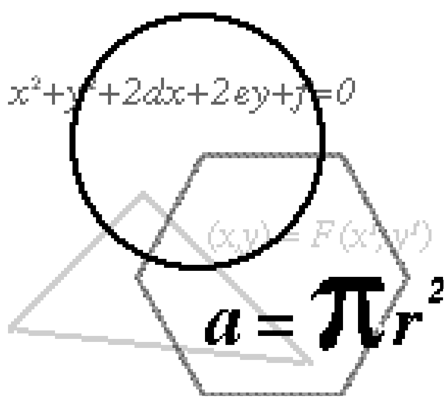
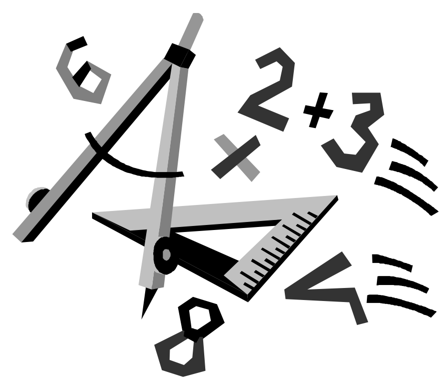
Universidad de Buenos Aires.

Colegio Nacional de Buenos Aires

Guía de Trabajos Prácticos
Matemática – 5º Año





$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).f(\xi_i) = \int_a^b f(x).dx$$

Colegio Nacional de Buenos Aires
Guía deTrabajos Prácticos 5to Año

<u>TRABAJO PRACTICO Nº0:</u> Temas de repaso.
Jean Le Rond D'Alembert ***(1717-1783)***
Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/dale.html

D'Alembert era hijo ilegítimo de Mme. de Tencin y de un oficial de artillería Luis-Camus Destouches. La madre había sido monja, pero una dispensa papal le permitió abandonar el convento.

Cuando nació fue abandonado en las escaleras de la iglesia de Jean Le Rond (por eso lleva esa nombre) y fue entregado a un hospicio. Su padre no estaba en Paris cuando nació y cuando regresó localizó a su hijo y arregló que un matrimonio lo cuidase. Él siempre consideró a su madre adoptiva (Mme. Rousseau) como su verdadera madre.

Su educación fue dirigida por su padre biológico, y a la muerte de éste, cuando ya tenía 9 años, le dejó dinero y la familia del padre se siguió ocupando de su educación. Inició sus estudios en un colegio privado y después entró en el Colegio Jansenista de las Cuatro Naciones. D'Alembert creció en París y en 1739 D'Alembert leyó su primer trabajo en la Academia de las Ciencias donde dos años más tarde fue admitido como miembro. Allí trabajó por el resto de su vida. Fue un gran amigo de Voltaire.

Ayudó a resolver la controversia en física sobre la conservación de la energía cinética mejorando la definición de Newton de la fuerza en su "Tratado de Dinámica" (1742), que articula el principio de mecánica de D'Alembert. En el año 1744 aplicó los resultados obtenidos en el equilibrio y movimientos de fluidos. Fue pionero en el estudio de ecuaciones diferenciales y pionero en el uso de ellas en la física. Fue uno de los primeros en comprender la importancia de las funciones y en este artículo definió la derivada de una función como el límite de los cocientes de incrementos. En realidad escribió la mayor parte de los artículos matemáticos en su trabajo, llamado "Volumen 28".

D'Alembert fue el que más se acercó a una definición precisa de límite y de derivada. Más en realidad toda duda se desvanecía ante el éxito de sus aplicaciones, de manera que el cálculo infinitesimal, más que una rama de la matemática, se convertía en una especie de doncella de la ciencia natural, en un auxiliar muy valioso, pero auxiliar al fin de las varias ramas de la física. D'Alembert también estudió hidrodinámica, mecánica de los cuerpos, problemas de Astronomía y circulación atmosférica. Rechazó un gran número de ofertas en su vida; una de ellas fue de Frederick II para ir a Prusia como presidente de la Academia de Berlín. También rechazó una invitación de Catherine II para ir a Rusia como tutor de su hijo.

FUNCIONES ELEMENTALES

1) Dadas las siguientes funciones definidas de $A \rightarrow \Re$, determinar, en cada caso: **a)** dominio A, **b)** imagen, **c)** ceros, **d)** ordenada al origen**, e)** intervalos de positividad, negatividad, **f)** graficar.

1) $-x+1+y=0$ **2)** $-2x+1-4y=0$ **3)** $y=x^2-4x+3$

4) $y=x^2-4x+5$ **5)** $y=-(x-1)^2$ **6)** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$

7) $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ **8)** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **9)** $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

10) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ **11)** $y=\dfrac{x^3-27}{x-3}$ **12)** $y=\dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$

13) $y=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$ **14)** $y=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{2-x}$ **15)** $y=\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}$

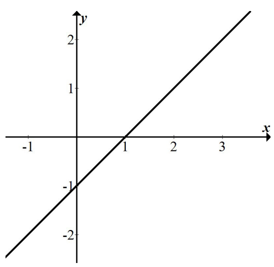
16) $y=\begin{cases}-x+1 & -2<x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ **17)** $y=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x^2 & -1<x<1\\ x & x>1\end{cases}$ **18)** $y=\begin{cases}x+1 & x\le -1\\ x^2+1 & -1<x<2\\ x+3 & x\ge 2\end{cases}$

19) $y = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ **20)** $y = |x-1|$ **21)** $y = |x+2|$

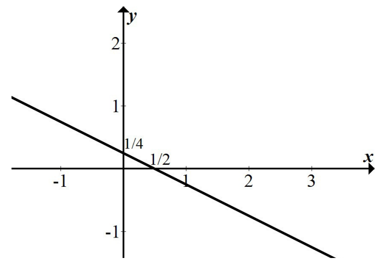
22) $y = -|x-1| + 2$ **23)** $y = x.|x+2|$ **24)** $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}$

RESPUESTAS

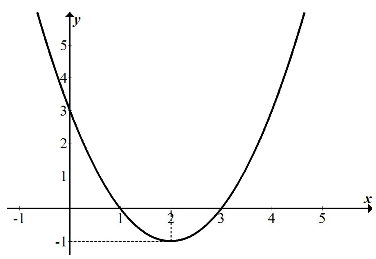
1) a) $A = \Re$ **; b)** $I = \Re$ **,**
c) $C_0 = \{1\}$**; d)** $y_1 = -1$
e) $C_+ = (1;+\infty)$**;** $C_-(-\infty;1)$



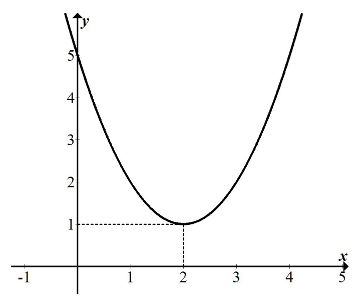
2) a) $A = \Re$**; b)** $I = \Re$**;**
c) $C_0 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$**; d)** $y_1 = \frac{1}{4}$ **,**
e) $C_+ = \left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$**;** $C_- = \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$**;**



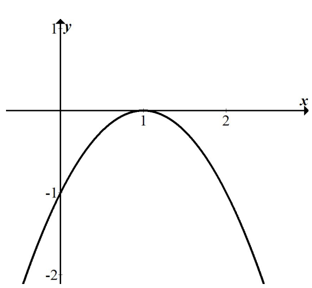
3) a) $A = \Re$**, b)** $I = [-1;+\infty)$**,**
c) $C_0 = \{1;3\}$**; d)** $y_1 = 3$
e) $C_+ = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$**;** $C_-(1;3)$



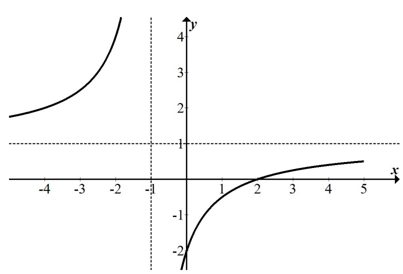
4) a) $A = \Re$**; b)** $I = [1;+\infty)$
c) C₀ = $\varnothing$**; d)** $y_1 = 5$**,**
e) $C_+ = \Re$**;** $C_- = \varnothing$**;**



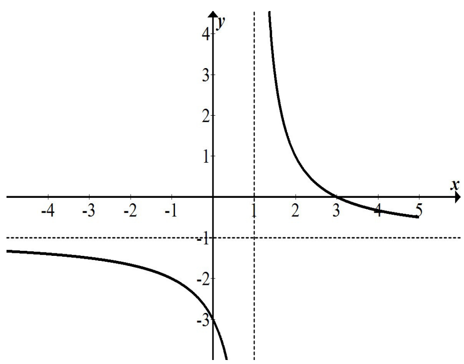
5) a) $A = \Re$**, b)** $I = (-\infty;0]$
c) $C_0 = \{1\}$**; d)** $y_1 = -1$
e) $C_+ = \varnothing$**;** $C_- = (-\infty;0]$



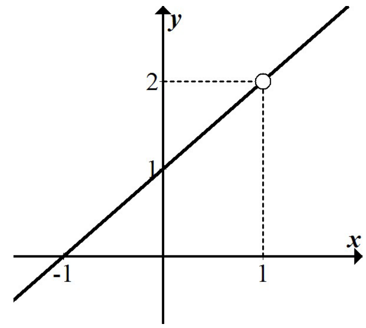
6) a) $A = \Re - \{-1\}$**; b)** $I = \Re - \{1\}$
c) $C_0 = \{2\}$**; d)** $y_1 = -2$**,**
e) $C_+ = (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$**;** $C_- = (-1;2)$



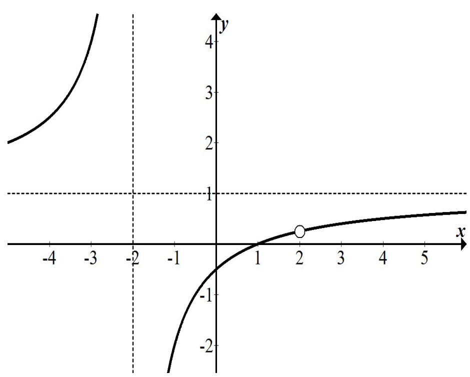
7) a) $A=\Re-\{1\}$; **b),** $I=\Re-\{1\}$
c) $C_0=\{3\}$; **d)** $y_1=-3$
e) $C_+=(1;3)$; $C_-(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$



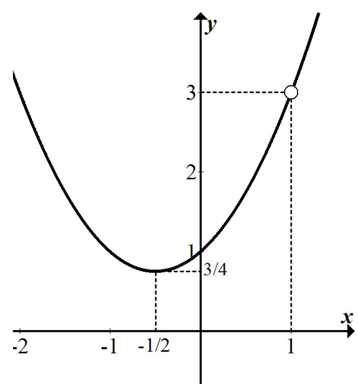
8) a) $A=\Re-\{1\}$; **b)** $I=\Re-\{2\}$;
c) $C_0=\{-1\}$; **d)** $y_1=1$,
e) $C_+=(-1;+\infty)-\{1\}$; $C_-=(-\infty;-1)$;



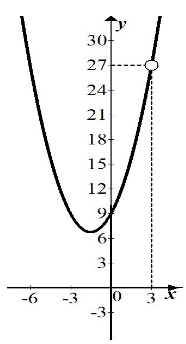
9) a) $A=\Re-\{\pm 2\}$; **b),** $I=\Re-\left\{1;\frac{1}{4}\right\}$
c) $C_0=\{1\}$; **d)** $y_1=\frac{1}{2}$
e) $C_+(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)-\{2\}$
$C_-(-2;1)$



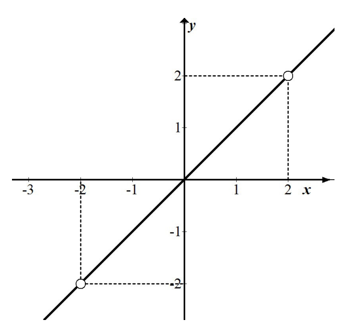
10) a) $A=\Re-\{1\}$; **b)** $I=\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$;
c) $C_0=\varnothing$; **d)** $y_1=1$,
e) $C_+=\Re-\{1\}$; $C_-=\varnothing$;



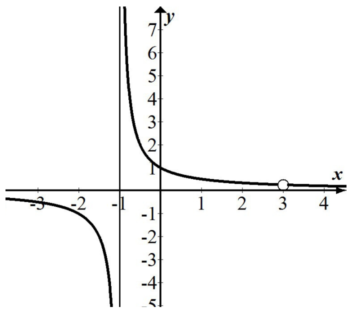
11) a) $A=\Re-\{3\}$; **b),** $I=\left[\frac{27}{4};+\infty\right)$
c) $C_0=\varnothing$; **d)** $y_1=9$
e) $C_+=\Re-\{3\}$; $C_-=\varnothing$



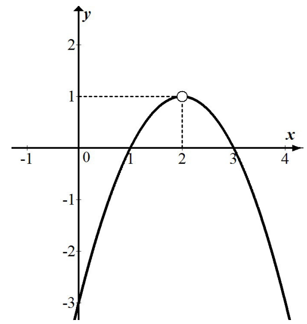
12) a) $A=\Re-\{\pm 2\}$; **b);** $I=\Re-\{\pm 2\}$
c) $C_0=\{0\}$; **d)** $y_1=0$,
e) $C_+=\Re^+-\{2\}$; $C_-=\Re^+-\{-2\}$



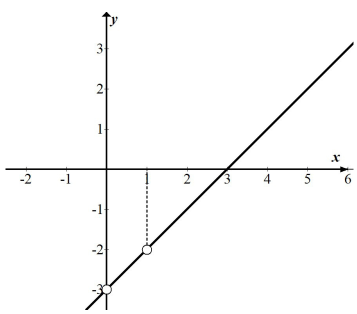
13) a) $A = \Re - \{-1;3\}$; **b),** $I = \Re - \{0;\frac{1}{4}\}$
c) $C_0 = \varnothing$; **d)** $y_1 =$
e) $C_+ = (-1;+\infty) - \{3\}$; $C_- = (-\infty;-1)$



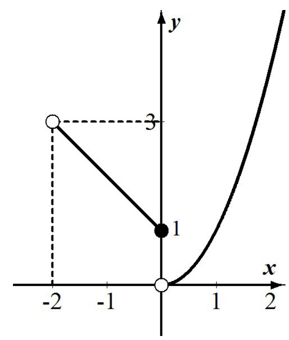
14) a) $A = \Re - \{2\}$; **b);** $I = \Re - \{1\}$
c) $C_0 = \{1;3\}$; **d)** $y_1 = -3$,
e) $C_+ = (1;3) - \{2\}$; $C_- = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$



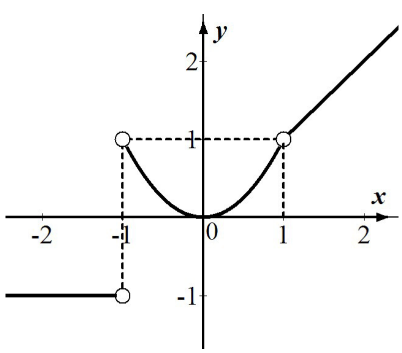
15) a) $A = \Re - \{0;1\}$; **b),** $I = \Re - \{-2;-3\}$
c) $C_0 = \{3\}$; **d)** $y_1 = \nexists$
e) $C_+ = (3;+\infty)$; $C_- = (-\infty;3) - \{0;1\}$



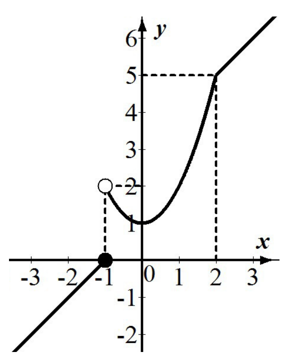
16) a) $A = (-2;+\infty)$; **b);** $I = \Re^+$
c) $C_0 = \varnothing$; **d)** $y_1 = 1$,
e) $C_+ = (-2;+\infty)$; $C_- = \varnothing$



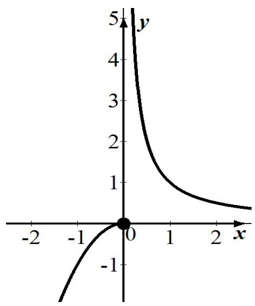
17) a) $A = \Re - \{\pm 1\}$; **b),** $I = \left[\Re^+ - \{1\}\right] \cup \{-1\}$
c) $C_0 = \{0\}$; **d)** $y_1 = 0$
e) $C_+ = (-1;+\infty) - \{1\}$; $C_- = (-\infty;-1)$



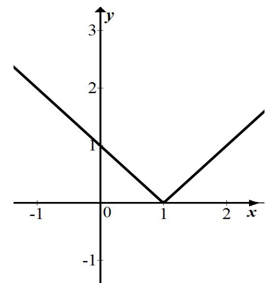
18) a) $\Re$; **b);** $I = \Re - (0;1)$
c) $C_0 = \{-1\}$; **d)** $y_1 = 1$,
e) $C_+ = (-1;+\infty)$; $C_- = (-\infty;-1)$



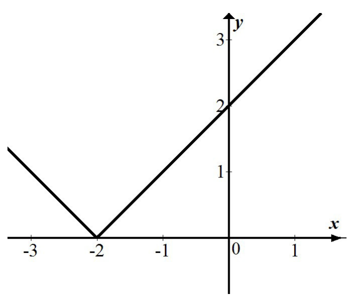
19) a) $A = \Re$ **; b),** $I = \Re$
c) $C_0 = \{0\}$ **; d)** $y_1 = 0$
e) $C_+ = (0\,;+\infty)$ **;** $C_- = (-\infty\,;0)$



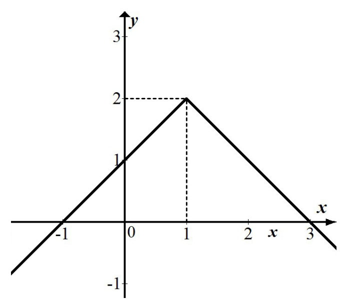
20) a) $\Re$ **; b);** $I = \Re_0^+$
c) $C_0 = \{1\}$ **; d)** $y_1 = 1$ **,**
e) $C^+ = R_0 - \{1\}$ **;** $C_- = \varnothing$



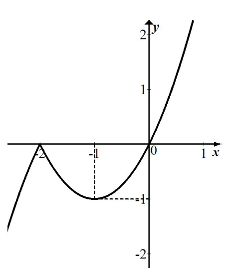
21) a) $A = \Re$ **; b),** $I = \Re^+ \cup \{0\}$
c) $C_0 = \{-2\}$ **; d)** $y_1 = 2$
e) $C_+ = \Re - \{-2\}$ **;** $C_- = \varnothing$



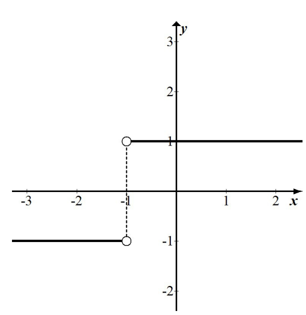
22) a) $\Re$ **; b);** $I = (-\infty\,;2]$
c) $C_0 = \{-1\,;3\}$ **; d)** $y_1 = 1$ **,**
e) $C^+ = (-1\,;3)$ **;** $C_- = (-\infty\,;-1) \cup (3\,;+\infty)$



23) a) $A = \Re$ **; b),** $I = \Re$
c) $C_0 = \{-2\,;0\}$ **; d)** $y_1 = 0$
e) $C_+ = \Re^+$ **;** $C_- = \Re^- - \{-2\}$



24) a) $\Re - \{-1\}$ **; b);** $I = \{\pm 1\}$
c) $C_0 = \varnothing$ **; d)** $y_1 = 1$ **,**
e) $C^+ = (-1\,;+\infty)$ **;** $C_- = (-\infty\,;-1)$



Colegio Nacional de Buenos Aires
Guía deTrabajos Prácticos 5to Año

<u>TRABAJO PRACTICO Nº1</u>: Límite, continuidad y rectas asíntotas.

Bernard Bolzano ***(Praga: 1781 / Praga: 1848)***
Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/bolz.html

Bernard Bolzano, liberó al cálculo del concepto infinitesimal. También dio ejemplos de la correspondencia de las funciones 1-1. Fue un filósofo, matemático y teólogo quien hizo significantes contribuciones tanto a las matemáticas como a la Teoría de la Ciencia, en algunos aspectos constituye un interesante precedente de la lógica matemática. En su obra póstuma "Paradojas de lo infinito" presenta conceptos que aparecen como una anticipación de la Teoría de Cantor acerca de los números transfinitos.
Bolzano ingresó a la facultad de filosofía en la Universidad de Praga en el 1796, estudió filosofía y matemática. Allí escribió :Mi especial placer por las matemáticas
En la rama de la metafísica se opuso a Kant, reivindicando el carácter constructivo, y no simplemente regulativo de algunas ideas metafísicas como las relativas a Dios y a la mortalidad del alma.

Bolzano influyó sobre muchos que intentaron depurar la lógica de todo psicologismo y fundarla en el análisis de preposiciones. Según Bolzano, la lógica tiene como misión estudiar las proposiciones como tales, es decir las proposiciones en si. Las proposiciones son enunciados mediante los cuales se declara que algo es o no es, con independencia de que sea verdadero o falso.
Bolzano, se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX, a saber: en el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series, y en la existencia de funciones continuas sin derivadas; pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o de permanecer inéditos, como su importante Teoría de Funciones, que apareció en 1830, la influencia de sus ideas fue escasa.

1.1) <u>Cálculo de límites</u>.

1) En los siguientes casos, completar la tabla estableciendo si la función está definida o no en el punto e inferir el resultado indicado para el límite:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right)=5$

x	1,9	1,995	1,9992	2	2,004	2,01	2,1
f(x)							

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$

x	2,92	2,994	2,9996	3	3,002	3,03	3,1
f(x)							

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

x	0,9	0,994	0,9992	1	1,004	1,01	1,1
f(x)							

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3+3}{x+1} = \infty$

x	10^3	10^4	10^5	10^6	$\to \infty$
$f(x)$					

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$

x	10^3	10^4	10^5	10^6	$x \to \infty$
$f(x)$					

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

x	10^3	10^4	10^5	10^6	$x \to \infty$
$f(x)$					

2) Calcular, si existen, los límites indicados a continuación.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-9}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x+1}{x-3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x+5}$ **h)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ **i)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-1}{5x^2+2}$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **k)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5}{x^3-4}$ **l)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{3x^2+1}$

m) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ **n)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ **ñ)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

o) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ **p)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ **q)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}$

r) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4-1}{x^3+1}$ **s)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$ **t)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-2x-4}{x^3-8}$

u) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+4x^2-3x-2}{x^2+13x-14}$ **v)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-2x-21}{x^4-27x}$ **w)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4+3x^3+7x^2-5x-6}{x^4+2x-3}$

3) Calcular, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ **f)** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ **k)** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ **l)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ **n)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1000x}{x^2-1}$ **ñ)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$

o) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^3-8x+5}$ **p)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1).(3x-2)^2}{3x^3+1}$ **q)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x.(x+2)}-x\right)$

4) Calcular los siguientes límites trigonométricos.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(3x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2 x}{4x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{sen\, x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x}{tg\, x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(4x)}{x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\, x - sen\, x}{x^3}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(a+x)-sen(a-x)}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ **Sugerencia:** Hacer $z = x - \dfrac{\pi}{2}$

k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-sen\, x}{x-\frac{\pi}{2}}$ **l)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+sen(3x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ **m)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{sen^2(2x)}{1-sen\, x}$

5) Analizar si la respuesta de los límites dados a continuación, es correcta.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ $\nexists$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-a}{|x-a|}$ $\nexists$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} |x-2| - x + 2 = 0$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|-x}{x}$ $\nexists$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ $\nexists$ **h)** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{2x-2} = -\frac{1}{2}$

1.2) Continuidad.

1) Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Clasificar en cada caso el tipo de discontinuidad y graficarlas aproximadamente.

a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & Si \quad -2 < x \le 0 \\ x^2 & Si \quad x > 0 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & Si \quad x < -1 \\ x^2 & Si \quad -1 < x < 1 \\ x & Si \quad x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & Si \quad x \le -1 \\ x^2+1 & Si \quad -1 < x < 2 \\ x+3 & Si \quad x \ge 2 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & Si \quad x \le 0 \\ \frac{1}{x} & Si \quad x > 0 \end{cases}$ en $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $x_1 = 1$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ en $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$

2) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan, clasificarlas y graficarlas en forma aproximada.

a) $f(x) = \begin{cases} x & Si \quad x \ge 2 \\ 2 & Si \quad x < 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3+x & Si \quad x \le 1 \\ 3-x & Si \quad x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & Si \quad x \ne 2 \\ 3 & Si \quad x = 2 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} -4 & Si \quad x < -2 \\ \frac{8}{x-2} & Si \quad -2 < x < 6 \\ 2x-10 & Si \quad x > 6 \end{cases}$

3) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan y clasificarlas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-4}{(x+3).(x^2-16)}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-3x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3}$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & Si \quad x \ne 0 \\ 5 & Si \quad x = 0 \end{cases}$

4) Es posible definir *f*(1) para que la función "f", dada por la fórmula $f(x)=\dfrac{x.(x-1)}{x^2-1}$ sea continua en $x_0=1$?

5) Definir, si es posible, *f* (2) para que la función dada por la expresión $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ sea continua en $x_0=2$.

6) Definir, si es posible, *f*(0) para que *f*(*x*)=*x.sen* $f(x)=x.sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ sea continua en el origen.

7) Hallar el valor de "k" , que hace que *h* sea continua en $x_0=4$.

$$h(x)=\begin{cases}\frac{sen\left(x^2-5x+4\right)}{x-4} & Si \quad x\neq 4\\ k & Si \quad x=4\end{cases}$$

8) Hallar *k* para que la función "*g*" sea continua en $x_0=k$.

$$g(x)=\begin{cases}3x^2+k & Si \quad x>k\\ -x^2-3k-1 & Si \quad x<k\end{cases}$$

9) Hallar *k* para que la función *g* sea continua en $x_0=0$.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{sen(k\,x)}{x} & Si \quad x\neq 0\\ -k^2+2 & Si \quad x=0\end{cases}$$

10) Hallar *k* para que la función "f" sea continua en $x_0=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{tg\left(x^3+2x-3\right)}{x-1} & Si \quad x\neq 1\\ k^2+4k & Si \quad x=1\end{cases}$$

11) ¿Qué valores de "*a*" y de "b" hacen que *f* sea continua en todo $\Re$?

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & Si \quad x<1\\ ax+b & Si \quad 1\leq x\leq 2\\ 3x & Si \quad x>2\end{cases}$$

12) Hallar, si existe, los valores de "*a*" y de "b" para que "*f*" sea continua en todo $\Re$

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & Si \quad x\leq -1\\ \frac{4}{5-x^2} & Si \quad -1<x<1\\ -3ax+2b & Si \quad x\geq 1\end{cases}$$

13) Sea la función "f", definida por la fórmula $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}+a & Si \quad x\le -1 \\ -x+b & Si \quad -1<x\le 2 \\ \frac{a}{x}-c & Si \quad x>2 \end{cases}$,

Hallar los valores de *a*, *b* y *c* tal que *f* resulte continua en todo el campo real y la recta $y=-3$ sea asíntota para $x\to +\infty$.

1.3) Rectas asíntotas a una curva.

1) Hallar, si existen, las ecuaciones de las rectas asíntotas a las funciones definidas por:

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{5x-1}{x-2}$ $\qquad c)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$

$d)\ f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ $\qquad e)\ f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ $\qquad f)\ f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-1}$

Resolución de a)

Como $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ está definida $\forall x,\ x\in\Re$ el dominio de la función es el conjunto de los números reales, lo que nos indica que la función no presenta asíntotas verticales.

Para saber si tiene asíntotas horizontales se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$.

En nuestro caso $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}}=0$. Luego y = 0 es A.H.

Resolución de f)

Como $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-1}$ no está definida para x = 1 el dominio de la función es $D_f=\Re-\{1\}$ lo que nos indica que es una probable asíntota vertical. Para asegurarnos de que realmente lo sea hay que comprobar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{4x^2+1}^{\to 5}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}=\infty$$. Por lo tanto x = 1 es A.V.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overbrace{4x^2+1}^{\to\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to\infty}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2/x^2 + 1/x^2}{x/x^2 - 1/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 + \overbrace{1/x^2}^{\to 0}}{\underbrace{\underbrace{1/x}_{\to 0} - \underbrace{1/x^2}_{\to 0}}_{\to 0}} = \infty$ podemos asegurar que la función no presenta A.H.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Ello es una característica de las funciones racionales. Para ello hacemos lo siguiente:

Hacemos la división entre polinomios $(4x^2 + 1)\ /\ (x - 1)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
4x^2 & +\ 0x & +\ 1 & x - 1 \\ \cline{4-4}
-\ 4x^2 & +\ 4x & & 4x+4 \\ \cline{1-2}
0 & +\ 4x & +\ 1 & \\
 & -\ 4x & +\ 4 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & +\ 5 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
D(x) & d(x) \\ \cline{2-2}
r(x) & C(x)
\end{array}
$$

Como $D(x) = C(x)\ .\ d(x) + r(x)$ entonces $\dfrac{D(x)}{d(x)} = \dfrac{C(x).d(x)}{d(x)} + \dfrac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow$

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow \frac{4x^2+1}{x-1} = (4x+4) + \frac{5}{x-1}$$

Por lo tanto: $y = 4x + 4$ es la A.O.

Nota: Este procedimiento se puede aplicar, solamente cuando se trata de funciones racionales, en cuyo caso aseguramos que, si el cociente obtenido es una expresión del tipo "mx+b" y además el resto es _no nulo_ entonces esa expresión lineal obtenida es la ecuación de la asíntota oblicua. Para que el cociente sea lineal es condición necesaria, que el grado del polinomio numerador exceda en una unidad al grado del polinomio denominador.

2) En un tanque que tiene 500 l de agua se inyecta una solución con sal (de concentración 5 gr/ l) a razón de 1 litro por cada minuto. Supongamos que se mezcla con el agua instantáneamente. ¿Cómo evoluciona la concentración de sal dentro del tanque? ¿Qué sucede con esa concentración cuando el proceso se mantiene en el tiempo? Escribir analíticamente la función concentración de sal dentro del tanque en función del tiempo y graficarla.

Respuestas

1.1) 2)	**a)** $\frac{1}{5}$	**b)** $\frac{1}{3}$	**c)** $\frac{3}{2}$	**d)** $\frac{1}{2.\sqrt{5}}$	**e)** $+\infty$	**f)** $+\infty$	**g)** 0	**h)** 3
	i) $\frac{2}{5}$	**j)** ∞	**k)** ∞	**l)** 0	**m)** $\frac{1}{7}$	**n)** $\frac{9}{2}$	**ñ)** 6	**o)** $\frac{4}{7}$
	p) 2	**q)** $\frac{1}{6}$	**r)** $\frac{4}{3}$	**s)** 2	**t)** $\frac{5}{6}$	**u)** $\frac{8}{15}$	**v)** $\frac{25}{81}$	**w)** $\frac{11}{3}$

1.1) 3) **a)** 0 **b)** ∞ **c)** -2 **d)** ∞ **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** $3x^2$ **g)** $\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{1}{56}$

i) $\frac{1}{3}$ **j)** 1 **k)** $\frac{1}{2.\sqrt{x}}$ **l)** $-\frac{1}{3}$ **m)** 1 **n)** 0 **ñ)** ∞ **o)** 0

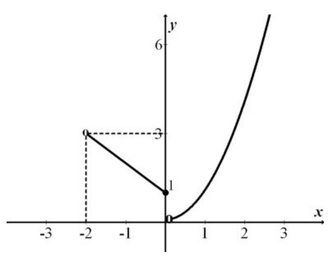
p) 3 **q)** 0 **r)** 1

1.1) 4) **a)** 3 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** ∞ **f)** $\frac{1}{9}$ **g)** $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **h)** $\frac{1}{2}$

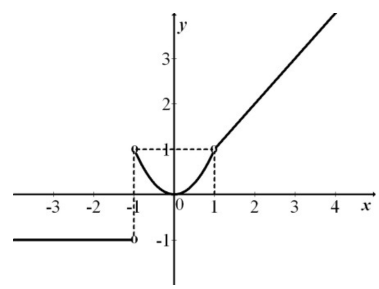
i) $2.\cos a$ **j)** $\frac{9}{2}$ **k)** 0 **l)** $\frac{9}{2}$ **m)** 8

1.2) Continuidad

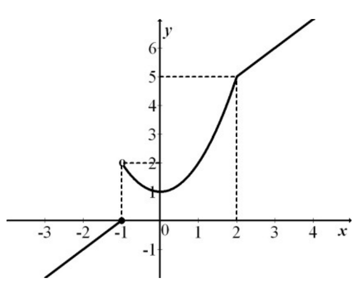
1) a) $x_1 = -1$, continua
$x_2 = 0$, disc. esencial salto finito.
$x_3 = 1$, continua



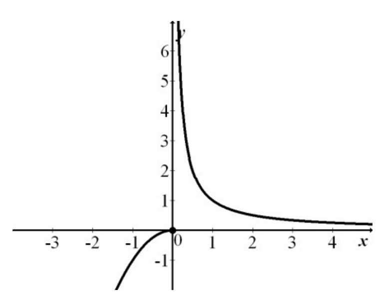
b) $x_1 = -1$, disc. esencial salto finito
$x_2 = 0$, continua.
$x_3 = 1$ discontinuidad evitable
$x_4 = 2$, continua.



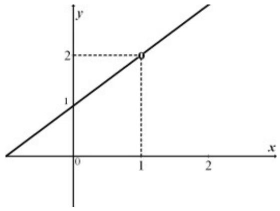
c) $x_1 = -1$, disc. esencial salto finito.
$x_2 = 0$, continua
$x_3 = 2$, continua



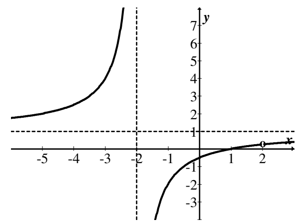
d) $x_1 = 0$, disc. esencial salto infinito
$x_2 = 2$, continua.



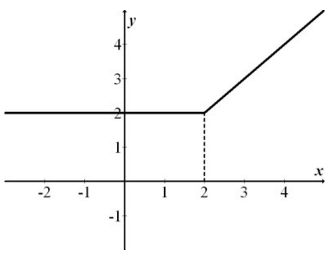
e) $x_1 = 1$, disc. evitable.
$x_2 = 0$, continua
$x_3 = 2$, continua



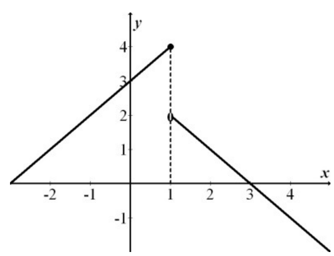
f) $x_1 = 2$, disc. evitable.
$x_2 = -2$, disc. esencial salto infinito
$x_3 = 1$, continua.



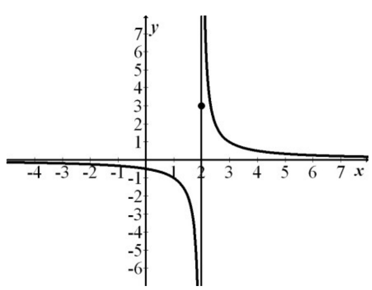
2) **a)** No presenta discontinuidades



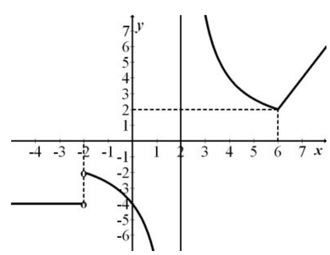
b) $x_1 = -2$, disc. esencial salto finito



c) $x_1 = 2$, disc. esencial salto infinito



d) $x_1 = -2$ disc. esencial salto finito
$x_2 = 2$ disc. esencial salto infinito
$x_3 = 6$ discontinuidad evitable



3) **a)** $x_1 = 2$, disc. esencial salto infinito

b) $x_1 = 3$ disc. evitable
$x_2 = -1$ disc. esencial salto infinito

c) $x_1 = -4$ disc. Esencial salto infinito
$x_2 = -3$ Esencial salto infinito
$x_3 = 4$ disc. evitable

d) $x_1 = -3$ disc. Evitable
$x_2 = 0$ Esencial salto infinito
$x_3 = 1$ Esencial salto infinito

e) $x_1 = 3$ disc. Esencial salto finito

e) $x_1 = 3$ disc. Evitable

4) $f(1)=\frac{1}{2}$

5) $f(2)=\frac{1}{4}$

6) $f(0)=0$

7) $k=3$

8) $k=-\frac{1}{2}$

9) $k=1 \quad ; \quad k=-2$

10) $k=1 \quad ; \quad k=-5$

11) $a=4 \quad ; \quad b=-2$

12) $a=\frac{1}{5} \quad ; \quad b=\frac{4}{5}$

13) $a=2 \quad ; \quad b=0 \quad ; \quad c=3$

1.3) Rectas asíntotas

1) b) A.V. $x=2$; A.H. $y=5$

c) A.V. $x=\pm 3$; A.H. $y=0$

d) A.V. no tiene ; A.O. $y=2x$

e) A.V. $x=0$; A.H. $y=1$

2) Rta: $C(t)=\frac{5t}{500+t}$

<u>TRABAJO PRACTICO Nº2:</u> Derivadas y Aplicaciones.

Gottfried Wilhelm von Leibnitz (Leipzig – 1646 / Hannover - 1716)

Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/leib.html

Leibnitz era hijo de un profesor de filosofía moral en Leipzig. Aprendió el mismo Latín y algo de Griego a la edad de 12 años, para así poder leer los libros de su padre. Desde 1661 al 1666 estudió leyes en la Universidad de Leipzig. En 1666 le fue rechazado el ingreso para continuar con un curso de doctorado, y fue a la Universidad de Altdorf, recibiendo su doctorado en leyes en el 1667.

Continuó su carrera de leyes trabajando en la corte de Mainz hasta 1672. En ese año visitó París para tratar de disuadir a Luis XIV del ataque al territorio Alemán. Permaneció en París hasta 1676, donde continuó practicando leyes. Sin embargo en París estudió matemáticas y física. Fue durante este periodo que las características fundamentales del cálculo fueron desarrolladas.

Fue un verdadero precursor de la lógica matemática. Persiguiendo una idea que le acosa desde la juventud es pos de un *"alfabeto de los pensamientos humanos"* y de un *"idioma universal"* se propone el proyecto de construir *"una característica universal"*, especie de lenguaje simbólico capaz de expresar, sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos, de manera que al surgir una controversia entre dos filósofos, éstos la zanjasen a la manera de los calculistas; bastaría en efecto, sentarse ante los ábacos, pluma en mano, y como buenos amigos decirse, en mutuo acuerdo: calculemos.

Las ideas de Leibniz, que contiene muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta este siglo. Igual destino tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del XIX. Agreguemos que las ideas de Kant, de gran influencia en su tiempo y para quien no era necesaria "ninguna nueva invención en la lógica", han contribuido sin duda al estancamiento de esta disciplina. Las cosas cambiaron cuando llegó Boole, el cual se convirtió en el verdadero fundador de la lógica simbólica.
El resto de su vida desde 1676 hasta su muerte, permaneció en Hannover.
El 21 de Noviembre de 1675 escribió un manuscrito usando por primera vez la notación de la integral ò f(x)*d(x). En el mismo manuscrito estaba dada la regla para la diferenciación. Esta regla fue dada a conocer dos años después, en Julio de 1677.

<u>DERIVADAS</u>

1) <u>Derivada de una función en un punto</u>

1.1) Calcular la derivada de la función en el punto indicado, aplicando la definición. Interpretar geométricamente la respuesta lograda.

1) $y = x^3 - 2x + 3$ en $x_0 = 1$

2) $y = 2x^4 - x$ en $x_0 = -2$

3) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

4) $y = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = -1$

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $x_0 = 1$

6) $y = \dfrac{1}{x-2}$ en $x_0 = 2$

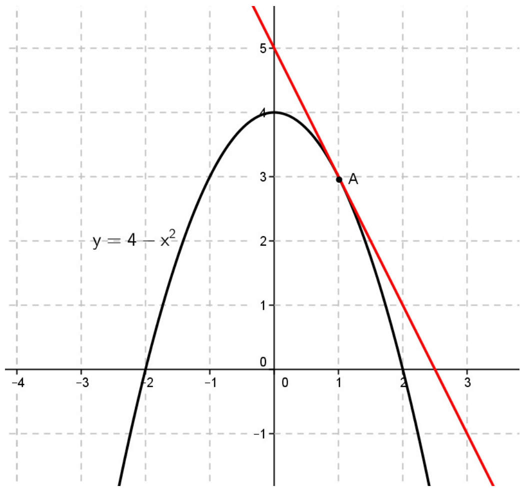
<u>Ejemplo</u>: Calcular, aplicando la definición, la derivada de la función cuadrática $y = 4 - x^2$ en $x_0 = 1$

Resolución

Acorde con la definición sabemos que: $f'(x_0) = \underbrace{lím}_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Reemplazando resulta:

$$f'(1) = \underbrace{lím}_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \underbrace{lím}_{x \to 1} \frac{\overbrace{\left[4 - x^2\right] - 3}^{1-x^2}}{x - 1} = \underbrace{lím}_{x \to 1} \frac{(1 - x).(1 + x)}{x - 1} = \underbrace{lím}_{x \to 1} -(1 + x) = -2$$



Es evidente que, si cambiamos de valor de abscisa, el punto en cuestión cambiará y en consecuencia la derivada tomará otro valor.

2) Función Derivada

2.1) Hallar, en cada caso y aplicando la definición, la función derivada.

1) $y = x^3 + x$

2) $y = 2x^2 + 3x - 4$

3) $y = \dfrac{1}{x}$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Ejemplo: Calcular, mediante la definición, la derivada de la función cuya fórmula está dada por la expresión $y = x^2 + 3x - 4$

Resolución

Acorde con la definición y reemplazando en ella, resulta:

$$f'(x) = \underbrace{lím}_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underbrace{lím}_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^2 + 3.(x+h) - 4\right] - \left[x^2 + 3x - 4\right]}{h}$$

Si desarrollamos el cuadrado de binomio y distribuimos en el término lineal, resulta que:

$$f'(x) = \underbrace{lím}_{h\to 0} \frac{\left[x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - 4\right] - \left[x^2 + 3x - 4\right]}{h} = \underbrace{lím}_{h\to 0} \frac{2xh + 3h}{h}$$

En esto último, extrayendo factor común se obtiene: $f'(x) = \underbrace{lím}_{h\to 0} \dfrac{h.(2x+3)}{h} = 2x + 3$

Luego: $f'(x) = 2x + 3$

2.2) **a)** Demostrar que la función $y = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero que allí, no es derivable. Extraer conclusiones al respecto.

b) Analizar si la función definida por la fórmula $y = \sqrt[3]{x}$ es derivable en $x_0 = 0$.

Derivación por tablas – Propiedades y Reglas Prácticas

y	y'
k	0
x	1
$k\,x$	k
$k.f(x)$	$k.f'(x)$
$u \pm v$	$u' \pm v'$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
$u^n \quad (u > 0 \text{ y} \neq 1)$	$n.u^{n-1}.u'$
$sen\ u$	$cos\ u.\ u'$
$cos\ u$	$-sen\ u.\ u'$
$tg\ u$	$sec^2 u.\ u'$
$cotg\ u$	$-cosec^2 u.\ u'$
$sec\ u$	$sec\ u\ .\ tg\ u\ .\ u'$
$cosec\ u$	$-cosec\ u\ .\ cotg\ u.\ u'$
e^u	$e^u.u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}.u'$
$ln\ u$	$\frac{1}{u}.u'$
$log_a\ u$	$\frac{1}{u}.log_a e.u'$
$arc\ tg\ u$	$\frac{1}{1+u^2}.u'$
$arc\ sen\ u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
$arc\ cos\ u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
$a^u \quad (a > 0 \text{ y} \neq 1)$	$a^u.ln\,a.u'$
$u^v \quad (u > 0 \text{ y} \neq 1)$	$u^v.\left(v'.\ ln\ u + v.\frac{u'}{u}\right)$

2.3) Hallar, en cada caso, la función derivada aplicando las reglas prácticas de derivación.

1) $y = x^5 - 3x^3 + 8$ **2)** $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$ **3)** $y = \frac{x^4}{a} + \frac{x^2}{b} + x$

4) $y = ax^3 - \frac{x}{b} + c$ **5)** $y = (1 + 4x^3).(1 + 2x^2)$ **6)** $y = x\,.ln\ x$

7) $f(t) = (2t-1).(t^2 - 6t + 3)$

8) $y = x.(3x+2).(2x+3)$

9) $y = \dfrac{2x^4}{4 - x^2}$

10) $y = \dfrac{5 - x}{5 + x}$

11) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

12) $f(t) = \dfrac{t^3 + 1}{t^2 - t - 2}$

13) $y = sen\, x . cos\, x$

14) $y = \dfrac{sen\, x}{1 + cos\, x}$

15) $y = \dfrac{e^x}{tg\, x}$

16) $y = x.arc\, sen\ \ x$

17) $y = \left(x^2 + 4\right)^5$

18) $y = \sqrt{x^2 + 9}$

19) $y = (3 + x).\sqrt{3 - x}$

20) $y = \sqrt{x^3 - x}$

21) $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

22) $y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$

23) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

24) $y = ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

25) $y = e^{4x+1}$

26) $y = 7^{x^2+3x+2}$

27) $y = e^{\sqrt{x}}$

28) $y = e^{x^2} . ln\, x^2$

29) $y = sen^2 x$

30) $y = sen\,(x+a)\ .cos\,(x+a)$

31) $y = sen\ \ ln\, x$

32) $y = ln\ \ tg\, x$

33) $y = ln\, tg\, \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$

34) $y = sen^3\,(2x) + tg\, ln\, x$

35) $y = cos^2\, \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

36) $f(t) = (t.\ cotg\ t)^2$

37) $y = x^x$

38) $y = \sqrt{arc\, sen\ \ x + 1}$

39) $y = \dfrac{1}{2} tg^2\, x + ln\ cos\ x$

40) $y = x^{sen\ \ x} + x$

41) $y = \dfrac{x^{2x} - x^3}{x^2}$

42) $y = arc\, sen\ \ x + arc\, sen\ \sqrt{1 - x^2}$

3) Interpretación Geométrica

3.1) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:

1) $y = x^2 + 1$ en $x_0 = 1$. Graficar

2) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$. Graficar

3) $y = -x^2 + 4x - 3$ en $x_0 = 0$. Graficar

4) $y = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = -1$

5) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ en $x_0 = 1$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

Resolución

Siendo $x_0 = 1 \ \Rightarrow\ y_0 = f(1) = \sqrt{2 - \frac{1}{1}} = 1$.

Dado que: $$f'(x) = \frac{1}{2}.\left(2 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(\frac{1}{x^2}\right) \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2.\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}$$

Si la evaluamos en $x_0 = 1$, sabremos el valor de la pendiente de la recta tangente. De esta forma, resulta:

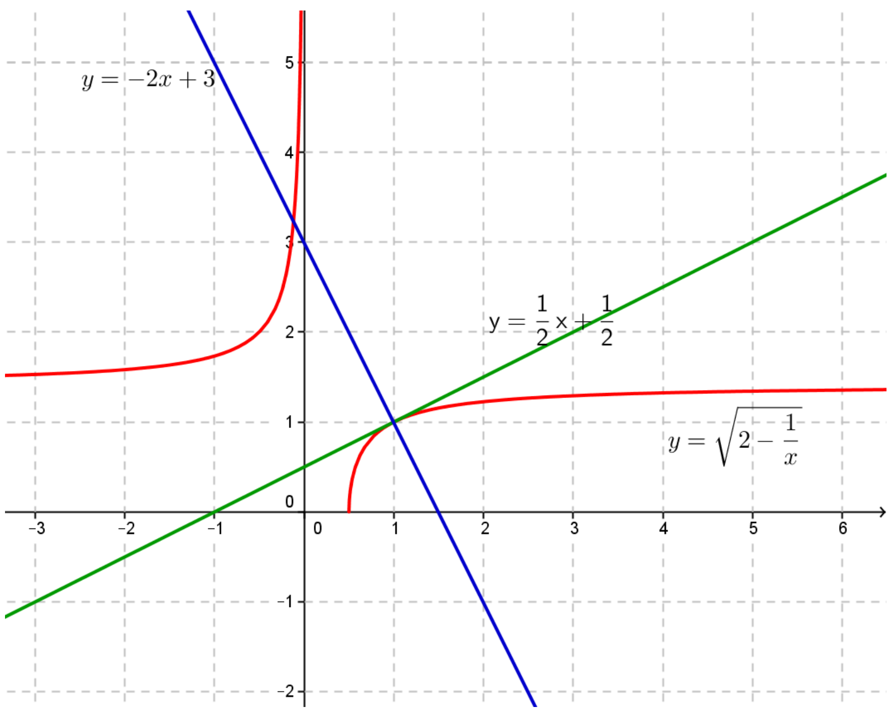
$$f'(1) = \frac{\left(\frac{1}{1^2}\right)}{2.\sqrt{2-\frac{1}{1}}} = \frac{1}{2}$$

Así tendremos que:

Recta tangente: $y - 1 = \frac{1}{2}.(x-1) \quad \Rightarrow \qquad r\,t: \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Recta normal: $y - 1 = -2.(x-1) \quad \Rightarrow \qquad r_n: \quad y = -2x + 3$

Vamos a Graficar la situación aunque el enunciado no lo indique



3.2) ¿En qué puntos la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3$ resulta:

1) paralela a la recta $12x - y = 5$? **2)** perpendicular a la recta $x + 3y - 1 = 0$?

3.3) La función cuya fórmula está dada por la expresión $f(x) = \frac{ax+2}{x-1}$ posee en el punto de abscisa $x_0 = 2$ una recta tangente cuya ecuación es $y = -3x + b$. Hallar, si existen, cuánto deben valer "a" y "b"

<u>**Ejemplo**</u>**:** La función cuya fórmula está dada por la expresión $f(x) = a.\sqrt{x-1}$ posee en el punto de abscisa $x_0 = 2$ una recta tangente cuya ecuación es $y = 3x + b$. Hallar, si existen, cuánto deben valer "a" y "b"

Resolución

Acorde con el enunciado, debe suceder que la derivada de la función, evaluada en $x_0 = 2$, coincida con la pendiente de la recta tangente en ese punto cuyo valor es $m = 3$.

Derivando la función "f" tenemos que: $f'(x) = a.\left(\frac{1}{2}\right).(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{a}{2.\sqrt{x-1}}$

Siendo $x_0 = 2$ resulta: $f'(2) = \dfrac{a}{2.\sqrt{2-1}} = \dfrac{a}{2}$

Como ya expusimos anteriormente, debe suceder que: $f'(2) = \dfrac{a}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

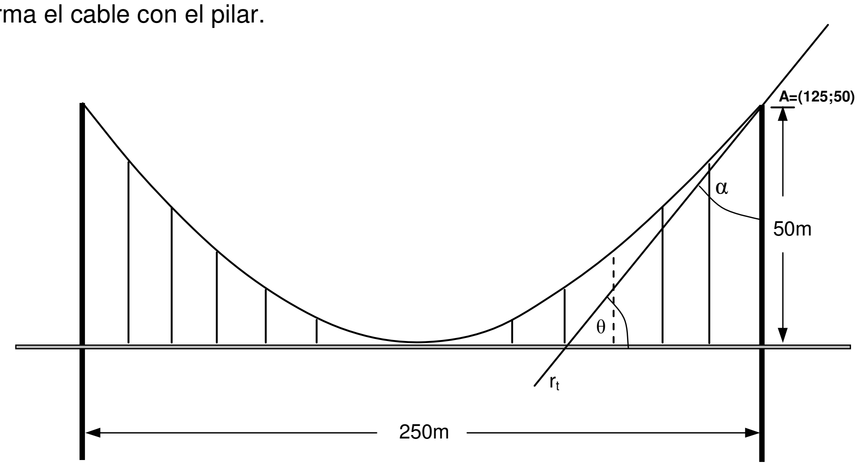
Sabiendo el valor de "a" podemos calcular " y_0 " porque $y_0 = f(x_0)$:

$$f(x) = 6.\sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(2) = 6.\sqrt{2-1} = 6$$

Para calcular el valor de "b" debemos reemplazar el valor de $x_0 = 2$ y de $y_0 = 6$ en la ecuación de la recta. Ello es porque el punto donde la recta es tangente, pertenece tanto a la curva como a la recta. Así tenemos que: $y = 3x + b \quad \Rightarrow \quad 6 = 3.2 + b \quad \Rightarrow \quad 6 = 6 + b$

Luego: $b = 0$

3.4) El cable de un puente colgante está unido a dos pilares. Ellos están separados entre sí una distancia de 250m como se indica en la figura. Suponiendo que adquiere forma de parábola con su punto más bajo a 50m del punto de suspensión. Hallar la ecuación de la parábola asociada y calcular el ángulo “α” que forma el cable con el pilar.



Ayuda: *Tomando como referencia un sistema de ejes cartesianos con origen en “O”. Buscar acorde con ello la ecuación de la parábola. Como r_t es tangente en el punto “A” podemos hallar el ángulo “θ” que es complementario al ángulo “α” pedido.*

3.5) **a)** ¿En qué punto/s de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ la recta tangente corta al eje de abscisas en x_0=3?

b) Determinar para qué abscisas de la curva cuya ecuación es $y = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 9$ sus rectas tangentes pasan por el origen.

4) Interpretación Física

4.1) Desde una plataforma ubicada a 20m de altura se arroja un proyectil verticalmente y hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/seg. Si la ecuación horaria del movimiento está dada por la expresión $s(t) = 20 + 50t - 5t^2$, donde el tiempo "*t*" se mide en segundos y la posición *s(t)* en metros. Calcular:

a) La velocidad del proyectil en el instante $t_0 = 2$ *seg.*

b) El tiempo necesario para llegar a la altura máxima.

c) La altitud máxima alcanzada.

5) Crecimiento y decrecimiento – Extremos relativos

5.1) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones indicadas a continuación.

1) $f(x) = x^2 - 4x - 1$ **2)** $f(x) = x^3 - x^2 - x$ ***3)*** $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

5.2) Hallar $k \in \Re$ de manera tal que la función definida por la expresión $f(x) = \dfrac{k\,x - 1}{x - k}$ sea creciente en todo su dominio.

5.3) Obtener *a* y *b* de manera tal que $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto A=(2;3).

5.4) La función $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ presenta un máximo relativo en el punto P_0=(–1;6). Hallar *a* y *b* y determinar si existe algún otro extremo relativo.

5.5) Demostrar que $\forall a > 0$, $f(x) = \ln(ax^3 + x)$ no tiene extremos relativos.

5.6) Demostrar que la función definida por la expresión, $f(x) = x.e^{bx}$ $(b \neq 0)$ siempre posee un extremo relativo en $x_0 = -\frac{1}{b}$.

<u>Ejemplo</u>: La función cuya fórmula está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 + k\,x + 1}{x^2 - 2x}$ posee un extremo en $x_0 = 1$. Hallar, si existe, el valor que debe tomar el número "k" y acorde con el resultado logrado calcular las coordenadas de todos sus extremos relativos clasificándolos en máximos y mínimos.

Resolución

Como sabemos que, la función en $x_0 = 1$ presenta un extremo, allí la derivada debe ser nula. Derivando tenemos que:

Si $f(x) = \dfrac{x^2 + k\,x + 1}{x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x + k).\left(x^2 - 2x\right) - (x^2 + k\,x + 1).(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$

Como $f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = \dfrac{(2 + k).(1 - 2) - (1 + k + 1).(2 - 2)}{(1 - 2)^2} = -2 - k$

Igualando a cero tenemos que: $-2 - k = 0 \Rightarrow k = -2$

Sabiendo el valor de "k" resultan ser: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}$

Y también: $f'(x)=\dfrac{(2x-2).\left(x^2-2x\right)-(x^2-2x+1).(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$

Si en esta última expresión operamos algebraicamente resulta:

$$f'(x)=\frac{2x^3-4x^2-2x^2+4x-2x^3+2x^2+4x^2-4x-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

De donde: $f'(x)=\dfrac{-2x+2}{\left(x^2-2x\right)^2}$

Para calcular sus extremos, debemos saber en qué puntos se anula su derivada.

$$f'(x)=\frac{-2x+2}{\left(x^2-2x\right)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad -2x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

Luego, su único extremo es: $x=1$

Analizando el crecimiento de la función y que el dominio de la misma es: $Df=\Re-\{0\,;2\}$

x	(-∞; 0)	0	(0 ; 1)	1	(1 ; 2)	2	(2 ; +∞)
f '(x)	(+)	A.V.	(+)	Máx.	(-)	A.V.	(+)
	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

6) Derivadas sucesivas

6.1) Calcular las derivadas sucesivas indicadas en cada caso

1) $f(x)=2x.sen\,x$ hallar y'''

2) $f(x)=ln\,x$ hallar y'''

3) $f(x)=sen\,(2x)$ hallar y^{v}

4) $f(x)=x.\,arc\,tg\,x$ hallar y'''

5) $f(x)=x.e^{x}$ hallar y^{n}

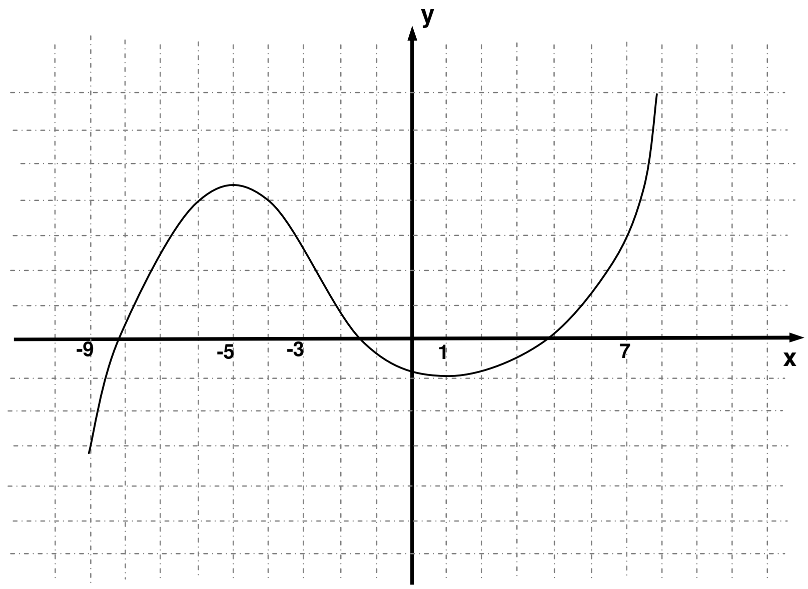
6) $f(x)=ln\,(1+x)$ hallar y^{n}

6.2) Demostrar que la función $y=e^{2x}.sen\,(5x)$ satisface la ecuación $y''-4y'+29y=0$

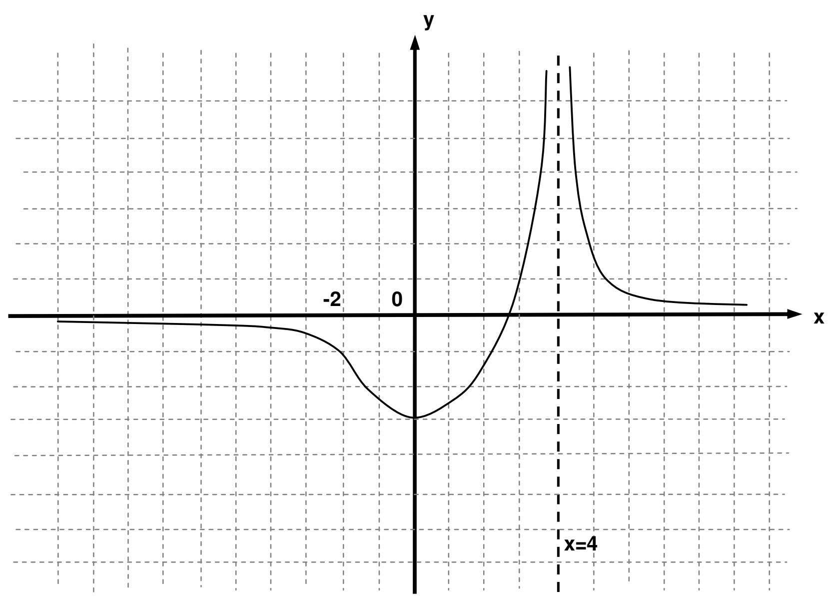
6.3) Demostrar que la función $y=\frac{1}{2}x^2.e^{x}$ satisface la ecuación $y''-2y'+y=e^{x}$

7) Construcción de gráficas

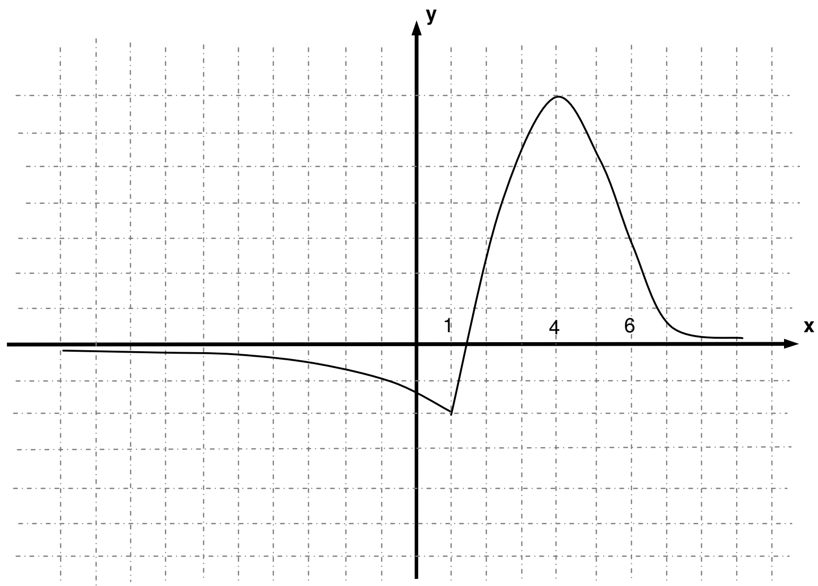
7.1) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función polinómica en el intervalo $[-9\,;7]$. Se sabe que en $x=-5$ y en $x=1$ presenta extremos relativos. Asimismo, en $x=-3$ podemos encontrar un punto de inflexión. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



7.2) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función que presenta una asíntota vertical en $x = 4$ y una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Se sabe que en $x = 0$ presenta un mínimo. Asimismo, en $x = -2$ podemos encontrar un punto de inflexión Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



7.3) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función continua. La misma, posee una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$ presenta un punto en $x = 1$ donde no es derivable, en $x = 4$ un máximo relativo y un punto de inflexión en $x = 6$. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



8) Aplicación de las derivadas al estudio de funciones.

8.1) Hallar el dominio, analizar la existencia de rectas asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Acorde con los datos obtenidos realizar las gráficas de las funciones cuyas fórmulas son:

1) **<u>Ejemplo</u>:** $f(x) = 6x^2 - x^4$

Resolución:

a) Dominio: $\Re$ porque es una función polinómica.

b) Asíntotas no posee tiene porque es polinómica.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x) = 12x - 4x^3 \quad \Rightarrow \quad 12x - 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(3 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad |x| = \sqrt{3}$$

Entonces:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
f '(x)	(+) ↗	Máx	(-) ↘	Mín	(+) ↗	Max	(-) ↘

Máximos y mínimos relativos:

$$Máx_1 = \left(-\sqrt{3}\ ;\ 9\right) \qquad Mín_1 = (0\ ;\ 0) \qquad Máx_2 = \left(\sqrt{3}\ ;\ 9\right)$$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x)=12-12x^2 \quad\Rightarrow\quad 12-12x^2=0 \quad\Rightarrow\quad 12(1-x^2)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 12=0 \quad absurdo \\ ó \\ 1-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad |x|=1 \end{cases}$$

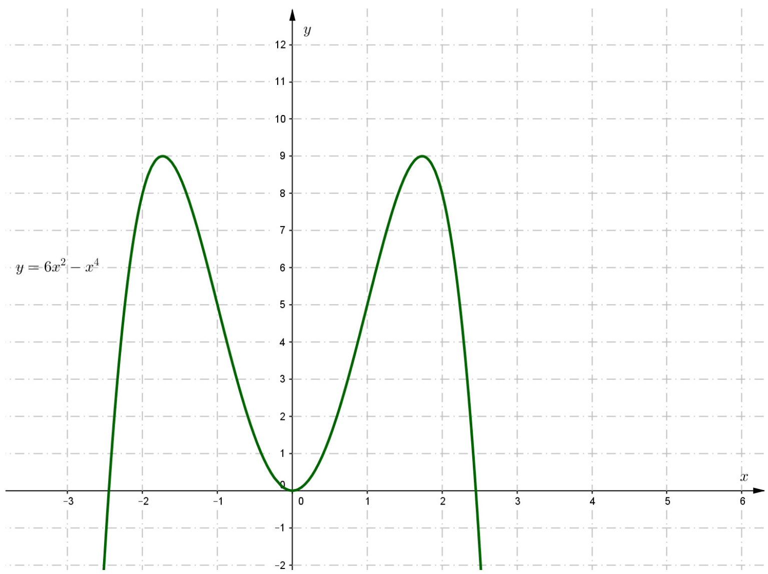
Entonces:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
f''(x)	(-)	P.I.	(+)	P.I.	(-)
	$\frown$		$\smile$		$\frown$

Puntos de inflexion:

$$PI_1=(-1\ ;5) \qquad\qquad PI_1=(1\ ;5)$$

Gráfico aproximado:



2) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

a) Dominio: $D=\Re$.

b) Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales porque el dominio es $D=\Re$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x}^{\infty}}{\underbrace{1+x^2}_{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+1}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$$ es la ecuación de la asíntota horizontal con lo que, por ttratarse de una función racional, podemos asegurar que no posee A.O.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{1.(x^2+1)-x\ .2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}=0\quad\Rightarrow\quad x^2=1\quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

Entonces:

x	(-∞;-1)	-1	(-1;1)	1	(1;+∞)
f '(x)	(-) ↘	Mín.	(+) ↗	Máx.	(-) ↘

Máximos y mínimos relativos: $Mín=\left(-1\ ;-\frac{1}{2}\right)$ $Máx=\left(1\ ;\frac{1}{2}\right)$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{-2x.(1+x^2)^2-(-x^2+1).2.(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(1+x^2).\left[-(1+x^2)-2(-x^2+1)\right]}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x\left[-x^2-1+2x^2-2\right]}{(1+x^2)^3}=\frac{x\left[x^2-3\right]}{(1+x^2)^3}$$

Si $f''(x)=0\quad\Rightarrow\quad x=0\vee x^2-3=0\quad\Rightarrow\quad x=0\quad\vee\quad x=\pm\sqrt{3}$

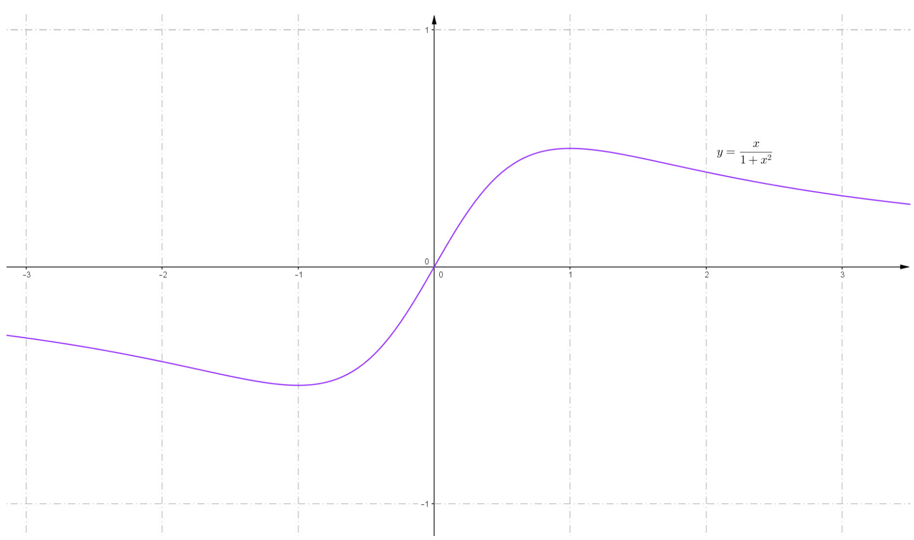
Entonces:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
f''(x)	(-) ∩	P.I.	(+) ∪		(-) ∩	P.I.	(+) ∪

Puntos de inflexión:

$PI_1=\left(-\sqrt{3}\ ;-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $PI_2=(0\ ;0)$ $PI_3=\left(\sqrt{3}\ ;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Gráfico aproximado:



3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

a) Dominio: $D=\Re-\{2\}$.

b) Asíntotas:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-2x+4}^{\to 4}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=2 \text{ es la ecuación de la asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^2-2x+4}^{\infty}}{\underbrace{x-2}_{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}}=\infty$$

Entonces, no existe asíntota horizontal.

El hecho de que sea una función racional y el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua.

Para ello hacemos la división $(x^2-2x+4)\ /\ (x-2)$

x^2	$-\ 2x$	$+\ 4$	$x-2$	$D(x)$	$d(x)$
$-\ x^2$	$+\ 2x$		x	$r(x)$	$C(x)$
0	0	$+\ 4$			

Como $D(x)=C(x)\,.\,d(x)+r(x)$ entonces $\dfrac{D(x)}{d(x)}=\dfrac{C(x).d(x)}{d(x)}+\dfrac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow$

$\dfrac{D(x)}{d(x)}=C(x)+\dfrac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\dfrac{4}{x-2}$. Como el resto es $r\neq 0$ entonces el cociente $y=x$ es la ecuación de la asíntota oblicua.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4).1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$\text{Si }\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0\quad\Rightarrow\quad x=0\ \vee\ x=4$$

Entonces:

x	(-∞ ; 0)	0	(0 ; 2)	2	(2 ; 4)	4	(4 ;+∞)
f ’(x)	(+)		(-)		(-)		(+)
	↗	Máx	↘	A.V.	↘	Mín	↗

Máximos y mínimos relativos:

$$Máx = (0\ ;\ -2) \qquad\qquad Mín = (4\ ;\ 6)$$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{(2x-4).(x-2)^2 - (x^2-4x).2.(x-2).1}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2).\left[(x-2)(x-2)-(x^2-4x)\right]}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2\left[x^2-4x+4-x^2+4x\right]}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

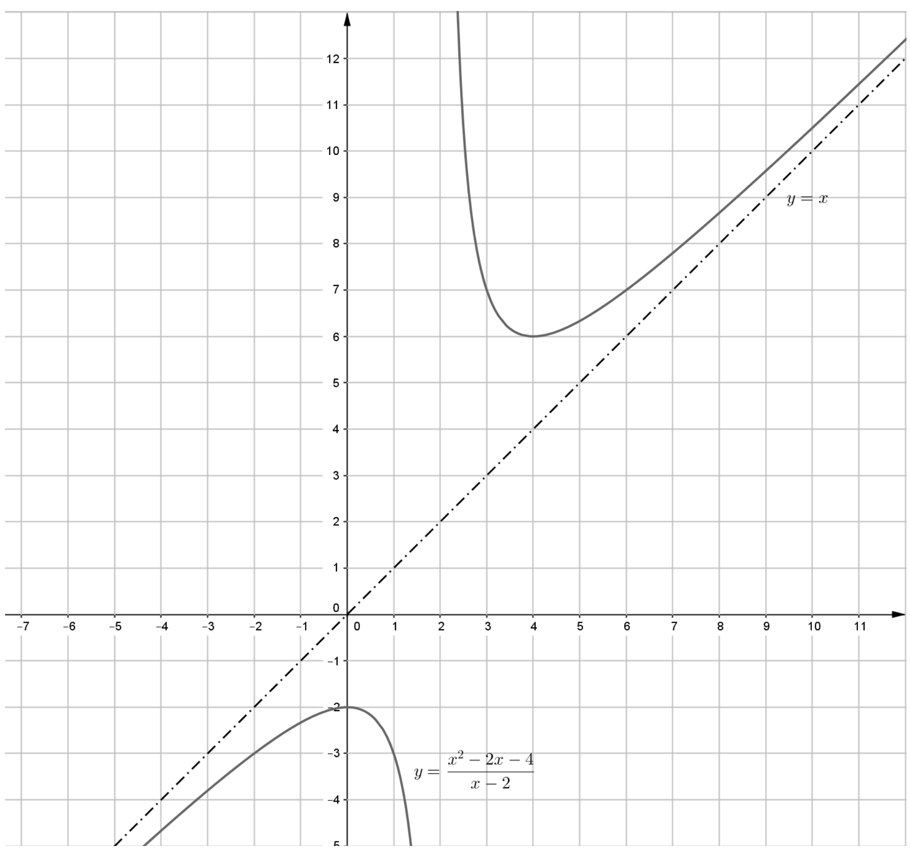
Dado que esta expresión no puede ser nula, no existen puntos donde se anule la derivada segunda

Entonces:

x	(-∞ ; - 2)	2	(2 ; +∞)
f ’(x)	(+)		(-)
	∩	A.V.	∪

Puntos de inflexión: No tiene

Gráfico:



8.2) Analizando la existencia de rectas asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión realizar las gráficas de las funciones cuyas fórmulas son:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

9) Aplicaciones de las derivadas a problemas de optimización

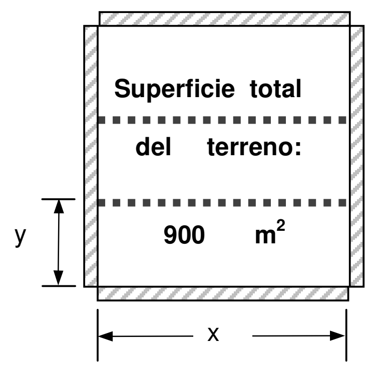
9.1) Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y además:

a) Su producto sea el máximo.

b) La suma de sus cuadrados sea mínima.

c) El producto entre el cuadrado de uno de ellos y el cubo del otro sea máximo

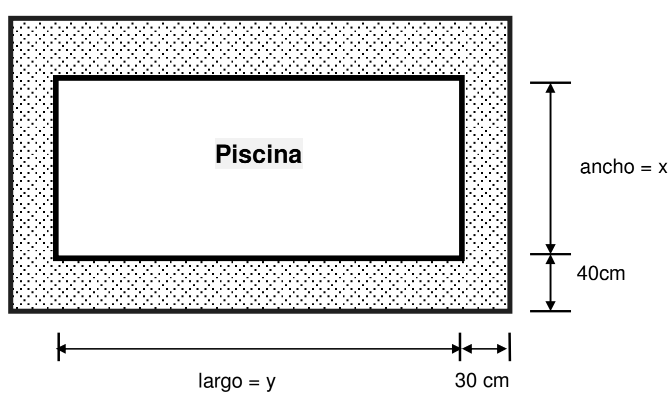
9.2) Un terreno de forma rectangular está dividido en tres parcelas de idéntica forma y dimensiones como se indica en la figura. La superficie total ocupada por el mismo es de $900m^{2.}$ Para delimitar las parcelas se cavan dos zanjas que no tienen costo alguno (línea punteada) y el instalarle un cerco perimetral que lo rodea, implica un costo de 100$ por cada metro lineal colocado.



¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada parcela para que ello signifique un costo total mínimo del cerco? Probar que efectivamente se trata de un mínimo y calcular su valor.

9.3) Se desea construir una piscina de forma rectangular y área máxima en un terreno de $12m^2$ de superficie con la misma forma. Si además debe cum-plir con la condición de estar rodeada por un camino embaldosado de 30 cm. de ancho sobre los dos lados menores y de 40 cm. sobre los otros dos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la misma a los efectos de cumplir con lo pedido?

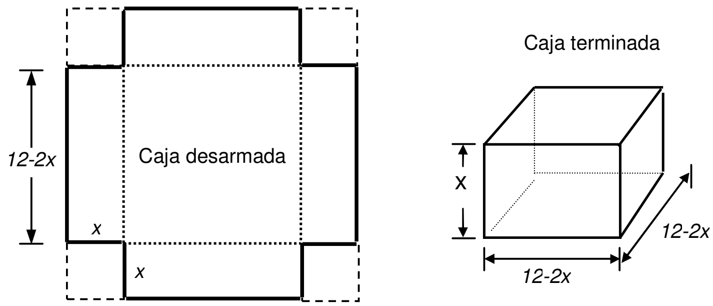
Figura de análisis



9.4) Hallar el área del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4, si dos de los lados del rectángulo están sobre los catetos.

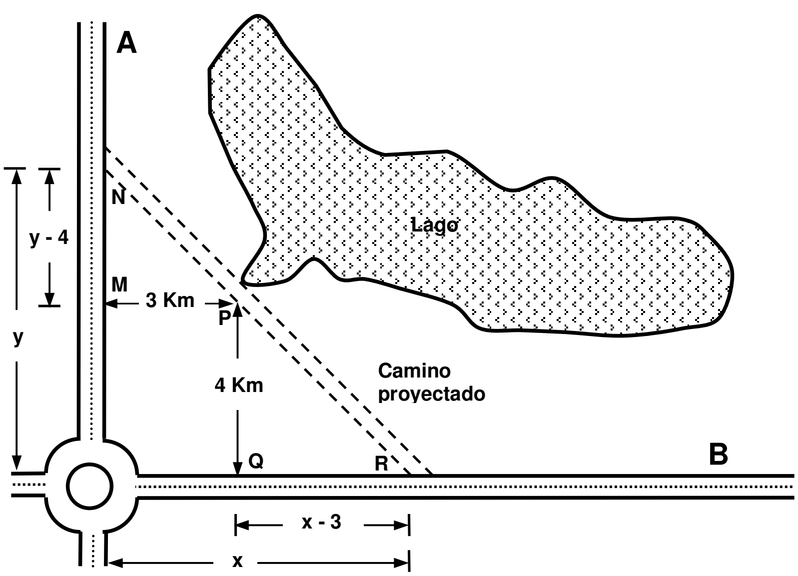
9.5) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de un triángulo isósceles de área máxima tal que uno de los vértices es el origen de coordenadas y los otros dos son dos puntos simétricos de la parábola $y = 36 - x^2$ tal que $-6 \le x \le 6$? Justifique su respuesta.

9.6) A partir de una hoja cuadrada de cartón de *12dm* de lado se quiere construir una caja abierta recortando cuadrados iguales y luego plegando por la línea punteada como se indica en la figura. ¿Cuál será el volumen máximo del que se podrá disponer?



9.7) Determinar las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica **sin tapa** de $64\ cm^3$ de volumen para almacenar para que resulte lo más económica posible. (Nota: Aproximar $\pi = 3{,}14$)

9.8) Dos carreteras "A" y "B" rectas y perpendiculares entre sí pasan por las cercanías de un lago como se indica en la figura. La mínima distancia desde el punto "P" contiguo al mismo hasta las carreteras es de 3km y 4km respectivamente. Se desea construir un camino recto que una las carreteras pasando por ese punto "P" de manera tal que el predio triangular comprendido entre los tres tramos sea de costo mínimo. ¿Cuál será el aproximadamente el valor del terreno delimitado si cotiza a razón 1000$ por hectárea? (Nota: 1 hectárea = $10000m^2 = 0{,}01km^2$)



Ayuda: *Acorde con los datos aportados por la figura podríamos calcular el área del predio como* $A = \frac{x.y}{2}$. *Ahora es necesario saber la relación existente entre "x" e "y".*

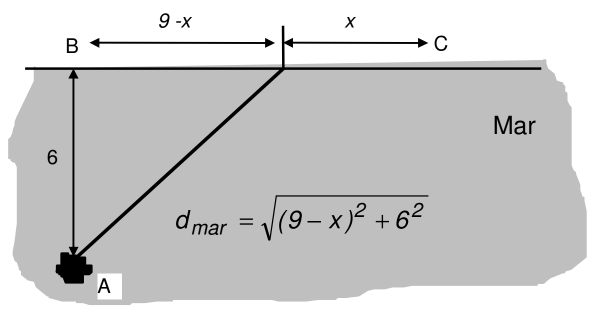
De la semejanza entre los triángulos $\overset{\Delta}{PQR}$ *y* $\overset{\Delta}{PMN}$ *surge la relación* $\dfrac{\left|\overline{PQ}\right|}{\left|\overline{QR}\right|} = \dfrac{\left|\overline{NM}\right|}{\left|\overline{MP}\right|} \Rightarrow$

$$\frac{4}{x-3} = \frac{y-4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{x-3} = y - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{x-3} + 4 = y$$

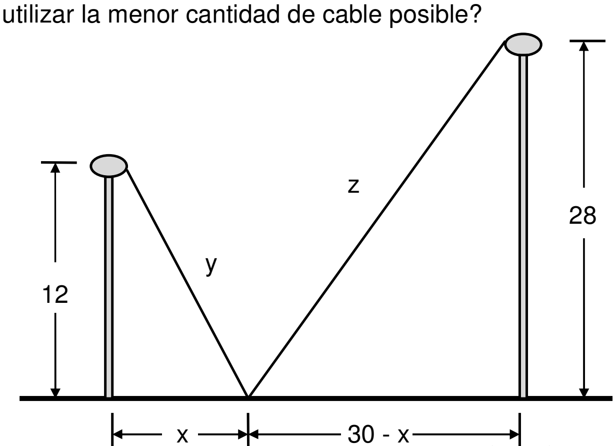
Reemplazando en la fórmula del área tenemos $A = \dfrac{x \,.\left(\dfrac{12}{x-3} + 4\right)}{2}$ *efectuando la propiedad distributiva queda:*

$A = \dfrac{6x}{x-3} + 2x$.

9.9) Una isla está ubicada en el punto A, 6 Km mar adentro del punto más cercano B en una playa recta como se indica en la figura. Una persona que se encuentra en la isla desea ir hacia un punto C, 9 Km playa abajo de B. El arrendar un bote cuesta \$15 cada Km recorrido y el alquiler de un auto con chofer \$12 cada Km. ¿Cómo se debe hacer el trayecto para que resulte lo más económico posible?



9.10) Dos postes de *12m* y *28m* de altura distan *30 m* entre sí. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto habrá que fijarlo para utilizar la menor cantidad de cable posible?



Ayuda:

L_{total} = y + z siendo**:**

$$\begin{cases} y = \sqrt{12^2 + x^2} \\ z = \sqrt{28^2 + (30-x)^2} \end{cases}$$

9.11) Cuál de los puntos de la parábola $y = (x-2)^2$ se encuentra más cercano al origen de coordenadas?

Ayuda: *Recordar que la distancia entre dos puntos A y B está dada por:* $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

10) Aplicación de las derivadas a cálculo de límites – (Tema optativo)

10.1) Resolver aplicando la regla de L'Hopital

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,.\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{\operatorname{sen}(x-1)}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(ax)}{b\,x}$

7) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+5x-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}{\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen} x+3}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3+2x^2+6x}{x^2-2x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3.\cos x}{4\operatorname{sen} x}$ 11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^3}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\operatorname{sen} x-1}{\ln(1+x)}$

13) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}$ 15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2.\operatorname{sen}^2 x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\operatorname{sen} x}$ 17) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg} x}{1+\cos(4x)}$

Respuestas

1.1) **1)** $y'(1)=1$ **2)** $y'(-2)=-65$ **3)** $y'(4)=\dfrac{1}{4}$ **4)** $y'(-1)=-1$

5) $y'(1)=-\dfrac{1}{2}$ **6)** *no existe*

2.3) **1)** $y'=5x^4-9x^2$ **2)** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}$ **3)** $y'=\dfrac{4x^3}{a}+\dfrac{2x}{b}+1$ **4)** $y'=3ax^2-\dfrac{1}{b}$

5) $y'=4x.\left(1+3x+10x^3\right)$ **6)** $y'=\ln x+1$ **7)** $f'(t)=6t^2-26t+12$ **8)** $y'=18x^2+26x+6$

9) $y'=\dfrac{4x^3.\left(8-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$ **10)** $y'=-\dfrac{10}{(5+x)^2}$ **11)** $y'=\dfrac{x^2.(3+x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}$ **12)** $f'(t)=\dfrac{t^4-2t^3-6t^2-2t+1}{\left(t^2-t-2\right)^2}$

13) $y'=\cos(2x)$ **14)** $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$ **15)** $y'=\dfrac{e^x.\left(\operatorname{tg} x-\sec^2 x\right)}{\operatorname{tg}^2 x}$

16) $y'=\operatorname{arc\,sen} x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **17)** $y'=10x.\left(x^2+4\right)^4$ **18)** $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

19) $y'=\dfrac{3.(1-x)}{2.\sqrt{3-x}}$ **20)** $y'=\dfrac{3x^2-1}{2.\sqrt{x^3-x}}$ **21)** $y'=\dfrac{1}{(1-x).\sqrt{1-x^2}}$

22) $y' = \dfrac{1}{4.\sqrt{1-x}.\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$ **23)** $y' = \dfrac{2x+1}{3.\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$ **24)** $y' = \dfrac{2}{1-x^2}$

25) $y' = 4.e^{4x+1}$ **26)** $y' = 7^{x^2+3x+2}.(2x+3).\ln 7$ **27)** $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2.\sqrt{x}}$

28) $y' = 2.e^{x^2}.\left(x.\ln x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ **29)** $y' = sen\ (2x)$ **30)** $y' = \cos 2(x+a)$

31) $y' = \dfrac{\cos \ln x}{x}$ **32)** $y' = \dfrac{2}{sen\,(2x)}$ **33)** $y' = \dfrac{1}{\cos x}$

34) $y' = 6.\,sen^2\,(2x).\cos\,(2x) + \dfrac{\sec^2\ \ln x}{x}$ **35)** $y' = sen\ \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{2.\sqrt{x}.(x+1)^2}$

36) $f'(t) = 2.t.\text{cotg}\ t.\left(\text{cotg}\ t - \text{cosec}^2\ t\right)$ **37)** $y' = x^x.(\ln x + 1)$

38) $y' = \dfrac{1}{2.\sqrt{1-x^2}.\sqrt{arc\ \ sen\ \ x+1}}$ **39)** $y' = tg^3\,x$ **40)** $y' = x^{senx}.\left(\cos x.\ln x + \dfrac{sen\ \ x}{x}\right) + 1$

41) $y' = \dfrac{\left[x^{2x}.(2\ln x+2) - 3x^2\right].x - \left(x^{2x} - x^3\right).2}{x^3}$ **42)** 0

3.1) **1)** $y_t = 2x$ $y_n = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ **2)** $y_t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $y_n = -2x + 3$

3) $y_t = 4x - 3$ $y_n = -\frac{1}{4}x - 3$ **4)** $y_t = -7x - 5$ $y_n = \frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$

5) $y_t = x$ $y_n = -x + 2$

3.2) **1)** A=(2;5), B=(–2; –11) **2)** C=(1; –2), D=(–1; –4)

3.3) $a = 1$ $b = 10$

3.4) $y = \frac{2}{625}x^2$ $\alpha = 51º20'$

3.5) **a)** A=(1;1) **b):** $x = -3$; $x = -1$; $x = \frac{3}{4}$

4.1) **a)** v(2) = 30m / seg **b)** 5 seg **c)** 145 m

5.1) **1)** $C\nearrow$ =: $(2;+\infty)$, $C\searrow$ = $(-\infty;2)$

2) $C\nearrow$ =: $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$ $C\searrow$ = $\left(-\frac{1}{3};1\right)$

3) $C\nearrow$ =: $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$ $C\searrow$ = $(0\,;3)$

5.2) $|k| < 1$ **5.3)** $a = -3$ $b = 7$ **5.4)** $a = 1$, $b = 6$, $x = -\frac{1}{3}$ x mínimo relativo.

6.1) ***1)*** $y''' = -6\ sen\ x - 2x.\cos x$ ***2)*** $y''' = \dfrac{2}{x^3}$ ***3)*** $y^{v} = 32\cos(2x)$

4) $y''' = -\dfrac{8x}{\left(1+x^2\right)^3}$ ***5)*** $y^n = e^x.(x+n$ ***6)*** $y^n = (-1)^{n-1}.\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

8.2) **a)** Rtas.: No presenta asíntotas porque es polinómica.
Máx = (0 ; 1) Mín = (1 ; 0) PI = (1/2 ; 1/2).

b) No presenta asíntotas porque es polinómica.
Máx = (-1 ; 3) Mín = (0 ; 2) Máx = (1 ; 3).
PI = $(-\sqrt{1/3}\ ;\ 23/9)$ *y PI =* $(\sqrt{1/3}\ ;\ 23/9)$

c) x = 2 A.V. ; y = 1 A.H. No presenta ni máximos ni mínimos ya que es decreciente en todos los puntos. No tiene puntos de inflexión. Desde $(-\infty;2)$ es cóncava hacia abajo y desde $(2;+\infty)$ cóncava hacia arriba.

d) x = 0 A.V. ; no presenta A.H. Mín = (1;3/2). PI = $\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$

e) $x=-1 ; x=1$ A.V. $y=0$ A.H.
Máx = (0 ; -1). No posee P.I.

9.1) **a)** *10 y 10* **b)** *10 y 10* **c)** *8 y 12*

9.2) $x = 30\ m \ \wedge\ y = 10\ m$ $C_{mín} = 12000\$$

9.3) *x = 2,4m y = 3,2m*

9.4) $x = \frac{3}{2} \ \wedge\ y = 2$, $A_{Máx} = 3$

9.5) $x = \pm 2\sqrt{3} \ \wedge\ y = 24$

9.6) *128* dm^3

9.7) R: *2,73cm*. h: *5,86cm*

9.8) Costo mínimo *$2 400 000*

9.9) Hay que desembarcar a *8Km* de B

9.10) El cable debe fijarse a *9m* del poste de *12m*

9.11) El más cercano es el punto *A=(1;1),*

10.1)

1) $\frac{1}{2}$	**2)** *1*	**3)** *2*	**4)** *0*
5) 2	**6)** $\frac{a}{b}$	**7)** $\frac{1}{7}$	**8)** $-\frac{3}{2}$
9) -3	**10)** *0*	**11)** $-\infty$	**12)** *2*
13) $-\frac{4}{\pi^2}$	**14)** $\frac{1}{3}$	**15)** $\frac{1}{3}$	
16) *2*	**17)** $\frac{1}{2}$		

TRABAJO PRACTICO Nº3: Integrales y sus Aplicaciones.

Isaac Newton

Fuente: www.mat.usach.cl/histmat/html/dale.html

Sir **Isaac Newton**, (4 de enero de 1643, Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra – 31 de marzo, 1727 Kensington, Londres, Inglaterra) fue un científico, físico, filósofo, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en el Opticks) y el desarrollo del cálculo matemático.

Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la Revolución científica.

Entre sus hallazgos científicos se encuentran los siguientes: el descubrimiento de que el espectro de color que se observa cuando la luz blanca pasa por un prisma es inherente a esa luz, en lugar de provenir del prisma (como había sido postulado por Roger Bacon en el siglo XIII); su argumentación sobre la posibilidad de que la luz estuviera compuesta por partículas; su desarrollo de una ley de conducción térmica, que describe la tasa de enfriamiento de los objetos expuestos al aire; sus estudios sobre la velocidad del sonido en el aire; y su propuesta de una teoría sobre el origen de las estrellas.

Newton comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de las matemáticas, desarrollando el teorema del binomio. El matemático y físico matemático Joseph Louis Lagrange (1736–1813), dijo que *"Newton fue el más grande genio que ha existido y también el más afortunado dado que sólo se puede encontrar una vez un sistema que rija al mundo."*

3.1 - Cálculo de integrales indefinidas

1) Calcular las integrales inmediatas dadas a continuación

a) $\int x^3 \, dx$ b) $\int \sqrt[3]{y} \, dy$ c) $\int \left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ f) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

g) $\int t^2.(t^2-3t+5)\, dt$ h) $\int (1-2x)(2+3x)\, dx$ i) $\int \left(\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{x}}\right) dx$

j) $\int \frac{2}{3} e^{3x-1} \, dx$ k) $\int \frac{4}{e^{2x-1}} \, dx$ l) $\int \frac{2}{5}\, sen(3x-5)\, dx$

m) $\int \frac{(3x-\cos(2x-3))}{\sqrt{2}} dx$ n) $\int \frac{1-x^5}{x-1} dx$ ñ) $\int \left(5senx - \frac{3}{cos^2 x}\right) dx$

o) $\int \frac{1+x^4}{\sqrt{x}} dx$ p) $\int \frac{2x}{(1+x^2)} dx$ q) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx$

$r)\int \frac{(-2x+3)^3}{x}dx$ $\quad s)\int \frac{4}{(x-2)^3}dx$ $\quad t)\int \frac{x+3}{x+1}dx$

$u)\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}{\sqrt{x}}dx \quad a\geq 0$ $\quad v)\int \frac{x-3}{x^2-6x+4}dx$ $\quad w)\int \frac{ln(x+2)}{x+2}dx$

$x)\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

2) Método de integración de funciones por sustitución.

Ejemplo: Calcular la siguiente integral $\int senx.cosx\,dx$

Si consideramos que $u = senx$ entonces será: $du = cosx\,dx$

Realizamos estas sustituciones en la integral a resolver

$$\int senx.cosx\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{sen^2x}{2} + C$$

Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de sustitución.

$a)\int (2x+1)^2\,dx$ $\quad b)\int \sqrt[3]{5x-2}\,dx$ $\quad c)\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$

$d)\int x^2.(1-x^3)^5$ $\quad e)\int \frac{dx}{1-4x}$ $\quad f)\int e^{2x+3}\,dx$

$g)\int cosx\,.sen^3x\,dx$ $\quad h)\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $\quad i)\int \frac{dx}{x.\ln^2x}$

$j)\int \frac{e^{\sqrt{x}}-3}{\sqrt{x}}dx$ $\quad k)\int \frac{dx}{x.(ln2x)^3}dx$ $\quad l)\int e^x\frac{sene^x}{cose^x}dx$

$m)\int -3.cos^5x.senx\,dx$ $\quad n)\int tg^3x\,.\,sec^2x\,dx$ $\quad ñ)\int \frac{1}{2}x.\sqrt{x^2+4}\,dx$

$o)\int \frac{-2x^5+4x^2}{\sqrt{x^6-4x^3-5}}dx$ $\quad p)\int \frac{-3-senx}{e^{6x-2cosx}}dx$ $\quad q)\int \frac{cosx}{\sqrt[3]{senx+10}}dx$

$r)\int 4^{2-3x}\,dx$ $\quad s)\int \frac{x^2}{(1+x^6)}dx$ $\quad t)\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{}dx$

$u)\int x^2.e^{x^3}\,dx$ $\quad v)\int \frac{\sqrt[4]{ln(x+2)}}{x+2}dx$ $\quad w)\int \frac{x^2}{2+2x^3}dx$

3) Método de integración de funciones por partes.

Ejemplo: Calcular la siguiente integral $\int x.\sqrt{1-x}\,dx$

consideramos dentro de la integral las partes $\begin{cases} u = x \\ dv = \sqrt{1-x}dx \end{cases}$

para poder aplicar la expresión $\int u.dv = u.v - \int v.du$

realizamos el cálculo y obtenemos $\begin{cases} du = 1.dx \\ v = \int \sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \end{cases}$

en este ejemplo resulta entonces:

$$\int x.\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{3}x.(1-x)^{3/2} - \int -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx = -\frac{2}{3}x.(1-x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1-x)^{5/2} + C$$

Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de partes

$a)\int x.e^{2x}\,dx$ $\quad b)\int x^2.\ln x\,dx$ $\quad c)\int \ln x\,dx$

$d)\int arctgx\,dx$ $\quad e)\int x^2.senx\,dx$ $\quad f)\int senx\,.\,e^x\,dx$

$g)\int x.senx\,dx$ $\quad h)\int x.cosx\,dx$ $\quad i)\int x^2.e^{-3x}\,dx$

$j)\int e^{2x}.cosx\,dx$ $\quad k)\int \frac{1}{2}\sqrt{z}.\ln 2z\,dz$ $\quad l)\int x.cosec^2x\,dx$

$m)\int x^4.\ln x\,dx$ $\quad n)\int (y+1)sen2y\,dy$ $\quad ñ)\int arcsenx\,dx$

$o)\int sen^2x\,dx$ $\quad p)\int cos^2x\,dx$ $\quad q)\int e^{2x-1}.cos2x\,dx$

$r)\int sen3x.cos2x\,dx$ $\quad s)\int (3x-1).\sqrt{2x+3}\,dx$ $\quad t)\int (1+\sqrt{x}).\ln x\,dx$

$u)\int \sqrt{x}.(1-2x)^2\,dx$

3.2 - Cálculo de integrales definidas

1) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de las siguientes funciones y el eje x

$a)\ y = x^2 \quad 0 \le x \le 1$ $\quad b)\ y = x^3 \quad 0 \le x \le 2$ $\quad c)\ y = senx \quad 0 \le x \le \pi$

$d)\ y = -x^2 + 4$ $\quad e)\ y = x + 2 \quad 1 \le x \le 3$ $\quad f)\ y = x^3 - 3x^2 + 2x$

$g)\ y = x^3 - 3x^2 - 18x$ $\quad h)\int x.cosx\,dx$ $\quad i)\int x^2.e^{-3x}\,dx$

Ejemplo: $d)\ y = -x^2 + 4$

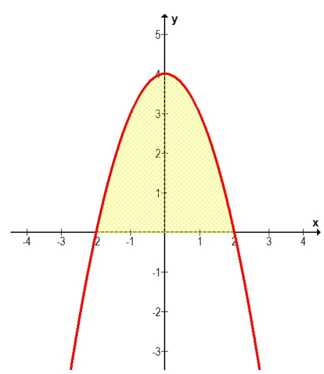
Primero calculamos las raíces de la función:

$0 = -x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2$

Luego el área entre esos valores:

$$A = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 4x\Big]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4\cdot 2\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4\cdot(-2)\right) = \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{32}{3}$$



2) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de dos o más funciones

$a)\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} y = senx \\ y = cosx \\ x = 0 \end{cases}$ $\quad c)\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ y = 0{,}5x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 5 \\ y = -x + 3 \\ y = 0{,}5x + 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x^2 \end{cases}$ f) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 0 \\ -x + 6 & x > 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = -2x^2 + 8 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y = 6 \\ y = -x^2 + 4 \\ y = -x + 2 \\ eje\ y \end{cases}$ i) $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases}$

j) La gráfica de $y = x^3$ y la de su función derivada.

k) La gráfica de la función $y = 1 + 2x - x^2$ y la recta que pasa por $A = (-1; -2)$ y $B = (2; 1)$.

l) La gráfica de la función $2y = x^2$, su recta tangente en $x_0 = 2$ y el eje x.

m) La gráfica de la función $y = -x^2$, su recta tangente en $x_0 = 1$ y el eje de ordenadas.

n) La gráfica de la función $y = -x^3 + 1$, la recta normal en $x_0 = -1$ y el eje x.

ñ) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 2$, la recta tangente a ésta en $x_0 = 3$, y los ejes coordenados.

Ejemplo:

n) Primero buscamos la ecuación de la recta normal.

$y' = -3x^2 \Rightarrow m_t = -3 \Rightarrow m_n = 1/3$

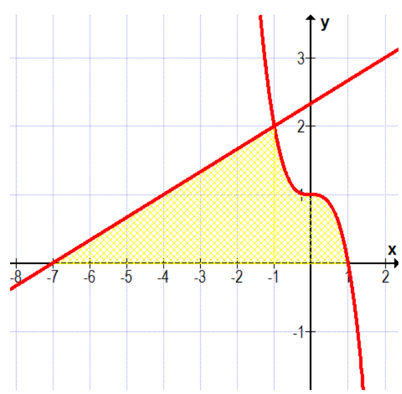
Sabemos que tanto la función como la recta normal pasan por el punto $(-1; 2)$, por lo tanto

$y = \frac{1}{3}x + b \Rightarrow 2 = \frac{1}{3}(-1) + b \Rightarrow b = \frac{7}{3}$

La ecuación de la recta normal es $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ que interseca al eje x en $x = -7$.

La función interseca al eje x en $x = 1$.

Para calcular el área de la región la dividiremos en dos partes:



$$A = \int_{-7}^{-1} \left(\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}\right) dx + \int_{-1}^{1} (-x^3 + 1)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{6} + \frac{7}{3}x\right]_{-7}^{-1}\Bigg) + \left(-\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{1}\Bigg) = 6 + 2 = 8$$

3) Resolver los siguientes problemas

a) Dadas $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = -ax^2 + 16a + 32$ determinar $a > 0$ para que el área de la región limitada por las gráficas de f y g sea de 180 unidades cuadradas.

b) Hallar el área plana limitada por la gráfica de $f(x) = 2x^2 - x^4$ y la recta que pasa por $(a; f(a))$ y $(b; f(b))$ si $f(a)$ y $f(b)$ son los valores máximos de f.

c) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 3$ y la recta que pasa por $(a; f(a))$ y $(b; f(b))$ si $f(a)$ y $f(b)$ son los valores máximo y mínimo de f.

d) Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & si\ x < -1 \\ -x^2 + 3 & si\ x \geq -1 \end{cases}$, hallar el área de la región limitada por $f(x)$ y la recta $y = 2$.

e) Hallar k para que

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx = 1 \quad si \quad f(x) = \begin{cases} x & -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2} - kx & 0 < x \leq 4 \\ x - 4 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

f) Obtener los extremos de $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Graficar aproximadamente calculando extremos, ceros y ordenada al origen. Determinar el área de la región limitada por la curva y la recta $y = x + 2$.

g) Dada $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & si\ x < 1 \\ x^2 + x & si\ x \geq 1 \end{cases}$, hallar el área de la región limitada por las curvas.

TABLA DE INTEGRALES

$\int dx = x + C$	$\int k.dx = k\ x + C$
$\int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx$	$\int [f(x) \pm g(x)].dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$
$\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$	$\int \frac{1}{x}.dx = ln\lvert x\rvert + C$
$\int sen\ x.dx = -cos\ x + C$	$\int cos\ x.dx = sen\ x + C$
$\int e^x.dx = e^x + C$	$\int a^x.dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C$
$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \int sec^2 x\, dx = tg\ x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}.dx = ln\ \lvert f(x)\rvert + C$
$\int [f(x)]^n.f'(x).dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$	$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = arc\ tg\ x + C$
$\int \sqrt{x^2 - 1}.dx = \frac{x.\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} arc\ sen\ x + C$	

Respuestas

3.1 Integrales Indefinidas

1)

$a)\ \frac{x^4}{4}+C$ $\quad b)\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{y^4}+C$ $\quad c)\ x-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{x^2}{2}+C$

$d)\ 2\sqrt{x}+C$ $\quad e)\ \frac{-2}{\sqrt{x}}+C$ $\quad f)\ \frac{2}{3}x.\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

$g)\ \frac{1}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3+C$ $\quad h)\ x.\left(-2x^2-\frac{1}{2}x+2\right)+C$ $\quad i)\ \frac{2}{3}x.\sqrt{x}+2\sqrt{2}.x+4\sqrt{x}+C$

$j)\ \frac{2}{9}e^{3x-1}+C$ $\quad k)\ -2e^{-2x+1}+C$ $\quad l)\ -\frac{2}{15}cos(3x-5)+C$

$m)\ \frac{1}{2\sqrt{2}}.\left(3x^2-sen(2x-3)\right)+C$ $\quad n)\ -\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+C$ $\quad ñ)\ -5.cosx-3tgx+C$

$o)\ 2\sqrt{x}+\frac{2}{5}x^2.\sqrt{x}+C$ $\quad p)\ ln\ (1+x^2)+C$ $\quad q)\ ln|x^2+x+4|+C$

$r)\ -\frac{8}{3}x^3+18x^2-54x+27ln|x|+C$ $\quad s)\ \frac{-2}{(x-2)^2}+C$ $\quad t)\ x+2ln|x+1|+C$

$u)\ \frac{2}{3}x^{3/2}+2\sqrt{a}\,x+2a\sqrt{x}+C$ $\quad v)\ ln|x^2-6x+4|+C$ $\quad w)\ \frac{1}{2}ln^2|x+2|+C$

$x)\ \frac{1}{2}arcsen2x+C$

2)

$a)\ \frac{1}{6}.(2x+1)^3+C$ $\quad b)\ \frac{3}{20}.\sqrt[3]{(5x-2)^4}+C$ $\quad c)\ -\sqrt{1-2x}+C$

$d)\ -\frac{1}{18}(1-x^3)^6+C$ $\quad e)\ -\frac{1}{4}ln|1-4x|+C$ $\quad f)\ \frac{1}{2}.e^{2x+3}$

$g)\ \frac{1}{4}.sen^4x+C$ $\quad h)\ -e^{\frac{1}{x}}+C$ $\quad i)\ -\frac{1}{lnx}+C$

$j)\ 2e^{\sqrt{x}}-6\sqrt{x}+C$ $\quad k)\ \frac{-1}{2.ln^2(2x)}+C$ $\quad l)\ -ln\,cose^x$

$m)\ \frac{1}{2}.cos^6x+c$ $\quad n)\ \frac{1}{4}.tg^4x+C$ $\quad ñ)\ \frac{1}{6}.\sqrt{(x^2+4)^3}+C$

$o)\ -\frac{2}{3}.\sqrt{x^6-4x^3-5}+C$ $\quad p)\ \frac{1}{2}.e^{-6x+2cosx}+C$ $\quad q)\ \frac{3}{2}.\sqrt[3]{(senx+10)^2}+C$

$r)\ \frac{-4^{2-3x}}{3.ln4}+C$ $\quad s)\ \frac{1}{3}.arctg\ x^3+C$ $\quad t)\ \frac{1}{2}.e^{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}+C$

$u)\ \frac{1}{3}.e^{x^3}+C$ $\quad v)\ \frac{4}{5}.\sqrt[4]{ln^5(x+2)}+C$ $\quad w)\ \frac{1}{6}.ln(2+2x^3)+C$

3)

$a)\ \frac{1}{2}e^{2x}.\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ $\quad b)\ \frac{1}{3}.x^3lnx-\frac{1}{9}.x^3+C$ - $\quad c)\ x.(lnx-1)+C$

$d)\ x.arctgx-\frac{1}{2}.ln(1+x^2)+C$ $\quad e)\ -x^2.cosx+2x.senx+2cosx+C$ $\quad f)\ \frac{1}{2}.e^x.(senx-cosx)+C$

$g)\ -x.cosx+senx+C$ $\quad h)\ x.senx+cosx+C$ $\quad i)\ -\frac{1}{3}.e^{-3x}.\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)+C$

$j)\ \frac{e^{2x}}{5}.(senx+2cosx)+C$ $\quad k)\ \frac{1}{3}\sqrt{z^3}\left(ln2z-\frac{2}{3}\right)+C$ $\quad l)\ -x.cotgx+ln|senx|+C$

$m)\ \frac{x^5}{5}.\ln x - \frac{x^5}{25} + C$

$n)\ -\frac{y}{2}.\cos 2y + \frac{1}{4}.\operatorname{sen} 2y - \frac{\cos 2y}{2} + C$

$ñ)\ x.\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

$o)\ \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\ .\cos x) + C$

$p)\ \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x\ .\cos x) + C$

$q)\ \frac{1}{4}.e^{2x-1}.(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x) + C$

$r)\ -\frac{1}{5}(2\operatorname{sen} 3x.\operatorname{sen} 2x + 3\cos 3x.\cos 2x) + C$

$s)\ \frac{2}{3}.x.\sqrt{(2x+3)^3} - \frac{4}{15}.\sqrt{(2x+3)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C$

$t)\ x.\ln x - x + \frac{2}{3}.\sqrt{x^3}.\ln x - \frac{4}{9}.\sqrt{x^3} + C$

$u)\ 2x.\sqrt{x}.\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}x + \frac{4}{7}x^2\right) + C$

3.2 Integrales Definidas

1)

$a)\ A = \frac{1}{3}$ $\quad b)\ A = 4$ $\quad c)\ A = 2$

$d)\ A = \frac{32}{3}$ $\quad e)\ A = 8$ $\quad f)\ A = \frac{1}{2}$

$g)\ A - \frac{999}{4}$

2)

$a)\ A = \frac{9}{2}$ $\quad b)\ A = \sqrt{2} - 1$ $\quad c)\ A = 4$

$d)\ A = 6$ $\quad e)\ A = \frac{8}{3}$ $\quad f)\ A = \frac{32}{3}$

$g)\ A = \frac{32}{3}$ $\quad h)\ A = \frac{41}{6}$ $\quad i)\ A = \frac{16}{3}$

$j)\ A = \frac{27}{4}$ $\quad k)\ A = \frac{9}{2}$ $\quad l)\ A = \frac{1}{3}$

$m)\ A = \frac{1}{3}$ $\quad n)\ A = \frac{29}{4}$ $\quad ñ)\ A = \frac{23}{8}$

3)

$a)\ a = \frac{7}{64}$ $\quad b)\ A = \frac{16}{15}$ $\quad c)\ A = \frac{1}{2}$

$d)\ A = \frac{8}{3}$ $\quad e)\ k = \frac{1}{8}$ $\quad f)\ A = \frac{27}{4}$

$g)\ A = \frac{4}{3}$