bullet\vec{c}$$

22) Sean los vectores $\vec{A}=(-2;1;1)$ y $\vec{B}=(-1;1;3)$. Obtener todos los $\vec{C}$ de manera tal que $\vec{C}\perp\vec{A}$; $\left\|\vec{C}\right\|=\sqrt{5}$ y que además se verifican la relación $\vec{C}=\alpha\,\vec{A}+\beta\,\vec{B}$ sea ortogonal a $\vec{A}$, con $\alpha\in R$ y $\beta\in R$

23) Sean los vectores $\vec{a}=(1;2;3)$; $\vec{b}=(0;x;y)$ y $\vec{c}=(0;1;1)$. Hallar todos los vectores $\vec{b}$ tales que:

$$\left(\vec{a}\,x\,\vec{b}\right)\perp\vec{c}\quad\wedge\quad\left\|\vec{a}\,x\,\vec{b}\right\|^2=\vec{a}\bullet\vec{c}+7$$

24) Dados los puntos: Si $A=(3;1;1)$; $B=(2;1;2)$ y $C=(-1;0;x^2)$ y $D=(3;2;0)$, hallar ellos valores “x” que hacen que los mismos sean coplanares.

25) Sean los puntos $A=(3,2,1)$; $B=(1,2,4)$; $C=(x,0,3)$ y $D=(1,1,7)$. Hallar, si existe, el valor de "x" que hace que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$ sea igual a $\frac{5}{6}$.

Respuestas

1) a) $\overrightarrow{AC}$; **b)** $\overrightarrow{AB}$ **c)** $2.\overrightarrow{AC}$ **d)** $\overrightarrow{BC}$ **2) a)** $6\breve{i}-2\breve{j}$; **b)** $2\sqrt{10}$; **c)** $\frac{3}{10}\sqrt{10}\,\breve{i}-\frac{1}{10}\sqrt{10}\,\breve{j}$ **d)** $-\frac{9}{10}\sqrt{10}\,\breve{i}+\frac{3}{10}\sqrt{10}\,\breve{j}$

3) a) $(1;6)$ **b)** $(11;-2)$ **c)** $\left(\frac{9}{2};-7\right)$; **4) a)** $(3;-4)$ **b)** $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

c) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ y del mismo sentido

5) $\vec{v}=(\pm 6;\pm 8)$; **6)** $\breve{v}=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\,\breve{i}\mp\frac{\sqrt{5}}{5}\,\breve{j}$; **7) a)** $\alpha=45°$ **b)** $\alpha=180°$

9) a) $x=3$; $y=4$ **b)** $6+2\sqrt{5}$; **12) a)** $(2;1;-1)$ **b)** $(-2;-2;6)$

13) $\vec{r}_1=(0;2;4)$**…;** $\vec{r}_2=(-4;-2;0)$; **14) a)** No alineados **b)** Aprox 12,72. **c)** $(x-2)^2+y^2+z^2=1$

15) a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{37}$ **b)** $\|2\vec{u}-3\vec{v}\|=\sqrt{109}$ **16)** $\|\vec{v}\|=1,5$…; **17)** $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$;

18) $\left\|\vec{w}\right\|=3.\sqrt{3}$ **19) a)** $\alpha_1=\alpha_3\cong 65°54'$; $\alpha_2\cong 35°16'$ **, b)** $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6},\frac{4}{3}\sqrt{6},\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$

20) $\vec{v}=(\pm 5,\pm 3,\pm 1)$ **21)** $\vec{c}=(x,1,7)$ con $x\in\mathbb{R}$

22) $\vec{C}=(\pm 1,0,\pm 2)$ **23)** $\vec{b}=(0,\pm 2,\pm 2)$; **24)** $x=\pm\sqrt{6}$ **25)** $x=4$

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico 4

Rectas y planos en el espacio

1) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P_0 = (-3;0;2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = 2\breve{i} - \breve{j} + 3\breve{k}$. Calcular aproximadamente el ángulo que forma, el vector director de dicha recta, con cada uno de los ejes coordenados.

2) Hallar, en cada caso, las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta r:

a) $P = (3;0;2)$ pertenece a r y r es paralela al vector $\vec{v} = 2\breve{i} - \breve{j} + 3\breve{k}$

b) Los puntos $A = (-1;2;3)$ y $B = (1;0;-1)$ pertenecen a r.

3) Dada la recta s: $(x;y;z) = (-1;2;3) + \lambda.(1;2;3)$ se pide:

a) Escribir las coordenadas de tres puntos que pertenezcan a "s".

b) Decidir si los puntos $A = (-4;-4;-7)$ y $B = (-2;0;0)$ pertenecen a s. Justificar la respuesta.

c) Hallar los posibles valores de "a" y "b" para que el punto $C = (a;b;0)$ pertenezca a "s"

d) Encontrar las coordenadas de todos los puntos pertenecientes a la recta s cuya distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{52}$.

4) Dados los puntos $A = (-1;2;1)$ y $B = (-2;1;-1)$ se pide:

Determinar una ecuación simétrica de la recta paralela a AB en la que el origen de coordenadas pertenece a ella.

5) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. Obtener $r \cap s$ en los casos en que sea posible.

a) $r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -7 + 3\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ $\quad s: (x;y;z) = (-1;3;1) + \mu(-6;3;0)$

c) $r: (x;y;z) = (5;0;4) + \lambda(2;-1;1)$ $\quad s: (x;y;z) = (-1;3;1) + \mu(-6;3;-3)$

d $r: (x;y;z) = (1;-1;0) + \lambda(2;7;2)$ $\quad s: \dfrac{x}{5} = \dfrac{y+1}{2} = z - 1$

6) Obtener las ecuaciones de una recta "t" a la que pertenece el punto $M=(-2;2;1)$ y que resulte perpendicular a las rectas "r" y "s" del problema 4)a).

7) Representar en $\mathbb{R}^3$ cada uno de los siguientes planos:

a) $z=2$ **b)** $x=5$ **c)** $y=1$ **d)** $x+2y=4$

e) $z-2y=4$ **f)** $2x-z=4$ **g)** $2y+z=6$ **h)** $2x+y+4z=4$

8) Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P_0=(-1\ ;\ 1\ ;\ 3)$ y es normal al vector $\vec{n}=-\breve{i}+2\breve{j}-\breve{k}$.

9) Dados los puntos $P_0=(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ y $P_1=(-3\ ;\ -2\ ;\ -1)$ hallar una ecuación cartesiana del plano que es perpendicular al vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ en el punto P_1.

10) Hallar la ecuación del plano paralelo a $2x-2y+z=2$ que pasa por el punto $A=(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

11) Hallar la ecuación cartesiana del plano determinado por los vectores $\vec{a}=\breve{i}+2\breve{j}-\breve{k}$, $\vec{b}=2\breve{i}-3\breve{j}+\breve{k}$, si el mismo contiene al punto $P_0=(2;-3;5)$

12) Hallar, si existe, la ecuación del plano que pasa por los puntos:

a) $P_0=(0;1;2)$, $P_1=(3;0;5)$, $P_2=(4;0;1)$

b) $P_0=(2;-3;4)$, $P_1=(4;0;2)$, $P_2=(6;3;0)$

13) Dados los planos: $\begin{cases}\alpha_1: & x+2y-2z-5=0\\ \alpha_2: & 3x-6y+3z-2=0\\ \alpha_3: & 2x+y+2z+1=0\\ \alpha_4: & x-2y+z-7=0\end{cases}$ Se pide:

a) Probar que dos de ellos son paralelos y los otros dos son perpendiculares.

b) Calcular la distancia entre aquellos que son paralelos

c) Calcular la amplitud del ángulo que forman $\alpha_2 \wedge \alpha_3$.

14) Analizar si los puntos $P_0=(1;1;-11)$, $P_1=(5;0;9)$, $P_2=(5;-5;25)$, $P_3=(0;0;-12)$ son coplanares. En caso afirmativo hallar la ecuación del plano que los contiene.

15) Dado el plano $\alpha: x+2y+2z-4=0$ se pide:

a) Calcular la distancia entre el mismo y el origen de coordenadas.

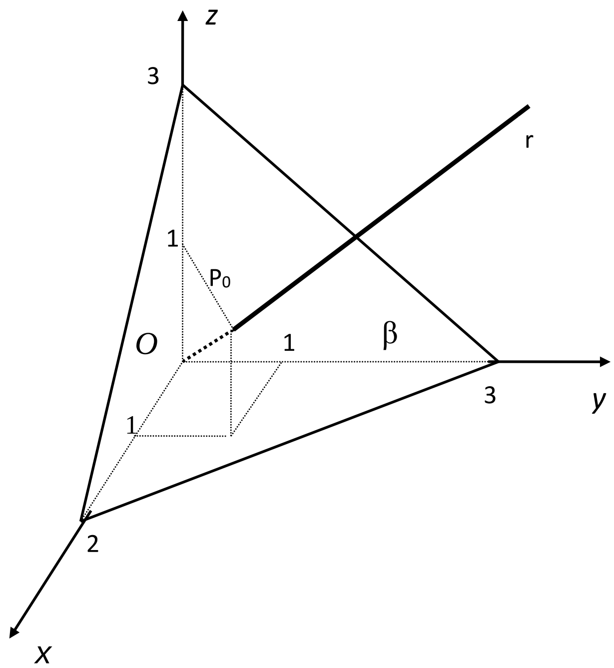
b) Calcular la distancia entre el mismo y el punto $A=(2;-3;2)$.

16) Dado el siguiente gráfico, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano *β*.

b) Hallar la ecuación de la recta *r*.

c) Calcular la amplitud del ángulo que ellos determinan.



17) Calcular los valores que deben adoptar "x_0" y "y_0" para que el plano "α" de ecuación $x+2y+z-4=0$ contenga a la recta "r" de ecuación $(x;y;z)=(x_0\,;y_0\,;-1\,)+t.\,(1\,;1\,;-3)$.

18) Hallar las ecuaciones simétricas de la recta determinada por la intersección entre los planos

$$\begin{cases}\pi_1: & 2x+3y-3z=4\\ \pi_2: & x-3y+5z=2\end{cases}$$

19) Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas $\begin{cases} r_1: & \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z}{3}\\ r_2: & x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}\end{cases}$

20) Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas definida por los planos $r_1:\begin{cases}\pi_1: & x+3y-z=-7\\ \pi_2: & x-y+z=1\end{cases}$. y r_2 determinada por los puntos $A=(2;1;0)$ y $B=(1;-1;3)$.

21) Calcular la distancia del punto $A=(1;0;-3)$ a la recta $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{-y+2}{3}=\dfrac{z-1}{4}$

22) Calcular la amplitud del ángulo definido por la recta intersección entre los planos $r_1:\begin{cases}\pi_1: & x+3y-z=-7\\ \pi_2: & x-y+2z=1\end{cases}$ y el plano $\pi_3: x-2y+z=2$

23) Demostrar que las rectas $r_1:\begin{cases}\pi_1: & 2x+y+z=0\\ \pi_2: & x-4y+2z=-12\end{cases}$ y $r_2:\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{3y+4}{-3}=\dfrac{9-z}{3}$ son paralelas.

24) Demostrar que las rectas $r_1:\begin{cases}\pi_1: & 2x+y-2z=-10\\ \pi_2: & y+2z=4\end{cases}$ y $r_2:\dfrac{4-x}{4}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+11}{2}$ son perpendiculares.

Respuestas

1) F.V. $(x\,;y\,;z)=(-3\,;0\,;2)+\lambda.(2\,;-1\,;3)$

F.P. $\begin{cases}x=-3+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=2+3\lambda\end{cases}$ F.S. $\dfrac{x+3}{2}=-y=\dfrac{z-2}{3}$ $\begin{cases}\hat{\alpha}=57^\circ\ 41'\\ \hat{\beta}=105^\circ\ 30'\\ \hat{\gamma}=36^\circ\ 41'\end{cases}$

2) **a)** $r:(x;y;z)=(3;0;2)+\lambda(2;-1;3)$ **b)** $r:(x;y;z)=(1;0;-1)+\lambda(2;-2;-4)$

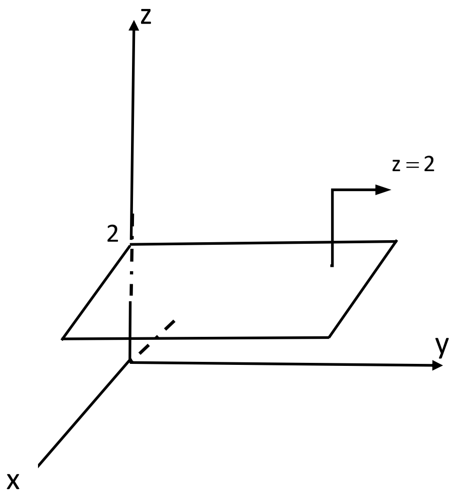
3) **b)** $A\notin s$ $B\in s$ **c)** $a=2 \ \wedge \ b=0$ **d)** $P=(0;4;6)$ y $Q=\left(-\frac{26}{7};-\frac{24}{7};-\frac{36}{7}\right)$

4) $x=y=\frac{1}{2}z$

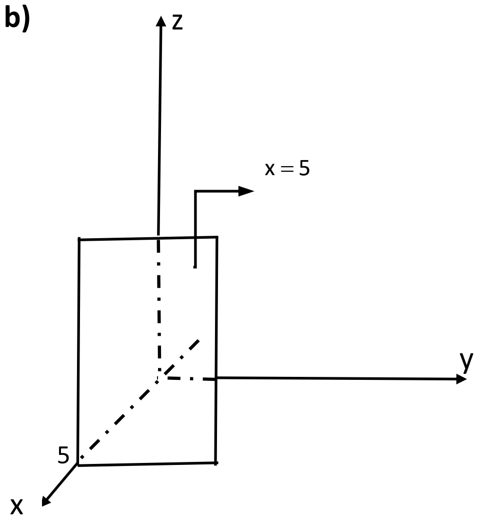
5) **a)** $r\cap s=\{(1;-2;-1)\}$ **b)** $r//s \ \wedge \ r\cap s=\varnothing$
c) $r//s \ \wedge \ r\cap s=r$ **d)** r y s alabeadas $r\cap s=\varnothing$

6) $t:(x;y;z)=(-2;2;1)+\lambda(1;2;-7)$

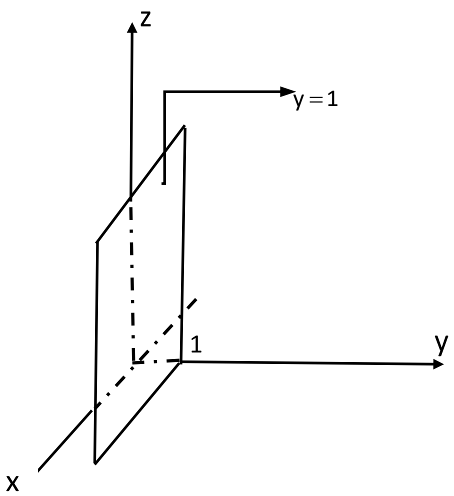
7) a)



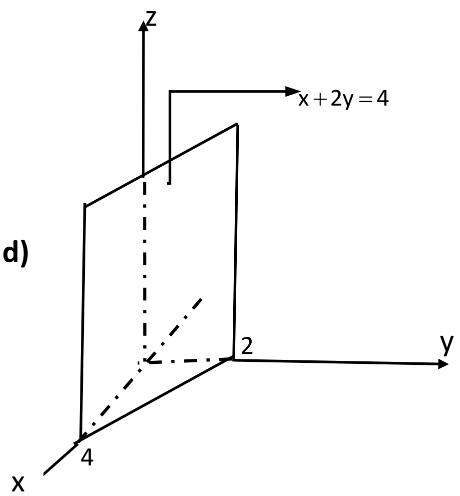
b)



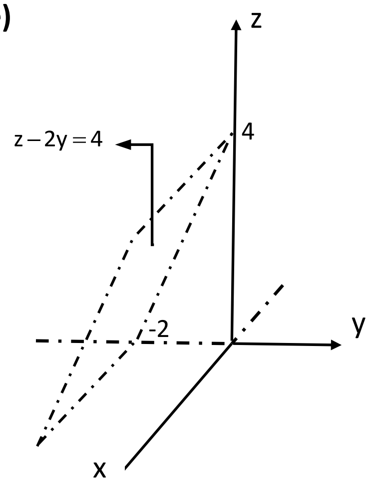
c)



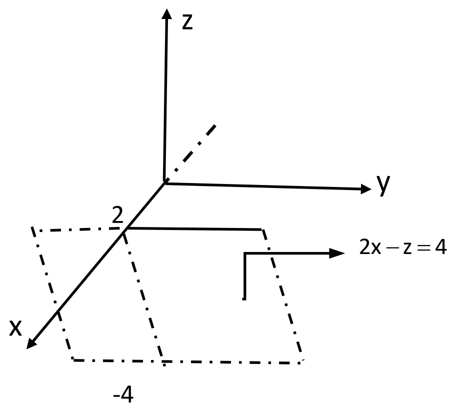
d)



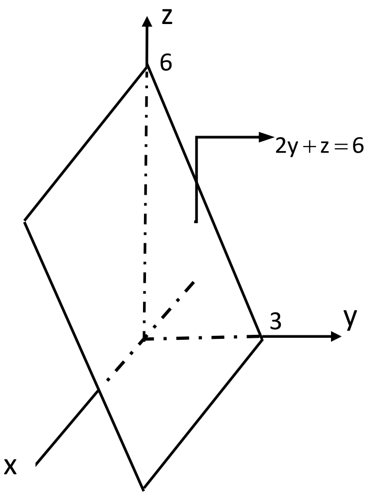
e)



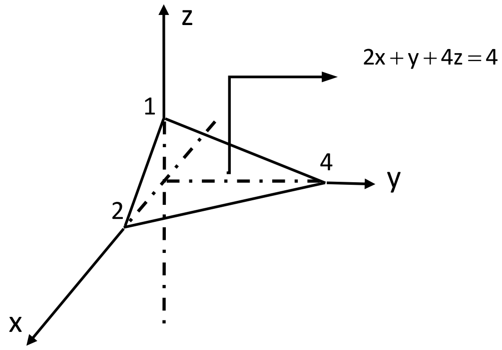
f)



g)



h)



8) $-x+2y-z=0$ **9)** $3x+2y+z+14=0$

10) $2x-2y+z-5=0$ **11)** $x+3y+7z-28=0$

12) a) $4x+15y+z-17=0$ **b)** Están alineados **13) b).** $\frac{19}{18}.\sqrt{6}$ **c)** $|\hat{\omega}| \cong 74° 12'$

14) $24x-16y-5z-63=0$ **15)** a) $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{4}{3}$

16) a) $x+2y+2z-6=0$. **b)** $x=y=z$ **c)** 79° 58’

11) $4x-8y-2z-1=0$ **17)** $x_0=3$; $y_0=1$ **18)** $\frac{x-2}{-\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{13}{9}}=z$

19) $P_0=(1;2;3)$ **20)** Son alabeadas. **21)** $d=\frac{1}{2}\sqrt{1665}$ **22)** $\varphi=23° 50'$

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico 5

Sistemas de ecuaciones lineales

1) Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x-2y=\frac{13}{2} \\ 3x+2y-2z=-\frac{9}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+6z=3 \\ x-y+4z=1 \\ 3x+2y-2z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y+4z=2 \\ 3x+2y-2z=3 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+4y-3z=0 \\ 2z+3x=-2 \\ 2x+3y+5x=3 \\ -2x+6y-z=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-6x_3=0 \\ 3x_1-11x_2+12x_3=0 \end{cases}$

2) Plantear y resolver cada uno de los problemas dados a continuación.

a) En una fábrica hay tres máquinas de confección A, B y C. Cuando las tres están funcionando producen 222 trajes al día. Si "A" y "B" trabajan, pero "C" no lo está, se producen 159 trajes. Si, en cambio, trabajan "B" y "C", pero no "A", la producción es de 147 trajes. ¿Cuál es la producción diaria de cada máquina?

b) Encontrar un número entero positivo de tres cifras tal que la suma de los tres dígitos sea 14, el dígito de las decenas sea dos más que el de las unidades y si los dígitos se invierten el número no se altera.

c) Un cierto número se representa con tres dígitos. Si los dígitos de las unidades y las decenas se intercambian, el número aumenta en 18. Si los dígitos de las centenas y las decenas se intercambian, el número disminuye en 90. Si la suma de todos los dígitos es 12 encontrar el número que cumple con esto.

d) La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180º. El ángulo de mayor amplitud, tiene una medida cinco veces mayor que la del más pequeño e igual a la suma entre ellos. Hallar las medidas de los tres ángulos.

e) Un almacenero le vendió a un cliente 5 paquetes de arroz, 2 de garbanzos y 3 de maíz por \$6,60; a otro cliente le vendió 2 de arroz, 3 de garbanzos y 5 de maíz, por \$5,80; a un tercer cliente le vendió 3 de arroz, 5 de garbanzos y 2 de maíz por \$5,60. Si a todos les cobró el mismo precio unitario. ¿Cuánto vale un paquete de cada artículo?

f) Luis está haciendo en su casa un trabajo de carpintería para lo cual fue a la ferretería y compró un kilogramo de cada una de las tres variedades de clavos existentes: Chicos, medianos y grandes. Luego de un rato de trabajo, observa que había subestimado la cantidad de clavos pequeños y grandes que necesitaba así es que compra la misma cantidad de clavos pequeños y el doble de grandes. Después de un rato más de construcción, se da cuenta de que aún le faltan clavos y compra un Kg. de clavos pequeños y otro de medianos. Cuando vio los tickets de la ferretería observó que le habían cobrado la primera vez \$6, la segunda \$6,5 y la tercera \$3,5. Los precios de los clavos varían según su tamaño pero en los tickets no figura el detalle. ¿Podrías averiguar los precios?

g) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: Sillas; mecedoras y sillones. Cada uno de ellos requiere de madera, plástico y aluminio como se muestra en la tabla que aparece enseguida. La compañía tiene en stock 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Cuando finaliza la temporada decide agotar todas las existencias. Para lograrlo ¿Cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	**Plástico**	**Aluminio**
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

h) Una fábrica paga 8$/hora a sus trabajadores calificados del departamento de ensamble y 4$/hora a los semicalificados del mismo departamento. A los empleados del departamento de envíos y cargas se les paga 5$/hora. Debido a un aumento en los pedidos necesita tener un total de 70 trabajadores entre ambos departamentos y pagará un total de 370$/hora. Debido a una cláusula laboral debe haber el doble de trabajadores semicalificados que calificados. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría se deben contratar?

i) Una compañía de artículos para jardín cuenta con tres clases de fertilizantes que contienen productos químicos A, B y C en diferentes porcentajes, según se muestra en la siguiente tabla:

	Tipo de fertilizante		
Producto químico.	**1º**	**2º**	**3º**
A	6%	8%	12%
B	6%	12%	8%
C	8%	4%	12%

¿En qué proporción deben mezclarse los tres tipos de fertilizantes para que contengan 8% de cada uno de los tres productos químicos?

j) Se dispone de tres aleaciones de plata, cobre y oro con la siguiente composición:

	Plataº	**Cobre**	**Oro**
1ª	5%	15%	80%
2ª	10%	25%	65%
3ª	15%	30%	55%

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una de ellas para obtener una nueva aleación que contenga 12% de plata, 26% de cobre y 62% de oro?
Si la aleación lograda debe tener 20gr ¿Cuántos deben ser de cada una de ellas?

k) En la tabla dada a continuación figuran las 40 notas obtenidas por el alumnado correspondiente a un examen de Inglés:

Nota	Cant. de alumnos
2	2
3	4
4	…..
5	6
6	7
7	…..
8	4
9	2
10	…..

Si se sabe que el promedio del curso fue 5,70 y que los que la cantidad de alumnos que obtuvo 4 puntos sumado al doble de los que lograron 10 puntos da como resultado aquellos que su nota fue 7 puntos. ¿Calcular cuántos fueron los alumnos que obtuvieron: 4puntos., 7 puntos y 10 puntos?

l) La edad de Tomás es la suma de las edades de Carmen y Daniel. La edad de Carmen es dos años más que la suma de las edades de Daniel y Marcos. La edad de Daniel es cuatro veces la edad de Marcos. Si la suma de las cuatro edades es 42 años. ¿Qué edad tiene Tomás?

m) Recordemos que una función cuadrática escrita en forma polinómica responde a la fórmula $f(x)=ax^2+bx+c$. Hallar la fórmula de la misma si se sabe que pasa por los puntos $A=(-1\ ;\ 1)$; $B=(2\ ;\ 1)$; $C=(3\ ;\ -3)$

n) Analizar, mediante un sistema de ecuaciones lineales, si existe un único plano que contiene a los puntos:

a) $A=(1\ ;1;3)$; $B=(2\ ;1;2)$; $C=(1\ ;3;1)$; $D=(3\ ;1;1)$

b) $A=(1\ ;1;3)$; $B=(2\ ;1;2)$; $C=(1\ ;3;1)$; $D=(1\ ;1;1)$

3) Analizar los sistemas de ecuaciones siguientes para los distintos valores del parámetro “k”.

a) $\begin{cases} x+y-kz=0 \\ x-y+z=1 \\ -x+ky+z=k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+kz=6 \\ kx-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+ky-z=4 \\ -4x+5y+kz=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ kx-y+z=3 \\ -x+2y-kz=-3 \end{cases}$

4) Analizar los sistemas de ecuaciones siguientes para los distintos valores del parámetro “k”.

a) $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} kx+y=1 \\ 3x+2y=0 \\ x+ky=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ky+z=2 \\ 2x+y+kz=k \end{cases}$

d) $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=k \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-y+z+w=1 \\ x+2y-z+4w=2 \\ x+7y-4z+11w=k \end{cases}$

5) Analizar las condiciones que deben cumplir los parámetros a, b, c para que el sistemas admita solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

a) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+4z=a \\ 2x+3y-z=b \\ 3x-y+2z=c \end{cases}$

Respuestas

Nota: Dado que las respuestas, en caso de compatibilidad, son verificables y además dependen de las variables utilizadas, no todas estarán expuestas y quedan a cargo del alumno.

1) a) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-3;0\right)\right\}$; b) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right\}$; c) $S=\left\{\left(1;1;1\right)\right\}$; d) $S=\varnothing$;

e) $S=\left\{\left(1;2x_3;x_3;-3x_5;x_5\right)/\,x_3\in\Re\wedge x_5\in\Re\right\}$; f) $S=\left\{\left(\frac{2}{5}x_3;\frac{6}{5}x_3;x_3\right)/\,x_3\in\Re\right\}$;

2) a) A: 75 trajes, B: 84 trajes y C: 63 trajes. g) 100 sillas; 100 mecedoras y 200 sillones

h) 40 semicalificados; 20 calificados y 10 empleados de envíos y cargas.

j) 4gr. de la 1ª; 4gr. de la 2ª y 12 gr. de la 3ª

3) a) Para todo "k" es S.C.D b) Rta.:S.C.D. si $k\neq1$; S.C.I. Nunca; S.I. si $k=1$

c) S.C.D. si $k\neq-1 \ \wedge \ k\neq-7$. S.C.I. si $k=-7$. S.I. si $k=-1$

d) S.C.D. si $k\neq-1 \ \wedge \ k\neq2$ S.C.I. si $k=2$ S.I. si $k=-1$

4) a) $k=3$ SCI; $k\neq3$ SCD b) $k=1$ SCD; $k\neq1$ SI c) $k=1$ $k=2$ SI; $k\neq1$ $k\neq2$ SCD

d) $k=1$ SCI; $k=-2$ SI; $k\neq1$ $k\neq-2$ SCD e) $k=1$ $k=0$ SCI; $k\neq1$ $k\neq0$ SI

5) a) $-5a+2b+c\neq0$ SI; $-5a+2b+c=0$ SCI b) Siempre tiene solución única

- Colegio Nacional de Buenos Aires-
Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico 6

Números complejos

1. Dados $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + 3i$, y $z_3 = 1 - i$, calcular:

a) $(z_1 + z_2)^2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2 . z_3}$ c) $2z_1 - \left(z_2^2 - z_1\right) - \dfrac{z_3}{z_2}$

d) $|z_1|^2 + \left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)^{-1}$ e) $\dfrac{z_2^2 + |z_3|^2}{\overline{z_1}}$ f) $i^{43} z_1 + \dfrac{i^{37}}{z_2} - i^{122}\overline{z_3}$

2. Hallar x e y reales tales que:

a) $y - 3i + xi = 2 - y + 5i$ **b)** $(1+2i).x + (3 - 5i)\, y = 1 - 3i$

c) $x + 2 - (x - y).i = 3y + 2i$ **d)** $(1+i).(x+2y) - (3-2i)\,).(x-y) = 8 + 3i$

3. a) Encontrar x para que $z = (3+ 2i).(x + 6i)$ sea imaginario puro.

a) Encontrar x para que $z = \dfrac{x + 3i}{2 - 5i}$ sea un complejo real.

4. Hallar los valores de $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ para que $(p+q)+ (p-q)\, i$ sea igual a $2- i$.

5. Establecer las condiciones para que el producto de dos números complejos sea:

a) imaginario puro b) complejo real

6. Encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que :

a) $i.z = 1$ b) $(3 - i).z = i$

c) $(1 - i)^2 = \dfrac{i}{z}$ d) $z.i + z = 2\sqrt{3} - 2i$

e) $\dfrac{z - 1}{z + 1} = 2 + i$ f) $\dfrac{2i}{z + i} = 1 + 2i$

g) $\dfrac{-1 + (z - 1)i}{i^{16}} = \dfrac{i^{27}}{-1 - i}$ h) $\dfrac{-i^{19} + \left(1 - \overline{z}\right).i}{i^5} = (2 - i).i^{17}$

7. Demostrar que:

a) $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{-z} = -\overline{z}$

b) $\forall z \in \mathbb{C} : z.\overline{z} = |z|^2$

c) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

d) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

e) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} - \{(0,0)\} : \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

8. Representar en el plano el conjunto solución de:

a) $\text{Re}(z) = 5$ b) $-1 \leq \text{Im}(z) < 3$ **1.** $|z+1| > 2$

d) $-1 < \text{Re}(z) < 3$ e) $|z - 1 + i| = 2$ f) $|z+i| = |z+2i|$

g) $|z|^2 = z + \bar{z}$ h) $\text{Re}\left(z + z^{-1}\right) = 0$ i) $z - \bar{z} = i$

9. Dados los números complejos:

$z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = -2i$, y $z_5 = 1 - \sqrt{3}\,i$

a) Representarlos y escribirlos en forma polar y trigonométrica.

b) Resolver utilizando la forma polar. Expresar el resultado en forma binómica.

i. z_1^{6} ii. $(z_3 . z_5)^4$

iii. $\dfrac{\overline{z_5}}{z_3} \cdot \dfrac{z_1}{z_2}$ iv. $(z_1)^{-5}$

10. Resolver las siguientes operaciones:

a) $(2-2i)^6$ b) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$ c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{12}$

11. Sean P(x) = $a.x^2 + bx + c$ con a, b y c reales y $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bar{z}\right) = 0$$

12. Factorizar en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

a) $x^4 - 1$ b) $x^4 + 1$ c) $x^3 - 1$

d) $x^3 + 1$ e) $x^4 - 3x^2 - 4$ f) $x^5 - x^4 + 16x - 16$

13. Obtener en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $-3x^2 = 2(x-2)^2 - 3$ c) $x^3 + x^2 + x = 0$

d) $2z^2 - 3z + 4 = 0$ e) $5z^2 - 3z = 0$ f) $\dfrac{3}{2}z^2 + 2z + \dfrac{4}{3} = 0$

14. (*) Determinar el conjunto de números complejos que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z| = 2 \\ 2.\text{Re}(z) = \text{Im}(z^2) \end{cases}$$

15. (*) Escribir la factorización en $\mathbb{R}$ de un polinomio p(x) con coeficientes reales de **<u>grado mínimo</u>** tal que tenga a $z_1 = 5$, y a $z_2 = 2i$ como raíces dobles.

(*) Ejercicios optativos

Rtas:

1): a) –4; b) $-\frac{3}{26}-\frac{11}{26}i$; c) $\frac{148}{13}+\frac{40}{13}i$;d) $\frac{60}{13}-\frac{1}{13}i$; e) $-\frac{18}{5}-\frac{21}{5}i$; f) $\frac{3}{13}-\frac{15}{13}i$

2) a) x=8, y=1 ; b) x= -4/11, y=5/11 ; c) x= -2 ; y = 0 ; d) x=1,y = 2

3) a) x=4; b) x=-6/5 ; 4) $p=\frac{1}{2};q=\frac{3}{2}$; 6) a) z= -I; b) – 0,1+ 0,3.i ; c) z= - 0,5 ; d)z= $\left(-1+\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i$;

e) z= -2 + i ; f)z= $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$; g)z= $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$; h)z= 1+2i

9) b) i. –64 ; ii. $32-32\sqrt{3}\,i$; iii. 0,683-0,183 i ; iv. $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; 11) a) 512i ; b) $-8-8\sqrt{3}i$; c)1

12) a) En $\mathbb{R}$: (x+1).(x-1). (x^2+1); en $\mathbb{C}$: (x+1).(x-1)(x+i).(x- i) ;

b) En $\mathbb{R}$: $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$; en $\mathbb{C}$: $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

c) En $\mathbb{R}$ (x – 1)(x^2 +x +1); en $\mathbb{C}$: $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

d) En $\mathbb{R}$ (x –+1)(x^2 - x +1); en $\mathbb{C}$: $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

e) En $\mathbb{R}$: (x+2)(x-2)(x^2+1); en $\mathbb{C}$: (x+2)(x-2)(x + i)(x – i)

f) En $\mathbb{R}$: $(x-1).\left(x^2-2\sqrt{2}x+4\right).\left(x^2+2\sqrt{2}x+4\right)$; en $\mathbb{C}$: $(x-1)\left(x-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\left(x-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)$

13): a) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$, $S_{\mathbb{C}}=\{2i,-2i\}$ b) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i,\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right\}$

c) $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ d) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i,\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i\right\}$

e) $S_{\mathbb{R}}=S_{\mathbb{C}}=\left\{0,\frac{3}{5}\right\}$ f) $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i,-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\right\}$

14) S= $\left\{2i;-2i;\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\right\}$

15) Una solución posible es p(x)= $(x-5)^2\left(x^2+4\right)^2$