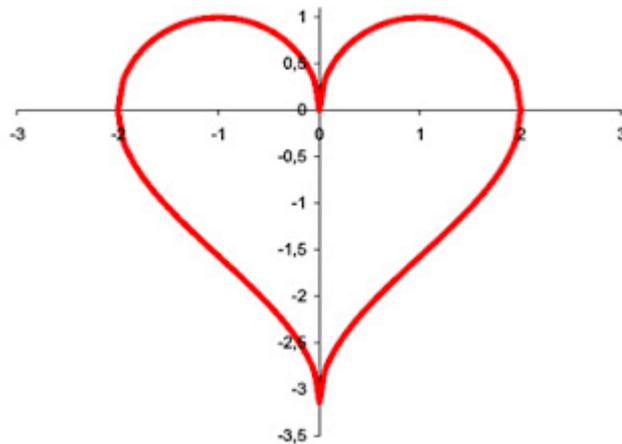




Colegio Nacional de Buenos Aires

# **MATEMÁTICA DE 3er AÑO**

## **Guía de Trabajos Prácticos**



**2024**

# **PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA TERCER AÑO 2024**

## **Unidad 1: Funciones. Generalidades.**

Definición de función. Gráficos. Conjunto Imagen. Intersecciones con los ejes. Paridad.

## **Unidad 2: Función lineal.**

Función lineal. Ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. Intersección de rectas. Problemas. Funciones lineales definidas por tramos. Función módulo.

## **Unidad 3: Función cuadrática.**

Función cuadrática. Traslaciones y simetrías. Raíces. Ecuación de segundo grado. Movimientos. Intersección de parábola con recta.

## **Unidad 4: Las funciones polinómicas.**

Ceros de una función polinómica. Multiplicidad de las raíces. Clasificación de funciones. La función biyectiva y su inversa.

Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini, Teorema del resto. Divisibilidad. Resolución de ecuaciones. Teorema de Gauss. Descomposición factorial de un polinomio. Clasificación. Movimientos. Representación aproximada de funciones polinómicas a partir de ceros, intervalos de positividad y negatividad.

## **Unidad 5: Las funciones racionales e irracionales**

Función racional. Función homográfica. Operaciones con expresiones algebraicas racionales. Ecuaciones. Problemas. Funciones irracionales. Problemas.

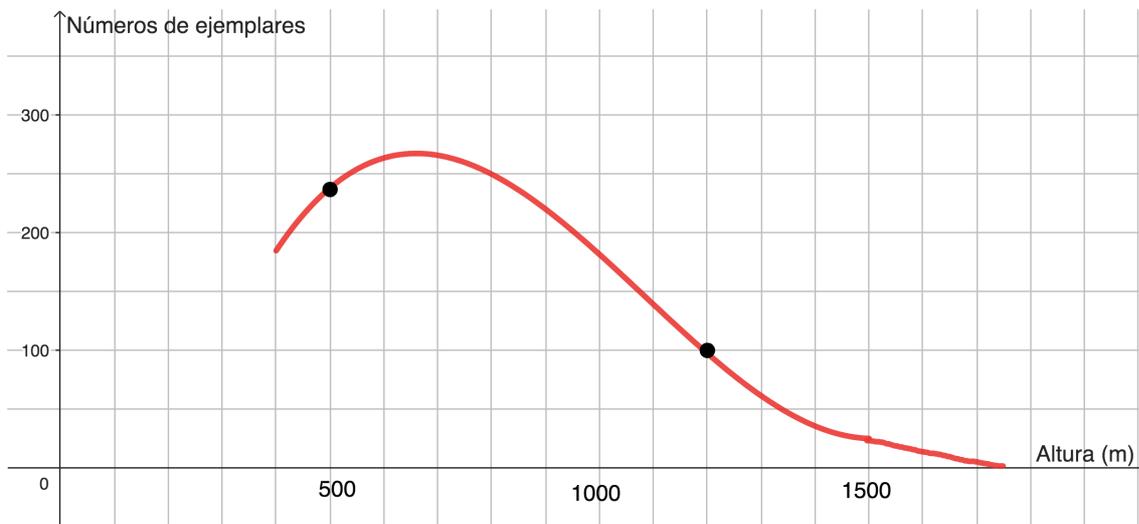
## **Unidad 6: Álgebra de funciones.**

Igualdad de funciones. Suma, producto, cociente de funciones. Composición de funciones.

# Unidad 1: Funciones. Generalidades.

## Definición de función y gráficos

1) En un campo hay un tipo de flor que aparece con frecuencia. Se ha estudiado la cantidad media aproximada de ejemplares que hay por hectárea a distintas alturas. La siguiente gráfica muestra dicha información:



- a) ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuál es la variable independiente?  
¿Y la dependiente?
- b) En la gráfica se observa que la curva contiene al punto (500; 225), es decir a 500m de altura hay 225 ejemplares de la flor por hectárea. ¿Qué significa que la gráfica contenga al punto (1200; 100)?
- c) ¿A qué altura hay aproximadamente 200 ejemplares por hectárea?
- d) ¿Cuántos ejemplares se espera que haya a 2000m?
- e) ¿Qué sucede con los ejemplares de la flor a medida que aumenta la altura del terreno? ¿Por qué?
- f) ¿El campo estudiado, se encuentra por encima de los 200m sobre el nivel del mar? ¿Por qué?

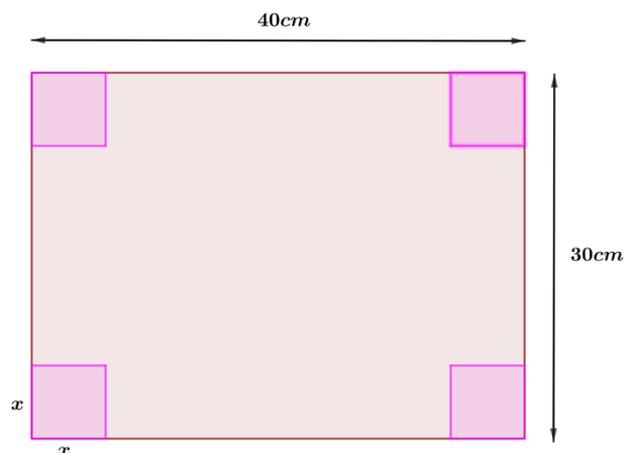
2) La siguiente tabla muestra la distancia recorrida por una bolita, que se deja caer en una pequeña rampa de madera.

Tiempo (en s)	Recorrido (en cm)
0.5	3
1	10
1.5	24
2	40
2.5	65
3	90
3.5	120
4	160
4.5	200
5	250

- ¿Cuáles son las variables de este problema? ¿Cuál es la independiente y cuál la dependiente?
- Teniendo en cuenta el tipo de variable que es el tiempo y con los datos de la tabla armar un gráfico aproximado de la situación.

3) A partir de un cartón de forma rectangular de  $40\text{cm}$  por  $30\text{cm}$  se desea construir una caja sin tapa, recortando cuadrados de las esquinas, como indica la imagen.

- Teniendo en cuenta que el lado de los cuadraditos ( $x$ ) debe ser un número entero, ¿cómo se puede decidir, antes de cortar, cuál es el tamaño ideal de los cuadrados para que la caja tenga la mayor capacidad posible?

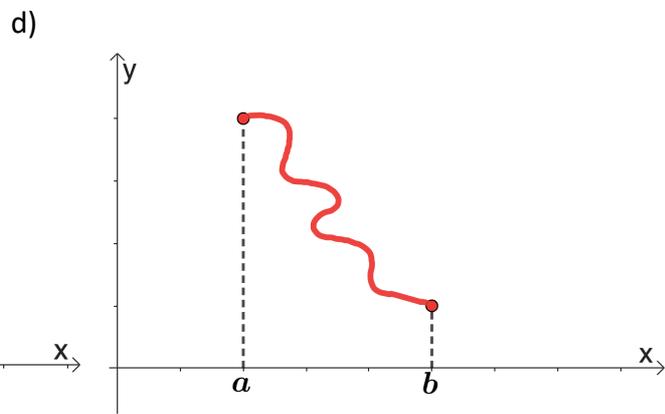
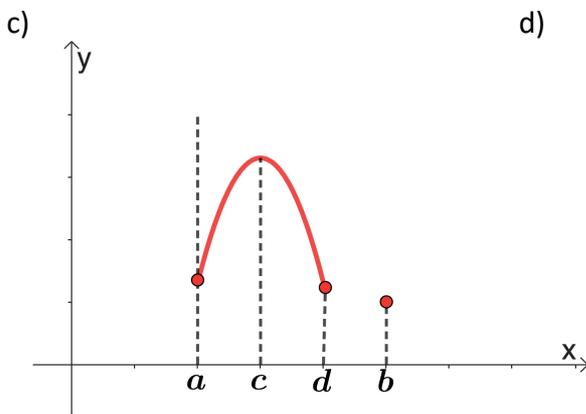
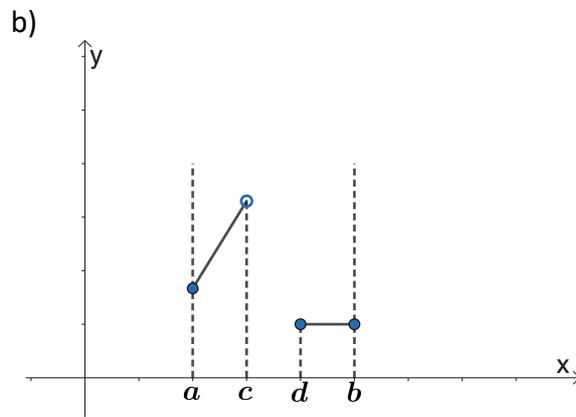
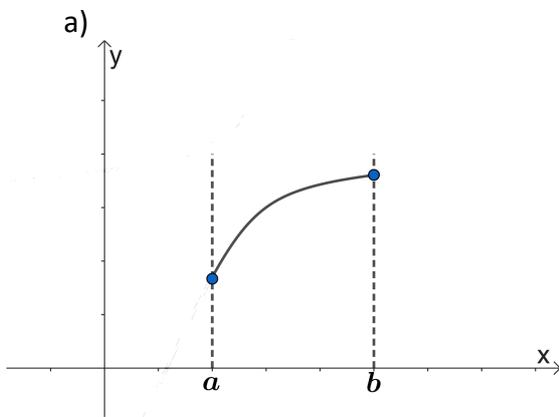


- ¿Es posible modelizar esta situación con una fórmula que facilite los cálculos para decidir la medida del lado  $x$ ?
- ¿Qué valores puede tomar  $x$  para poder armar una caja? ¿Es el mismo tipo de variable que el tiempo? ¿Por qué?

Recordemos que llamamos función a una relación entre dos conjuntos de elementos, que hace corresponder a **todo** elemento del primer conjunto un **único** elemento del segundo conjunto.

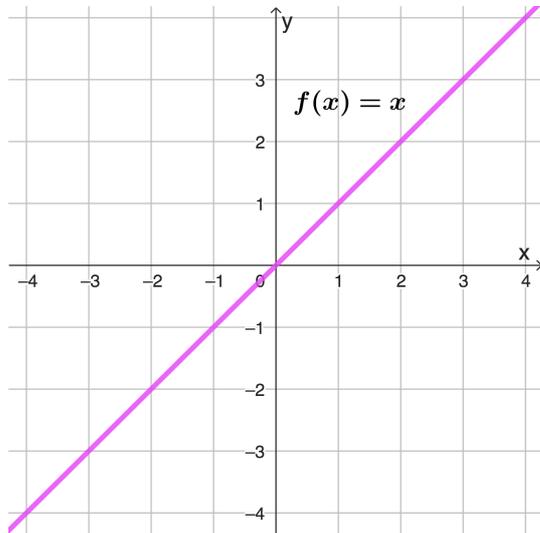
Las funciones pueden expresarse mediante gráficos, tablas, fórmulas ...  
Notamos  $f: A \rightarrow B$ , para indicar su dominio y su codominio.

4) Dadas las relaciones de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , decidir si las mismas son funciones y en cada caso justificar.

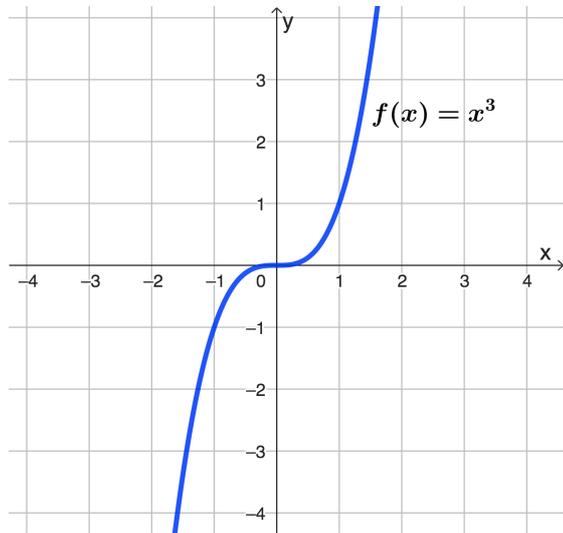


5) Dadas las siguientes relaciones y sus gráficos, decidir si las mismas son funciones de  $A \rightarrow B$ , para cada caso.

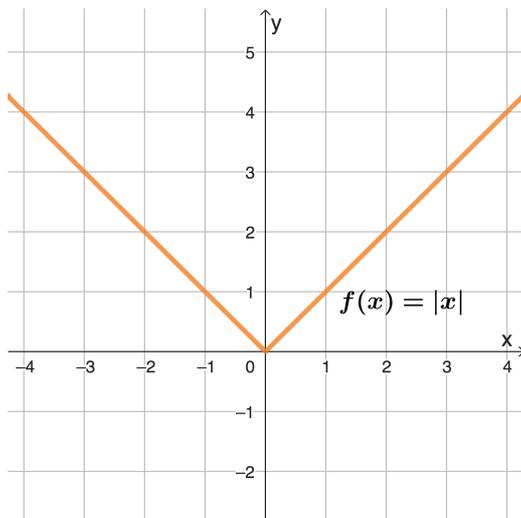
i)



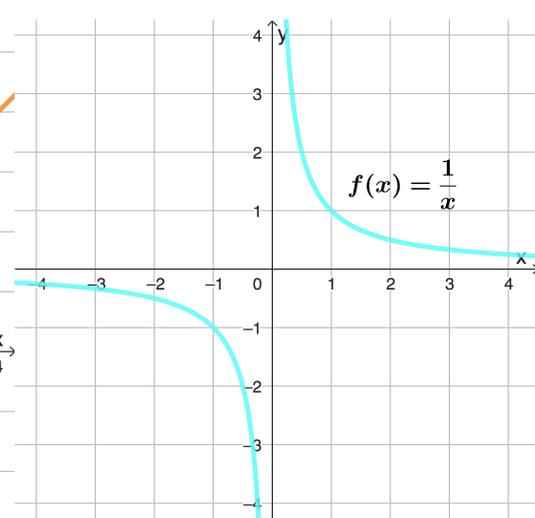
ii)



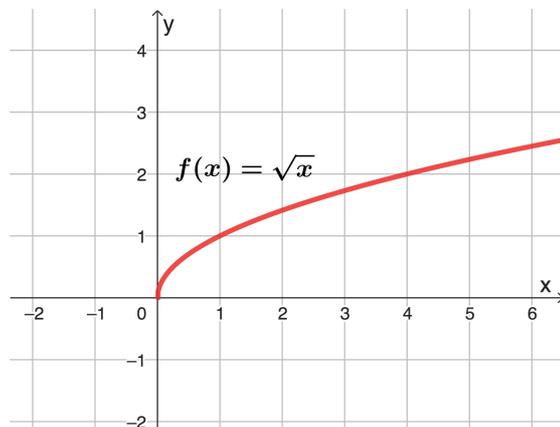
iii)



iv)



v)



a)  $A = \mathbb{R}_0^+$  y  $B = \mathbb{R}$

b)  $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{R}_0^+$

c)  $A = \mathbb{R}_0^+$  y  $B = \mathbb{R}_0^-$

d)  $A = \mathbb{R} - \{0\}$  y  $B = \mathbb{R}$

e)  $A = \mathbb{R}$  y  $B = \mathbb{R}$

f)  $A = \mathbb{R}_0^+$  y  $B = \mathbb{R}_0^+$

## Dominio y Conjunto imagen

6) Observando los gráficos del Ejercicio 5, ¿cuál es el dominio mayorante de cada función? ¿Y su conjunto imagen? ¿Y cuál es el codominio?

7) Hallar el dominio mayorante de las siguientes funciones y expresarlo como intervalo o unión de intervalos.

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{|x+1|-2}}$

b)  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-9)(x+1)}$

c)  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-5}{2-x^2}} + \frac{1}{|x|-\sqrt{3}}$

d)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x^2-9)}$

e)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^2-1}$

f)  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$

## Intersecciones con los ejes

Dada una función  $f: A \rightarrow B$ :

Llamamos **raíces** o **ceros** a las intersecciones con el eje  $x$ , es decir a los valores de  $x \in A$  que verifican  $f(x) = 0$ .

Llamamos **ordenada al origen** a la intersección con el eje  $y$ , es decir al valor de  $y \in B$  que verifica  $f(0) = y$ .

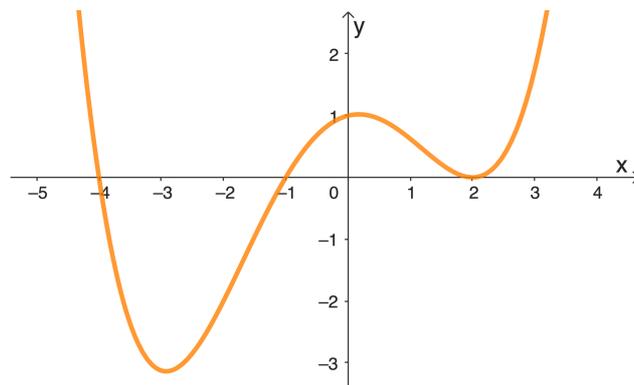
8) Hallar, si existen, las raíces y ordenada al origen de las siguientes funciones:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4$

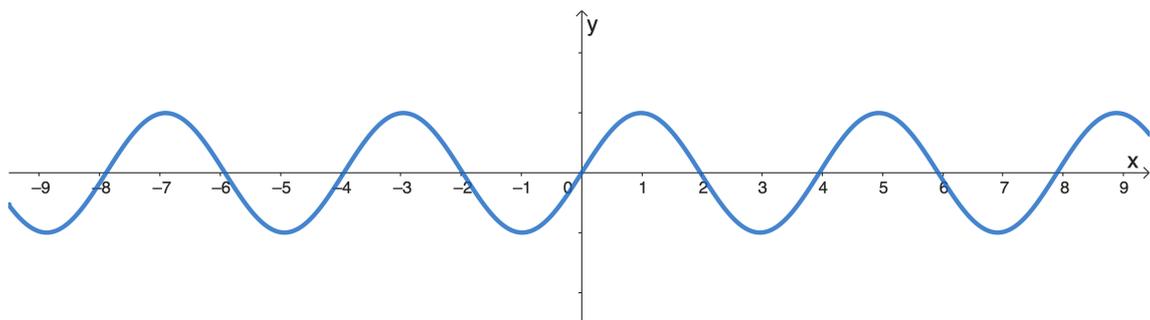
b)  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 4$

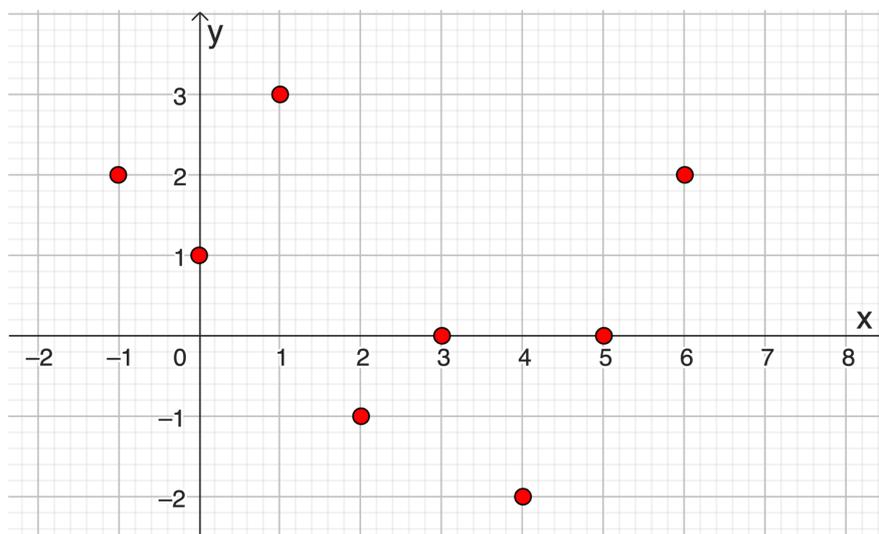
d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



f)  $f: \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$



## Unidad 2: Funciones de variación uniforme – Ecuación de la recta

### Función de variación uniforme. Problemas en contexto. Ecuaciones e inecuaciones lineales.

1) Un barril tiene una capacidad de 100 litros. El barril se encuentra sobre una balanza y al echarle distintas cantidades de un aceite, se puede tomar el peso que registra la misma. Se registró que al echar 10 litros de aceite la balanza marca 36kg y cuando marca 39kg hay 15 litros de aceite.

- a) ¿Es cierto que cuando hay 20 litros de aceite la balanza marcará 42kg?
- b) ¿Qué marcará la balanza al echar 7,5 litros de aceite en el barril?
- c) Completá la siguiente tabla:

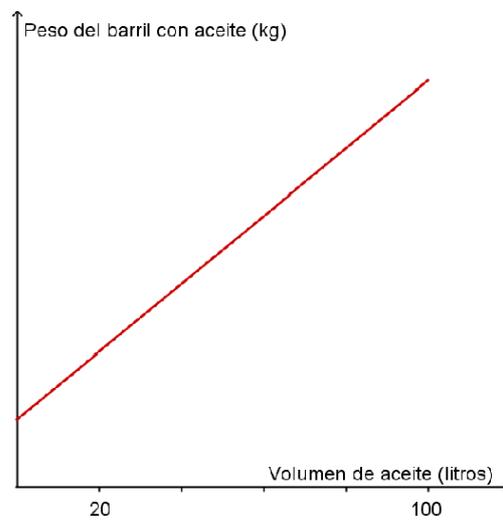
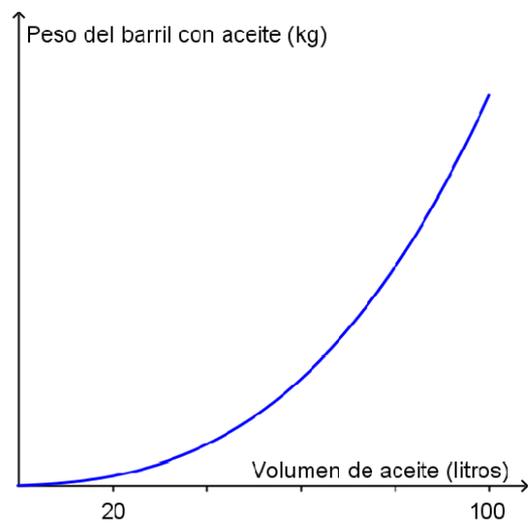
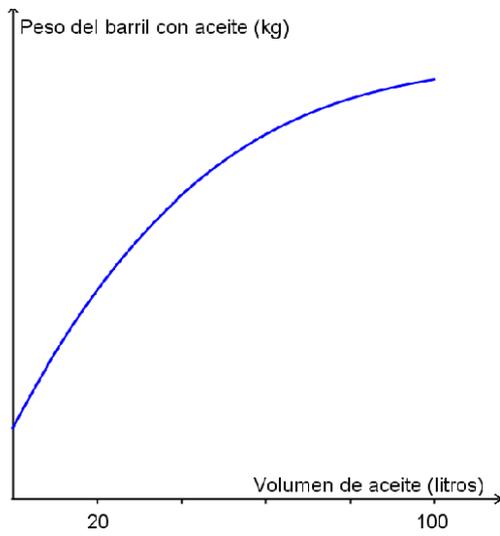
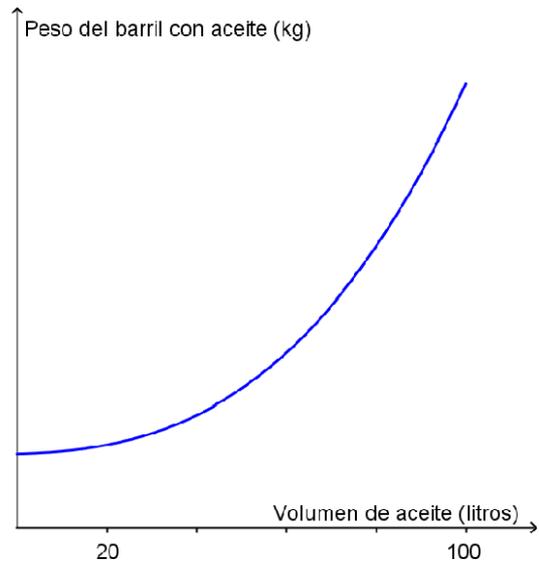
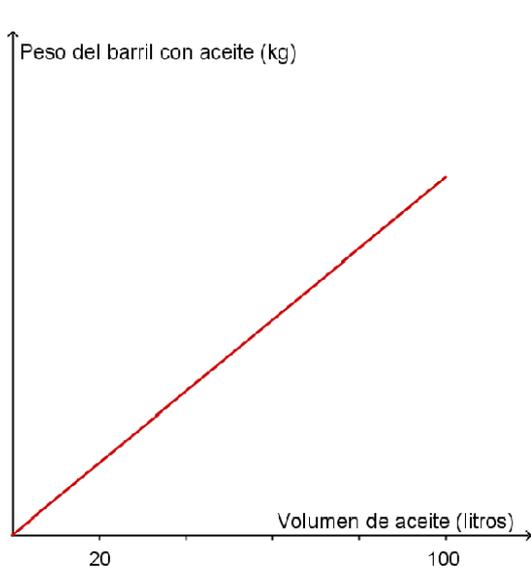
Volumen de aceite (en litros)	Peso del barril con el aceite (en kg)
0	
7,5	
10	36
15	39
17,5	
20	
22	
	48
	55,5
46	

d) Decidí cuáles de estas fórmulas permiten calcular el peso del barril con aceite “P” en función de la cantidad de aceite “x” que contiene.

i.  $P = 30 - 0,6 \cdot x$       ii.  $P = 0,6 \cdot (x - 15) + 39$       iii.  $P = 0,6x$       iv.  $P = 0,6x + 30$

v.  $P = 36 + 0,6 \cdot (x - 10)$

e) Analizá cuál o cuáles de los siguientes gráficos podrían representar el peso del barril a medida que aumenta la cantidad de litros de aceite que hay en el mismo. Justificá.



2) María encendió una vela y a los diez minutos de hacerlo se preguntó cuánto tiempo tardaría en consumirse completamente. Ella sabe que las velas se consumen en forma uniforme; midió la altura de la vela en varios momentos y lo registró en esta tabla.

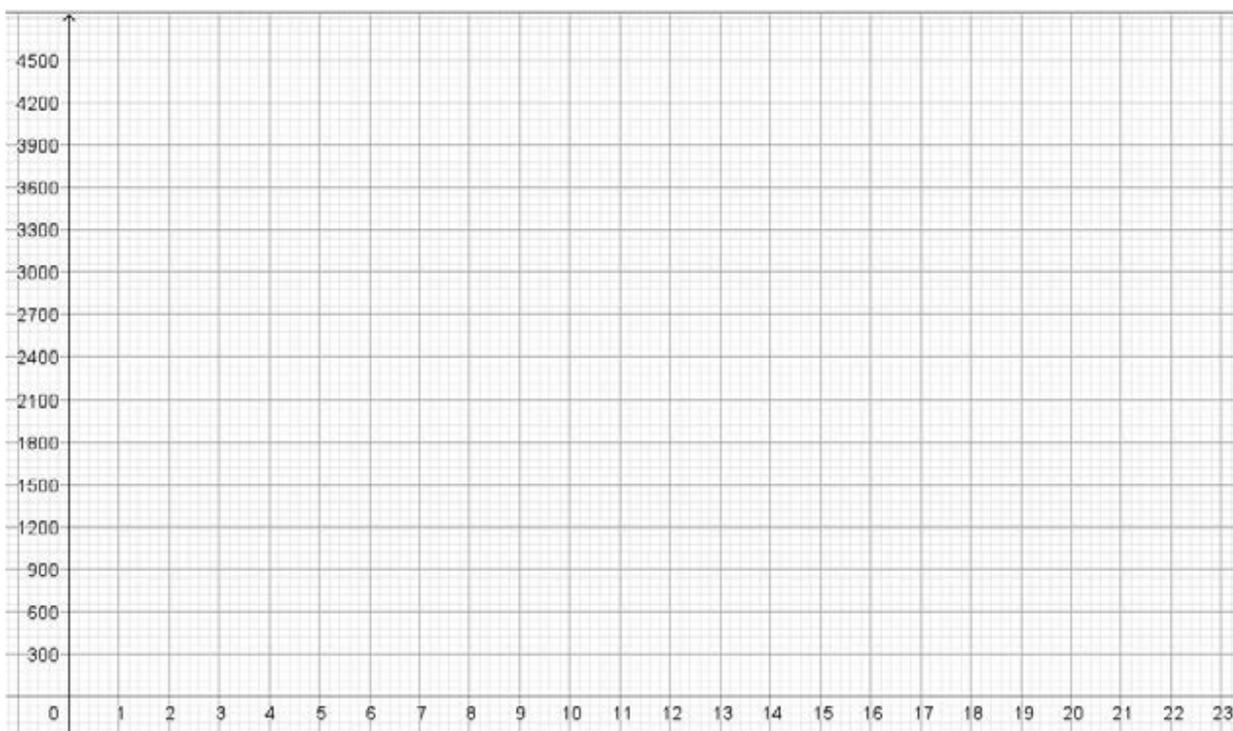
<b>Tiempo desde que María encendió la vela (en minutos)</b>	10	18	34	42
<b>Altura de la vela (en cm)</b>	14	13,2	11,6	10,8

- ¿Es cierto que a los 20 minutos la altura de la vela era de 13 cm?
- ¿Cuál era la altura de la vela a los 30 minutos de haberla encendido?
- ¿Se puede saber cuánto medía la vela en el momento en que María la encendió? ¿Y un minuto después?
- ¿Cómo pudo hacer para saber en cuánto tiempo se iba a consumir la vela?
- Calculá la altura de la vela a los 62,5 minutos. Escribí las cuentas que hacés.
- Proponé una fórmula que permita calcular la altura 'A' de la vela (en cm) cuando pasaron 't' minutos desde que María la encendió. Indicá el dominio e imagen.

3) Para vaciar el tanque de agua de un edificio se compró una bomba que permite hacerlo de manera uniforme en el tiempo. Para estudiar su funcionamiento, se tomaron las siguientes mediciones:

<b>Tiempo de funcionamiento de la bomba (en minutos)</b>	0		11,5	12	14,5	19,5	20,8
<b>Cantidad de agua que hay en el tanque (en litros)</b>		3300		2400	2025	1275	

- Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen su respuesta:
  - La bomba vacía 200 litros por minuto.
  - La bomba vacía 150 litros por minuto.
  - La bomba vacía 1.125 litros cada 7,5 minutos
- Completá la tabla con los valores faltantes.
- Se define la función  $V(t)$  = cantidad de agua que hay en el tanque (en litros) luego de  $t$  minutos de funcionamiento de la bomba. Armá una fórmula para  $V(t)$ .
- En el siguiente sistema de ejes, ubicá los siguientes puntos:  
 (12; 2400)                      (13;2100)                      (10; 2700)

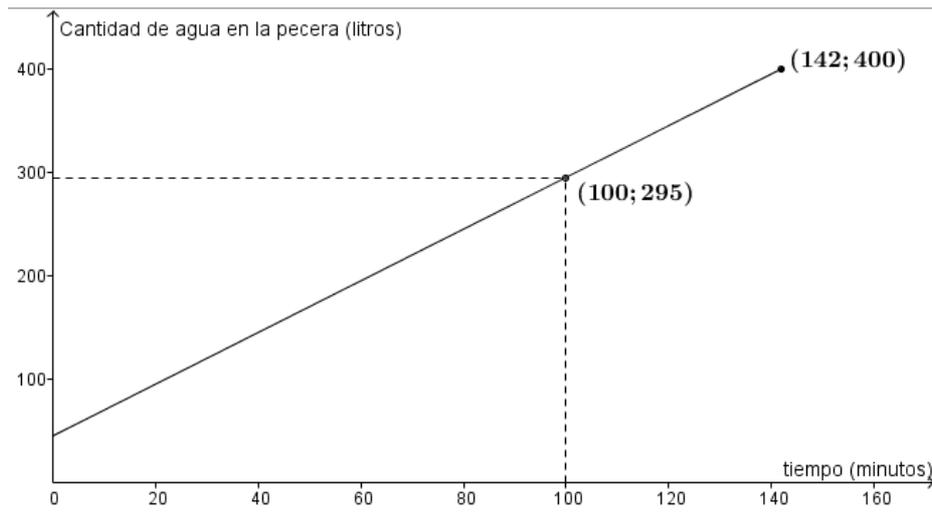


- e) Analizá cada uno de los puntos que ubicaste en el ítem anterior. ¿Representan la cantidad de volumen de agua para el tiempo indicado? Si crees que sí, explicá por qué. Si crees que no, cambia solo una de las coordenadas para que el punto tenga tanto la información del tiempo como la del volumen de agua del tanque en ese tiempo.
- f) A partir de la representación gráfica de la función  $V(t)$  y de la fórmula que armaste en la actividad anterior:
- f<sub>1</sub>) ¿En qué lugar del gráfico se puede leer el momento en que se encendió la bomba? ¿Cuánta agua hay en el tanque en ese momento? Explicá tu respuesta.
  - f<sub>2</sub>) ¿Cómo se puede obtener, usando la fórmula, el volumen de agua que hay en el tanque al encender la bomba?
  - f<sub>3</sub>) ¿Cuánto tarda en vaciarse el tanque? ¿En qué lugar del gráfico se puede ver esta información?
  - f<sub>4</sub>) ¿Cómo se puede obtener, usando la fórmula, el tiempo que tardó en vaciarse el tanque?
  - f<sub>5</sub>) ¿Cuánto tarda la bomba en vaciar la mitad de la pileta? ¿Cómo lo podés ver en el gráfico?

**4)** Para llenar una pecera se utiliza una canilla que arroja agua de manera uniforme.

La pecera tiene una capacidad de 400 litros.

El gráfico muestra la cantidad de agua que tiene la pecera desde que se abre la canilla hasta que se llena la pecera.



a) Completá la tabla de valores

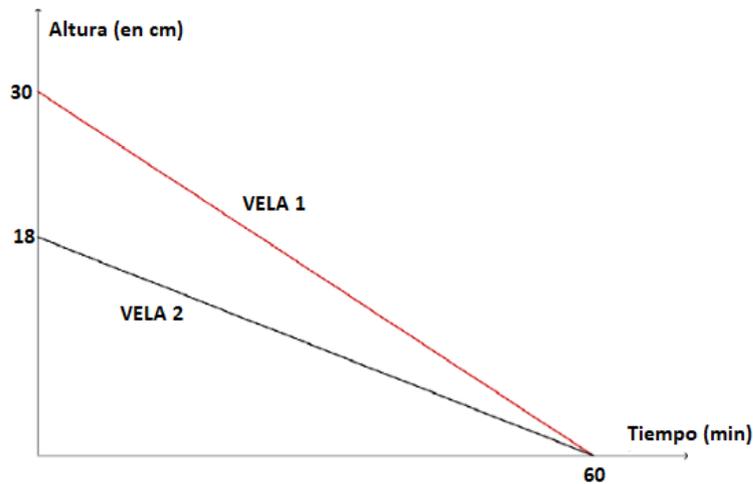
Tiempo (en minutos)	Cantidad de agua en la pecera (en litros)
10	
30	
40	
55	
81	
100	295
	345
	400

b) Proponé una fórmula que permita calcular la cantidad de agua que hay en la pecera en función del tiempo. Escribí el dominio y el conjunto imagen.

c) Graficá la cantidad de agua que le falta a la pecera para llenarse en función del tiempo, desde que se abre la canilla.

d) Proponé una fórmula que permita calcular la cantidad de agua que le falta a la pecera para llenarse en función del tiempo, desde que se abre la canilla. Escribí el dominio y la imagen.

5) El siguiente gráfico muestra la altura de dos velas cilíndricas de diferente diámetro que se encienden simultáneamente en función del tiempo.



a) ¿Qué de los tienen vela 1 de la respuesta en el gráfico.

datos podés extraer gráficos?

b) ¿Cuántos minutos que pasar para que la tenga la altura inicial vela 2? Ubicá la

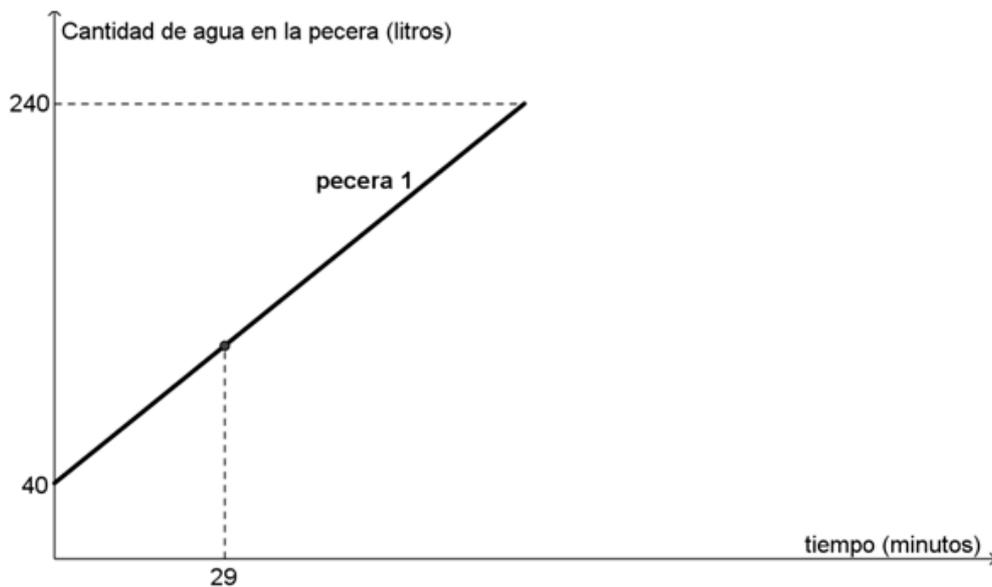
c) Proponé, para cada vela, una fórmula que permita calcular la altura en función del tiempo. Escribí el dominio y el conjunto imagen.

d) ¿Cuántos minutos tienen que pasar para que la vela 1 supere a la vela 2 en 8 cm? Ubicá la respuesta en el gráfico.

6) Dos canillas diferentes se abren juntas para llenar dos peceras idénticas. Cada canilla llena una pecera

La fórmula  $C_2(t) = 1.5t + 69$  permite calcular la cantidad de agua "C<sub>2</sub>" (en litros) que tiene la pecera 2 cuando pasaron "t" minutos desde que se abrió la canilla 2.

A los 29 minutos desde que se abren las canillas, las dos peceras tienen la misma cantidad de agua.



a) ¿Qué datos aporta el gráfico de la cantidad de agua de la pecera 1 en función del tiempo?

b) ¿Qué cantidad de agua tendrá la pecera 1 a los 29 minutos de abrir la canilla? Ubicá la respuesta en el gráfico.

- c) ¿Cuánto tardará en llenarse la pecera 1? Ubicar la respuesta en el gráfico.  
 d) Proponé una fórmula que permita calcular la cantidad de agua que hay en la pecera 1 en función del tiempo. Escriban el dominio.  
 e) Graficá en el mismo sistema de ejes cartesianos, la cantidad de agua que hay en la pecera 2 en función del tiempo.

**7)** Dos velas se encienden simultáneamente y se terminan de derretir en el mismo momento. Cada una de ellas se consume en forma uniforme. La expresión  $V_1(t) = 60 - 4,8 \cdot t$  permite calcular la altura “ $V_1$ ” de la vela 1 en función del tiempo “ $t$ ” (en minutos). Cuando pasaron 10 minutos, la vela 2 tenía 3 cm menos que la vela 1.

a) Completá la tabla.

Tiempo (minutos)	Altura de la vela 1 (cm)	Altura de la vela 2 (cm)
0		
5		
10		
		0

- b) Proponé una fórmula que permita calcular la altura de la vela 2 ‘ $V_2$ ’ en función del tiempo ‘ $t$ ’. Indicá el dominio e imagen.  
 c) Graficá la altura de la vela 1 en función del tiempo.

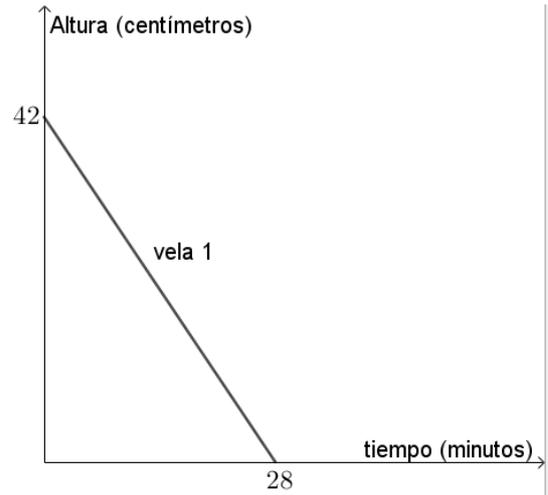
**8)** Se muestra un cuadro tarifario de dos empresas distribuidoras de energía eléctrica que cobran un cargo fijo y un valor por Kwh consumido.

Consumo (Kwh)	Empresa A Importe (\$)	Empresa B Importe(\$)
82	260	
100		308
190	530	
240		630

- a) Completar el cuadro tarifario.  
 b) ¿Qué empresa es más conveniente?

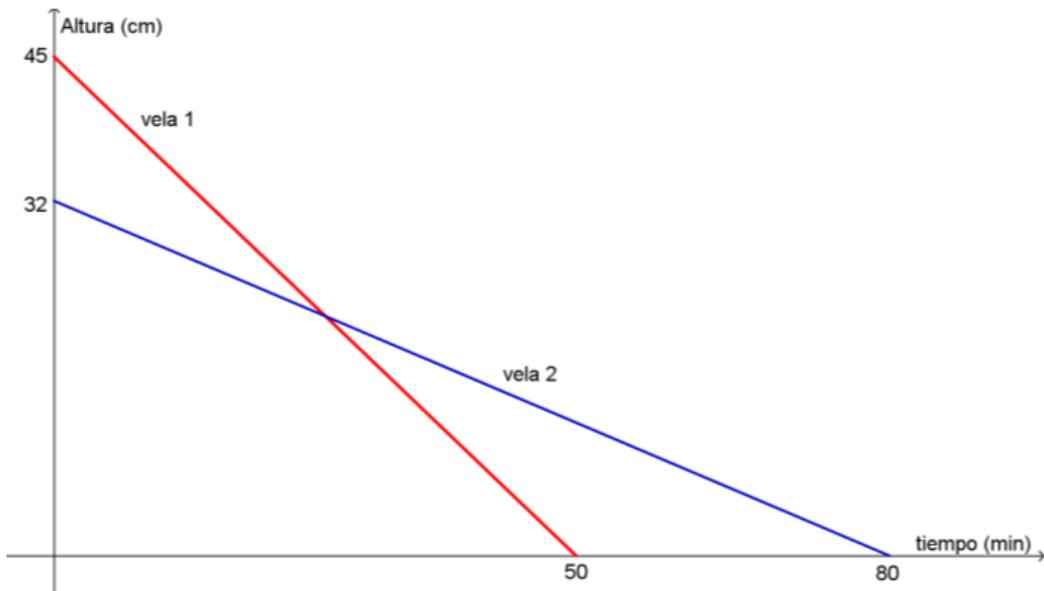
**9)** El gráfico representa la altura de la vela 1 en función del tiempo.

La vela 2 se enciende en el mismo momento que la vela 1 y se derrite de manera uniforme.  
 Una de las velas pierde 0,5 cm por minuto.  
 En el instante en que la vela 1 se derrite completamente, la vela 2 mide 10 cm.

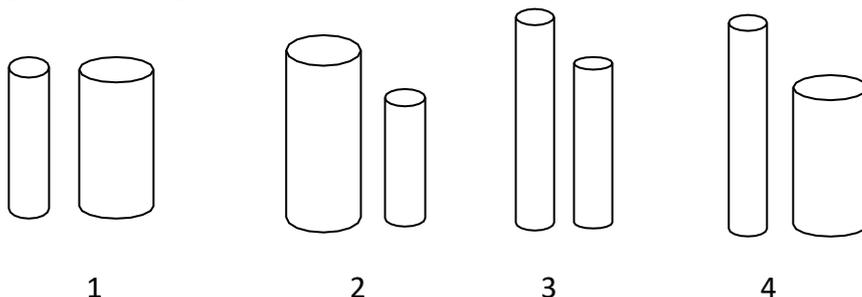


- Calculá la altura inicial de la vela 2.
- Calculá el tiempo que tarda la vela 2 en derretirse completamente.
- Proponé una fórmula que permita calcular la altura de la vela 2 'A<sub>2</sub>' en función del tiempo 't'. Escribí los conjuntos dominio e imagen de la función.
- Analizá si la fórmula  $A_2(t) = 10 - 0,5 \cdot (t - 28)$  permite calcular la altura de la vela 2 en función del tiempo.
- Graficá, en el mismo sistema de ejes cartesianos, la altura de la vela 2 en función del tiempo.
- Calculá el tiempo que tiene que pasar, desde que se encienden las velas, hasta que ambas tienen la misma altura. ¿Qué altura tienen en ese instante?

10) El siguiente gráfico muestra la altura de dos velas cilíndricas en función del tiempo.



a) ¿Cuál de las siguientes imágenes representa el instante en que se encienden las velas?



- b) ¿Qué altura tiene la vela 2 en el instante en que la vela 1 se derrite completamente?
- c) ¿En qué momento las dos velas tienen la misma altura? ¿Qué altura tienen en ese instante?
- d) ¿En algún momento, desde que se encienden las velas, tienen una diferencia de 5 cm de altura?
- e) Confeccioná un gráfico para cada una de las imágenes descartadas en a), que muestre la altura de las dos velas en función del tiempo. Considerá que cada imagen representa el instante en que se encienden las velas.

**11)** Para vaciar dos tanques con agua de distinto tamaño, se encienden simultáneamente dos bombas diferentes.

Las bombas extraen el agua de cada tanque de manera uniforme.

Cuando se encienden las bombas, el agua del tanque 1 llega hasta los 208 cm de altura; y se termina de vaciar cuando pasaron 65 minutos.

El tanque 2 tarda 72 minutos en vaciarse.

Cuando pasaron 5 minutos, desde que se encendieron las bombas, la altura del agua del tanque 1 supera en 24,5 cm a la altura del agua del tanque 2.

a) Completá las tablas de valores

Tiempo (minutos)	Altura de agua en el tanque 1 (centímetros)
0	
1	
5	
	75,2
64	
	0

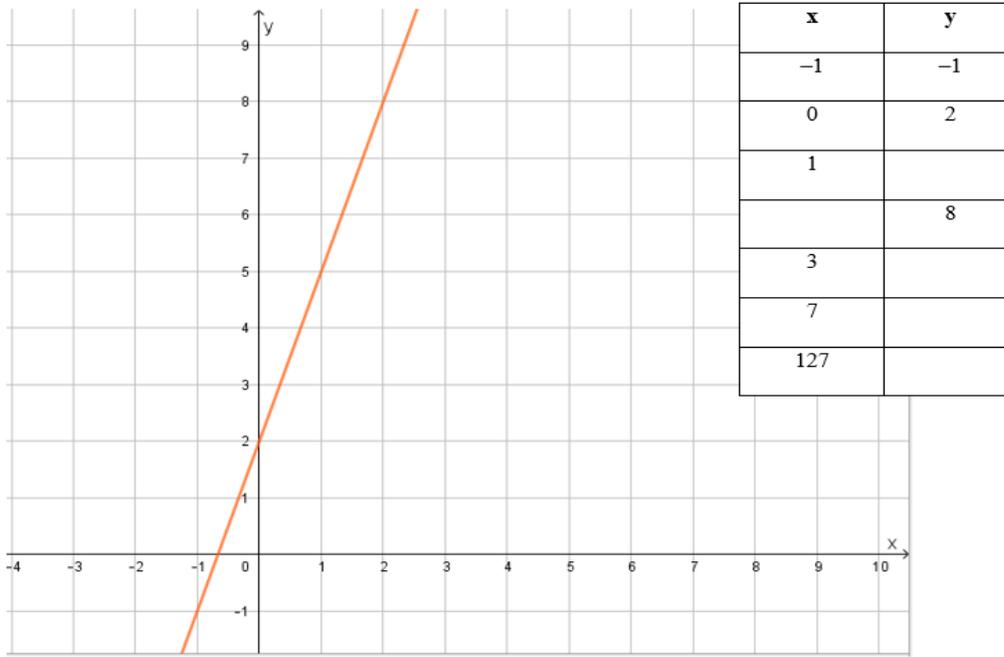
Tiempo (minutos)	Altura de agua en el tanque 2 (centímetros)
0	
1	
5	
	0

- b) ¿En algún momento, desde que se encienden las bombas, el agua de los dos tanques llega a la misma altura? ¿A qué altura llega el agua en ese momento?
- c) ¿En qué momentos, desde que se encienden las bombas, hay 10,5 cm de diferencia entre las alturas de agua de los tanques?
- d) Graficá, en un mismo sistema de ejes cartesianos, la altura de agua en cada tanque en función del tiempo. (Colocá las respuestas de los ítems a y b)

**Función lineal. Ecuación de la recta. Puntos de intersección. Rectas paralelas y perpendiculares.**

12) Completá, en cada caso, la tabla de valores con la información que muestra el gráfico.

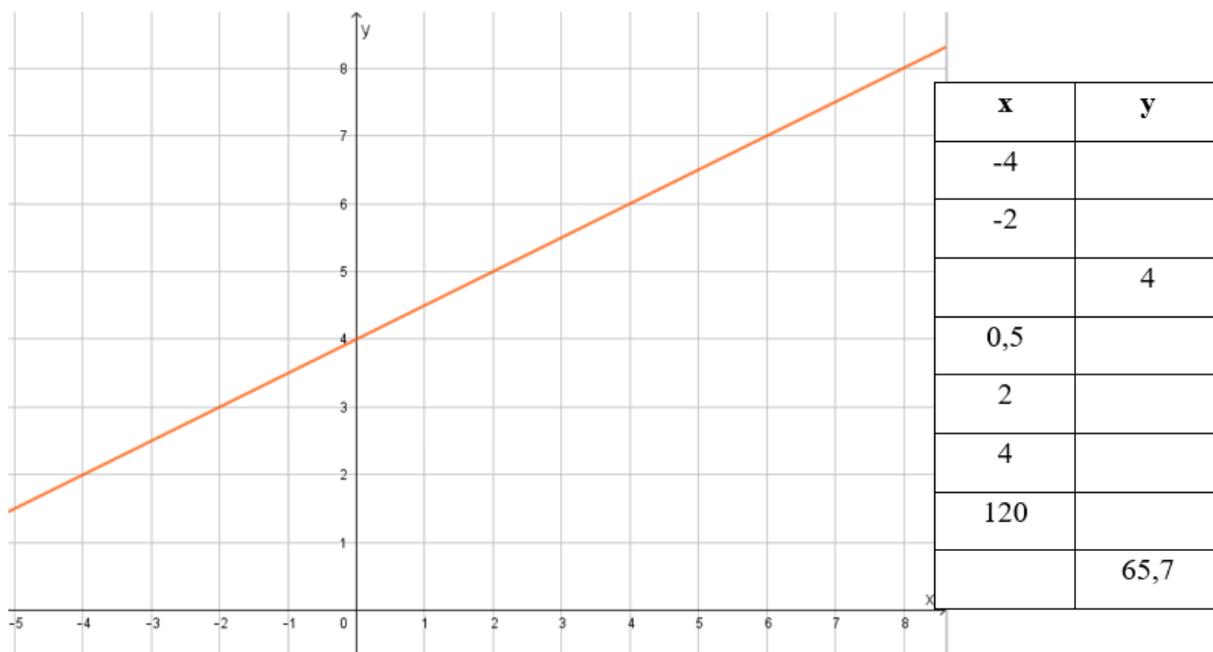
a<sub>1</sub>)



a<sub>2</sub>) Analicen si alguna/s de las siguientes fórmulas permite completar la tabla del ítem anterior.

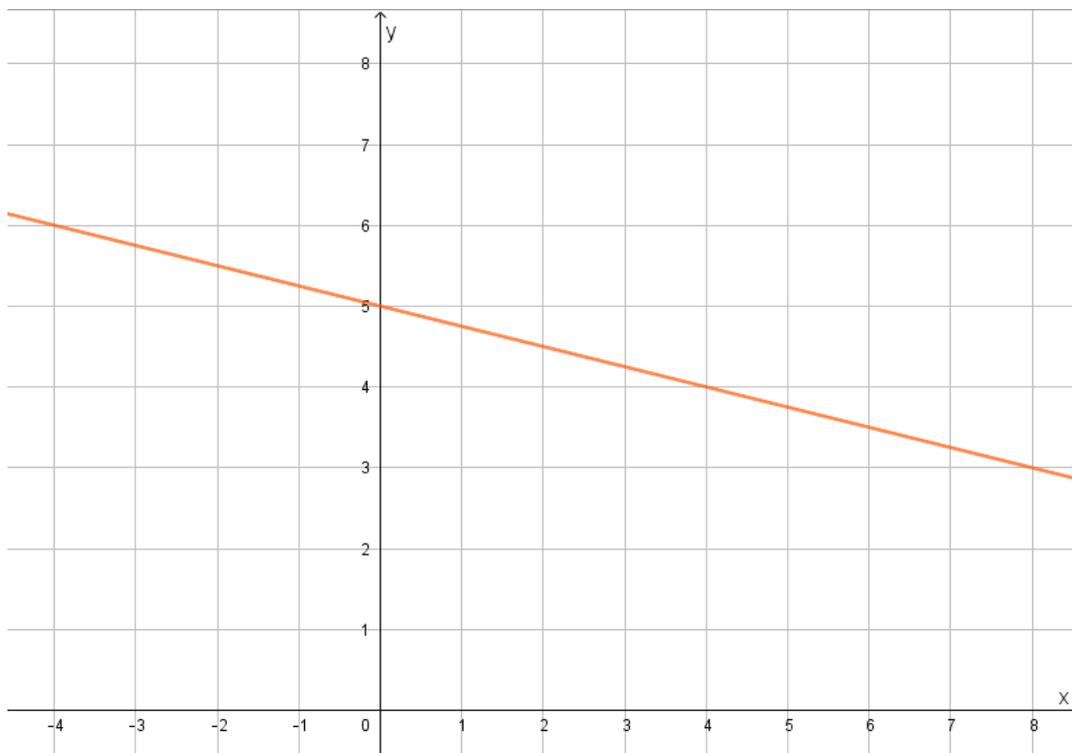
$y = 5x + 2$     $y = \frac{1}{3}x + 2$     $y = 3x$     $y = 3x + 2$     $y = 3(x - 1) + 5$     $y = 3(x - 3) + 11$

b)

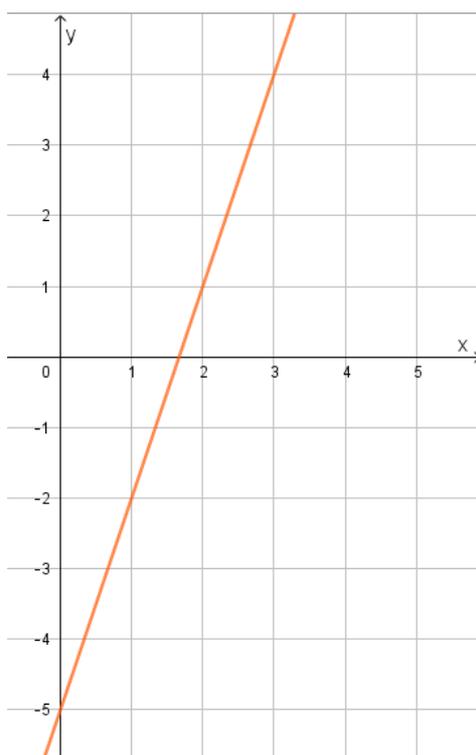


13) En cada caso, completá las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta y proponé una fórmula para la recta.

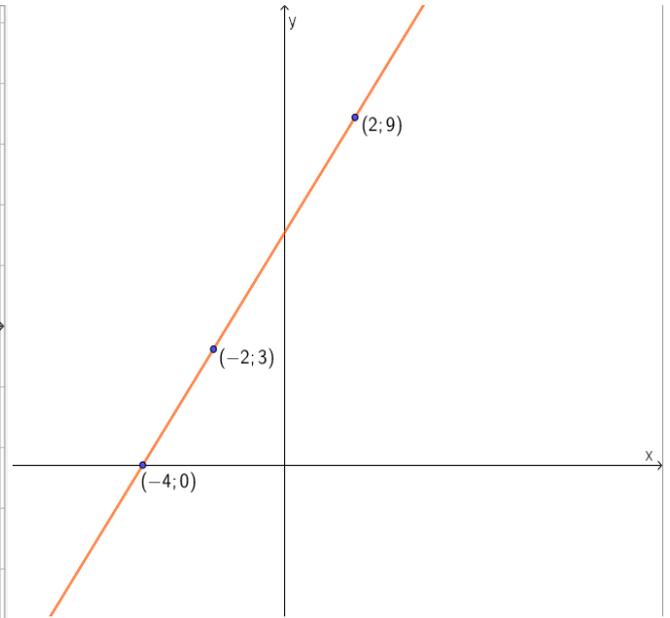
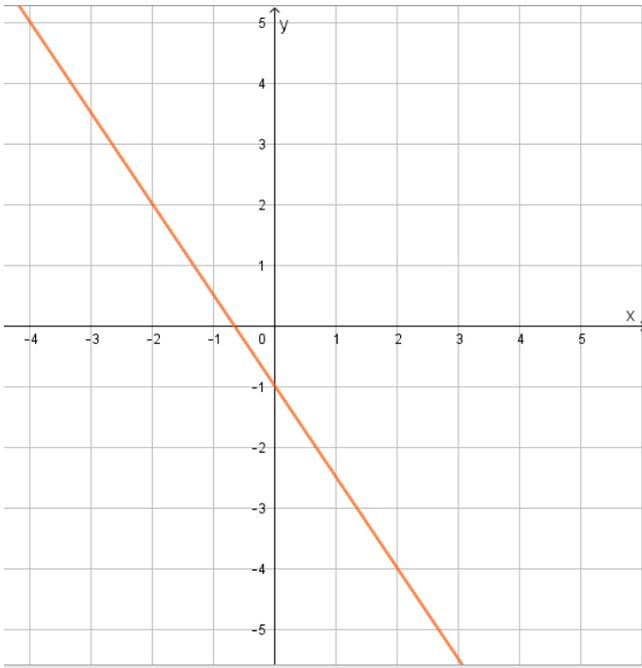
a)  $(-4; 6)$     $(0; \quad)$     $(4; \quad)$     $(\quad; 3)$     $(3; \quad)$     $(120; \quad)$     $(\quad; 0)$



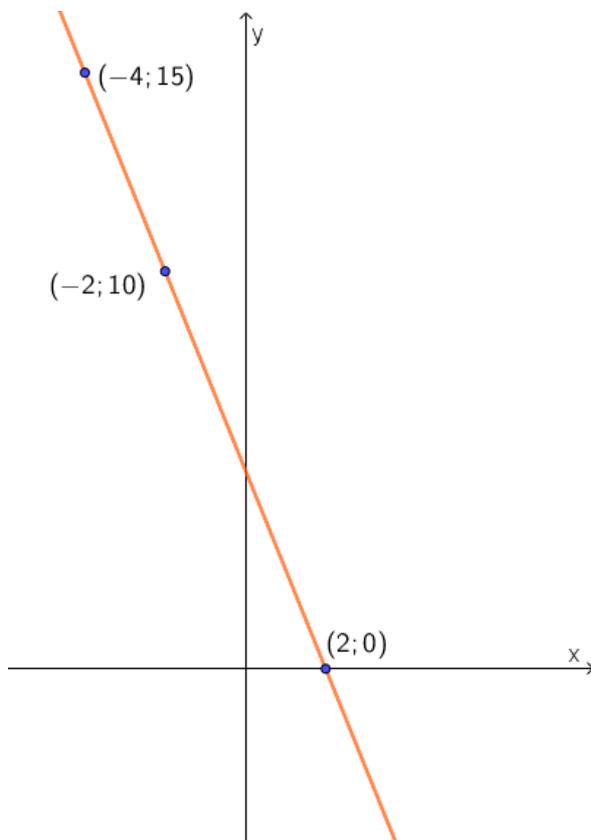
b)  $(0; \quad)$     $(1; \quad)$     $(2; \quad)$     $(3; \quad)$     $(120; \quad)$     $(\quad; 0)$     $(\quad; 42)$



c)  $(-2; \quad)$   $(\quad; -1)$   $(2; \quad)$  d)  $(1; \quad)$   $(3; \quad)$   $(-5; \quad)$   
 $(1; \quad)$   $(12; \quad)$   $(\quad; 0)$   $(34; \quad)$   $(-24; \quad)$   
 $(-10; \quad)$



e)  
 $(0; \quad)$   $(3; \quad)$   $(14; \quad)$   $(\quad; -25)$



**14) La PENDIENTE de una recta:**

A la variación de la variable dependiente 'y' cuando la variable independiente 'x' aumenta 1 unidad, la llamaremos **pendiente**.

La pendiente de una recta puede ser positiva o negativa.

La ORDENADA AL ORIGEN de una recta: Es el valor que toma la variable dependiente cuando la variable independiente vale cero.

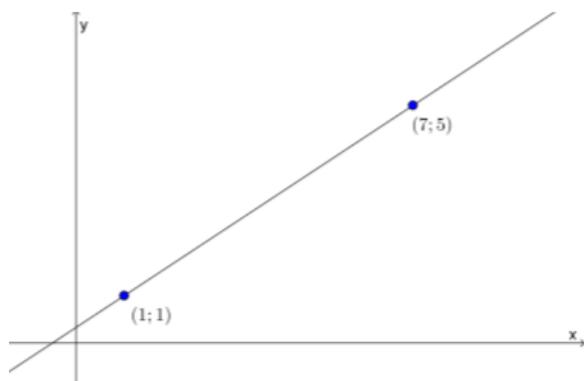
La RAÍZ de una recta: Es el valor que toma la variable independiente cuando la variable dependiente vale cero.

Vuelvan a los problemas anteriores para completar el siguiente cuadro:

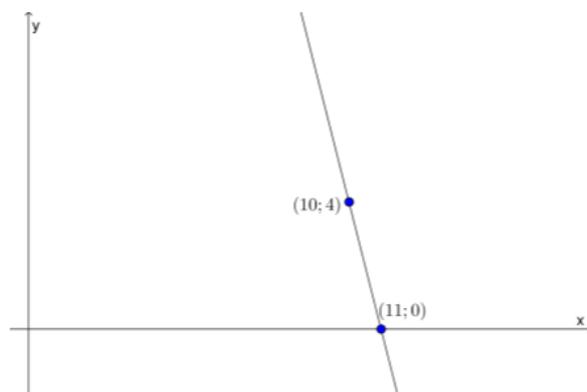
Problema		Variable independiente	Variable dependiente	Pendiente de la recta	Significado de la pendiente en el contexto del problema	Ordenada al origen	Significado de la ordenada al origen en el problema	Raíz de la recta	Significado de la raíz en el contexto del problema	Fórmula
Problema del barril (ejercicio 1)		Cantidad de aceite en el barril (litros)	Peso del barril con aceite (Kg)	0,6	El peso que marca la balanza aumenta 0,6 Kg por cada litro de aceite que se agrega al barril.			No tiene	_____	$P = 0,6 \cdot x + 30$
Problema de las velas (ejercicio 9)	Vela 1					45		50		
	Vela 2			-0,4						
Problema 12 a		x	y	3	Cuando 'x' aumenta una unidad, 'y' aumenta 3 unidades.					
Problema 13 a		x	y			5	El valor que toma 'y', en este caso $y=5$ , cuando $x = 0$			

15) Determinar el valor de la pendiente y la ordenada al origen de cada recta.

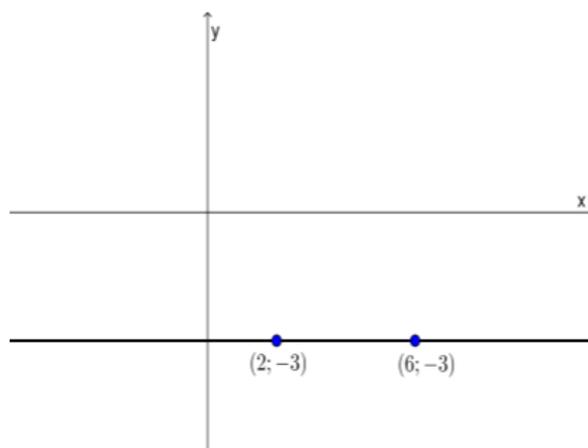
a)



b)



c)



16) Decidí si alguno/s de los gráficos corresponde a la función lineal dada por la fórmula  $f(x) = 6 + 3x$ . Justificá tu respuesta.

GRÁFICO 1

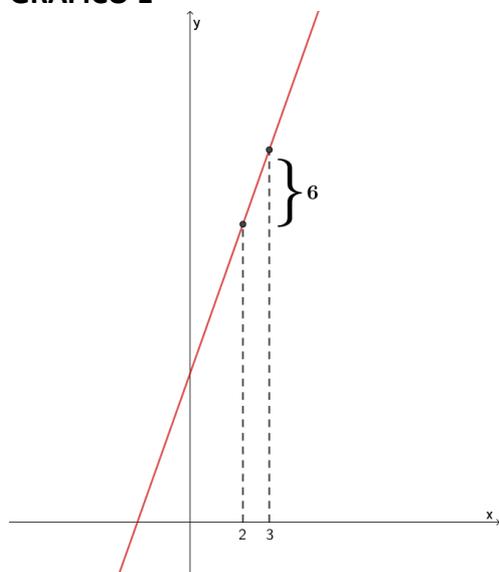
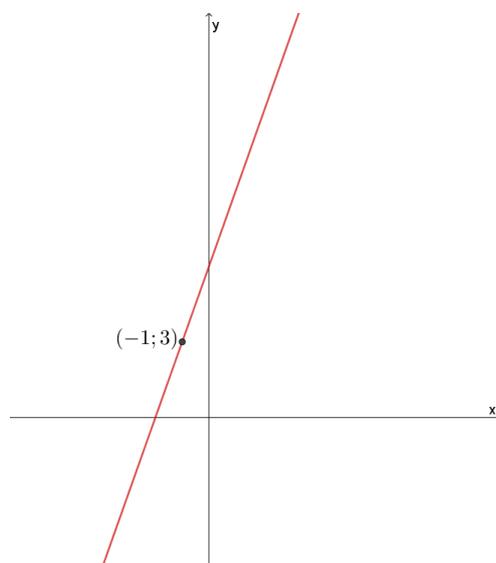
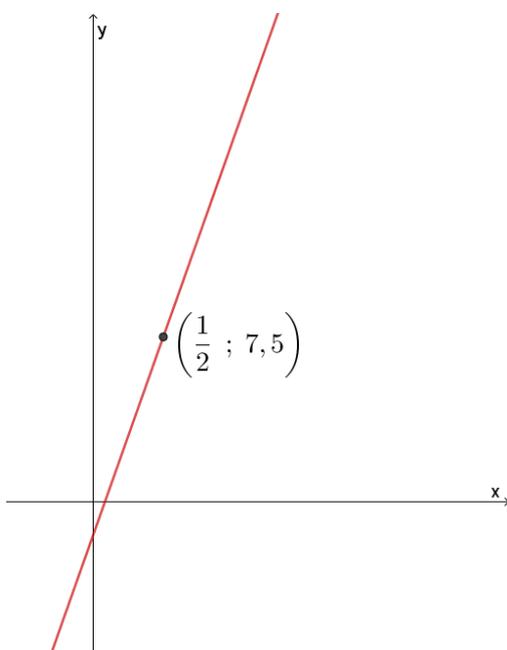


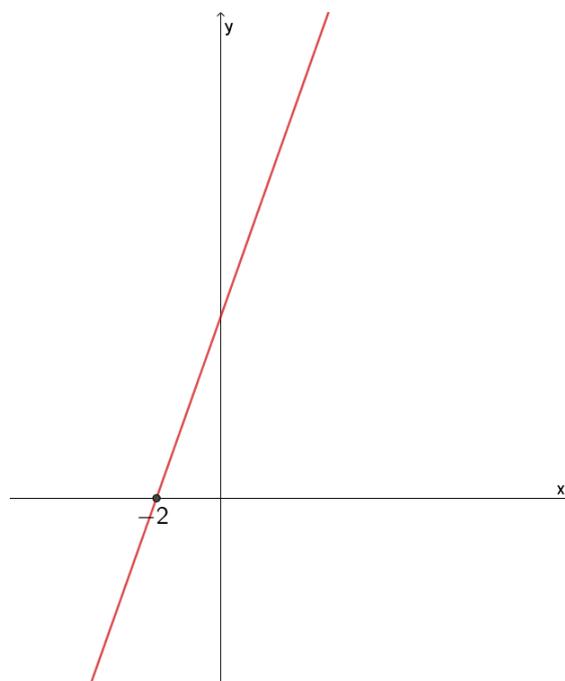
GRÁFICO 2



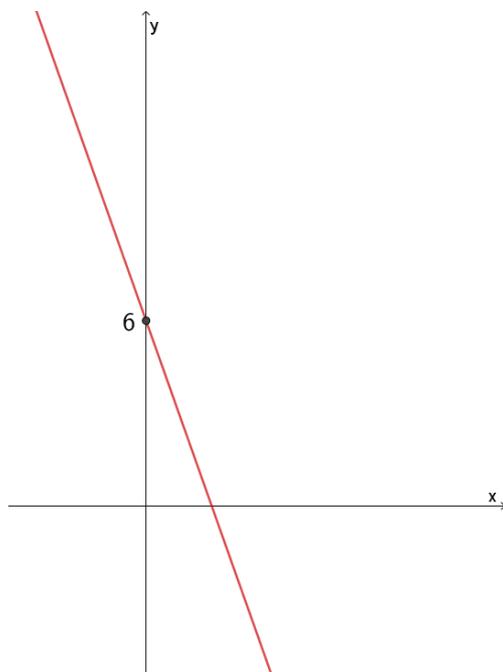
**GRÁFICO 3**



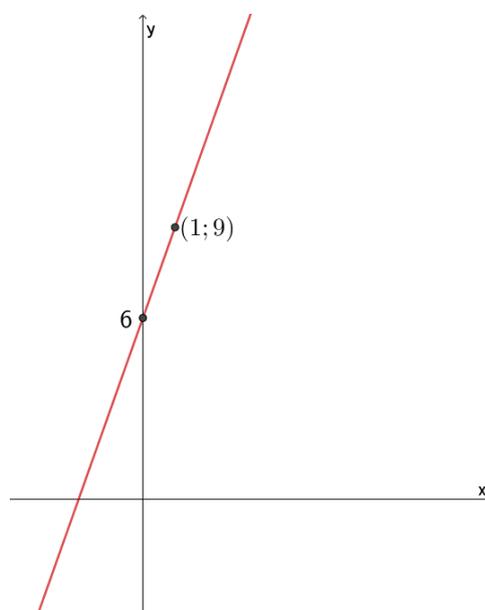
**GRÁFICO 4**



**GRÁFICO 5**



**GRÁFICO 6**

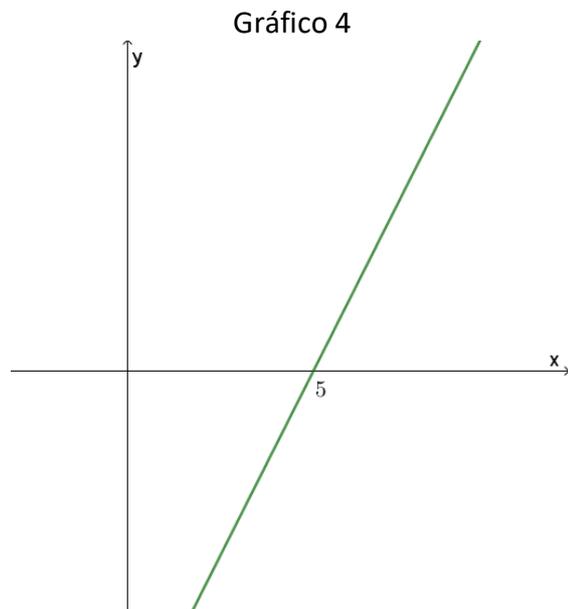
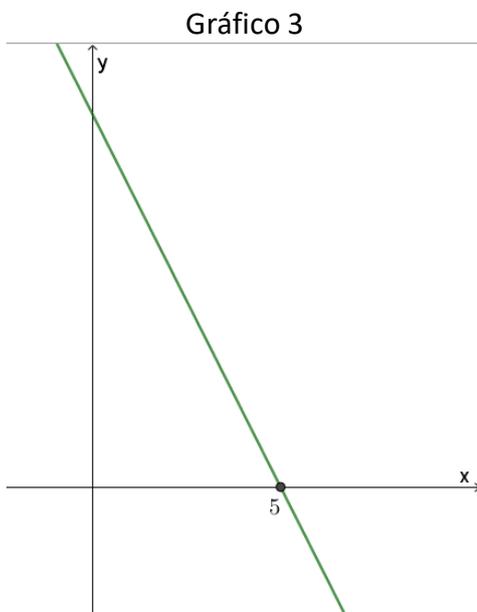
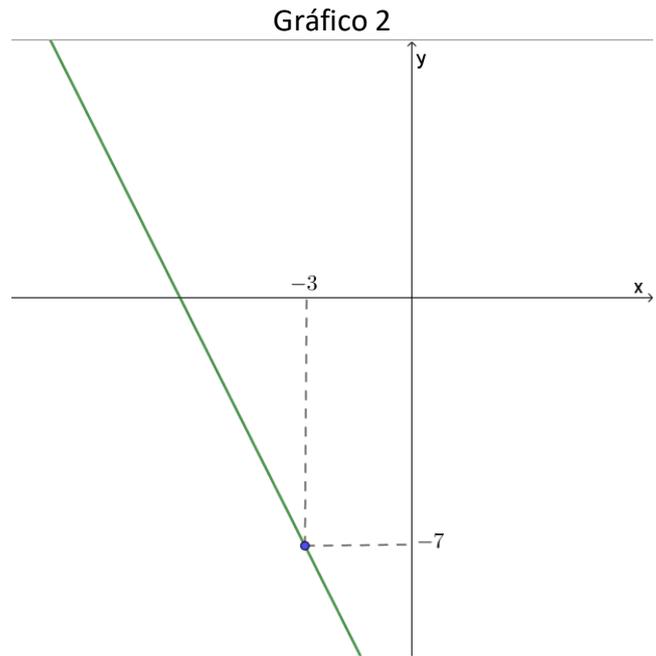
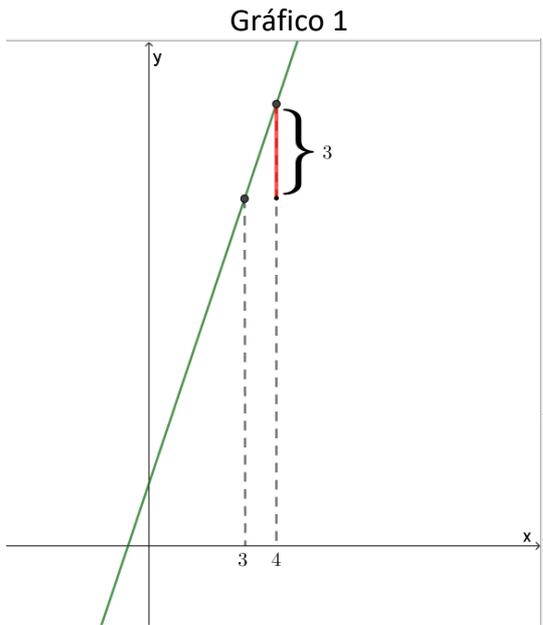


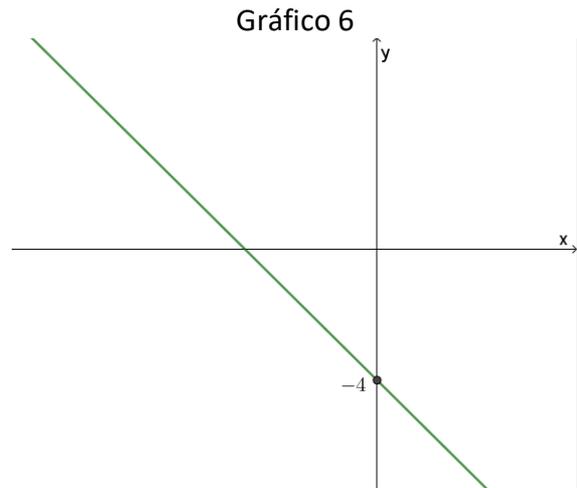
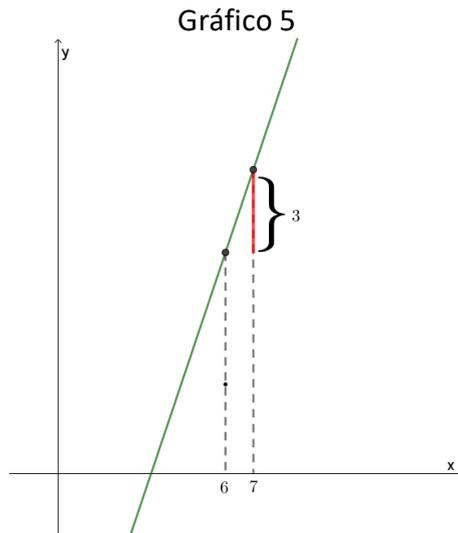
17) Para cada una de las siguientes fórmulas, decidí qué gráfico le corresponde. Justificá en cada caso.

$$f(x) = 2x - 10 \quad g(x) = -2x - 13 \quad h(x) = 2 + 3x \quad i(x) = -x - 4 \quad j(x) = 3x - 10$$

$$m(x) = -2(x - 5)$$

Luego indicá, en cada caso, la raíz, la pendiente y la ordenada al origen de cada una.





18) Graficá las siguientes funciones lineales dadas por su fórmula:

$$f(x) = 5x - 2 \quad g(x) = -x + 3 \quad h(x) = -4(x - 3) \quad j(x) = \frac{1}{2}(x + 6)$$

En cada caso, describí los pasos que utilizaste para la construcción del gráfico e indicá la pendiente de la recta, la ordenada al origen y la raíz.

19) Dados los puntos:  $A = (1 ; -2,5)$ ,  $B = (3,5 ; 1,2)$  y  $C = (3 ; 0,5)$ , se pide:

a) Decidí si los tres puntos están alineados. (Aclaración: tres puntos están alineados si están en la misma recta)

b) Modificá la ordenada del punto B para que los tres puntos del ejercicio anterior estén alineados.

(Aclaración: Se denomina **ordenada de un punto** a la coordenada 'y', por ejemplo la ordenada del punto  $(1;4)$  es 4)

c) Hallá la raíz de la recta que pasa por A y C.

20) Dados los puntos  $A = (3 ; 1)$   $B = (6; -5,5)$   $C = (7; -7)$ , se pide:

a) Decidí si los tres puntos están alineados. Si no lo están modificá una de las coordenadas del punto B para que los tres puntos queden alineados.

b) ¿Qué punto de la recta  $r: y = 3x - 1/2$  está alineado con los puntos A y C?  
Utilicen GeoGebra para verificar la respuesta.

21) Hallá el punto de la recta  $r: y = 5x - 1$  que está alineado con los puntos  $(0;3)$  y  $(2; -3)$ .

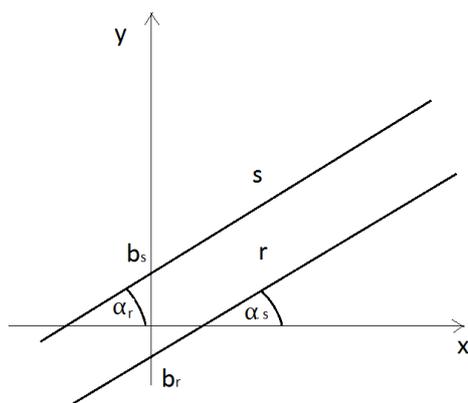
**22)** Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando tus respuestas.

- a) Si una función lineal es creciente, su pendiente es un número negativo.
- b) Si una función lineal  $J$  cumple que  $J(7) = 8$  y  $J(9) = 11$ , su pendiente es 3.
- c) Si la pendiente de la recta es 4 y la ordenada al origen de la recta es 10, la raíz de la recta es  $x = -2,5$ .
- d) La raíz del gráfico de la función lineal que pasa por  $(0;2)$  y  $(2; -4)$  es  $2/3$ .
- e) La recta que pasa por  $(3;2)$  y tiene pendiente 2, pasa por el punto  $(55;106)$
- f) La ordenada al origen la función lineal que pasa por  $(-2;0)$  y  $(2;16)$  es 8.
- h) Las fórmulas  $y = -3(x - 4) + 1$  e  $y = -3x + 13$  tienen el mismo gráfico.

**23)** Decidí, en cada caso, si las rectas son paralelas:

- a) el gráfico de  $f(x) = 3x+1$  y la recta que pasa por los puntos  $(0;20)$  y  $(12;55)$
- b) la recta que pasa por  $(50;252)$  y  $(150;152)$ , y la recta que pasa por los puntos  $(0;55)$  y  $(100; -55)$

**Propiedad:** Dos rectas son paralelas, sí y solo sí, tienen la misma pendiente.



$$r \rightarrow y = m_r x + b_r$$

$$s \rightarrow y = m_s x + b_s$$

$$r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$$

$$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_r = \operatorname{tg} \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

$$(\text{por ser } 0^\circ \leq |\alpha_r| < 180^\circ \wedge 0^\circ \leq |\alpha_s| < 180^\circ)$$

**24)** Escribí, si es posible, la fórmula de una recta que cumpla lo pedido. Graficá.

- a) Es paralela a la recta de ecuación  $y = 3x+5$  y pasa por el punto  $(5; -1)$
- b) Es paralela a la recta que pasa por  $(2;4)$  y  $(3;10)$ , y corta al eje X en 4.

**25)** La recta **w** pasa por el punto (0;6) e interseca a las rectas paralelas **m** y **r**:  $y = 3x + 2$  en los puntos R y P respectivamente.

La recta **m** corta al eje X en el punto R y pasa por el punto (0; -9).

a) Colocá en un gráfico la información del enunciado.

b) Hallá las coordenadas del punto P.

**26)** Lean la siguiente propiedad y analicen su demostración.

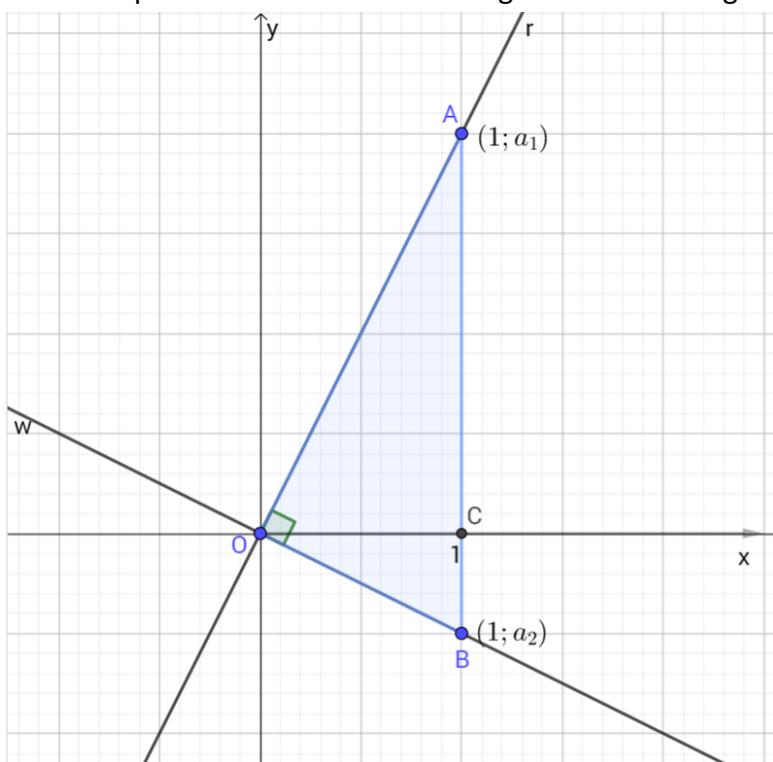
**Propiedad:** Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes da  $-1$ .

Consideremos las rectas perpendiculares **r** y **w** que pasan por el origen de coordenadas (0;0) para hacer más sencilla la demostración. Queremos probar que el producto de sus pendientes es  $-1$ .

**r:**  $y = a_1 \cdot x$  la recta r es creciente,  $a_1 > 0$ .

**w:**  $y = a_2 \cdot x$  la recta w es decreciente,  $a_2 < 0$ .

Aplicando el Teorema de Pitágoras en los triángulos  $\triangle OAC$ ,  $\triangle OCB$  y  $\triangle OAB$ :



coordenadas.

$$\overline{OA}^2 = 1^2 + a_1^2 \quad (1), \quad \overline{OB}^2 = 1^2 + (-a_2)^2$$

$$(2) \quad y \quad \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \quad (3).$$

Reemplazando las igualdades (1) y (2) en (3):

$$\overline{AB}^2 = 1^2 + a_1^2 + 1^2 + (-a_2)^2 = 2 + a_1^2 + a_2^2$$

(4)

$$\overline{AB} = a_1 + (-a_2) = a_1 - a_2$$

$$\overline{AB}^2 = (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_2^2 \quad (5)$$

Igualando (4) y (5) nos queda:

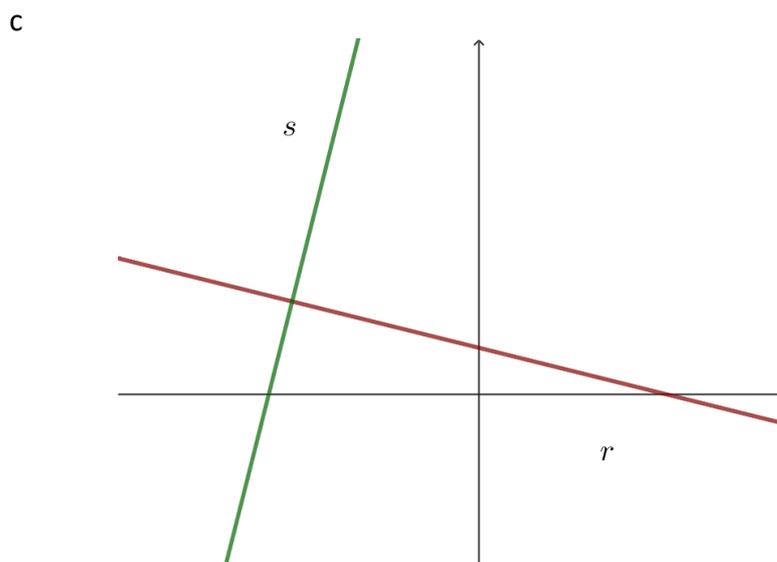
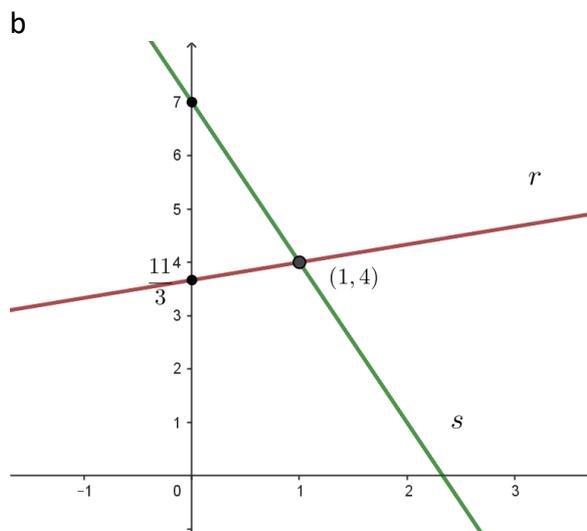
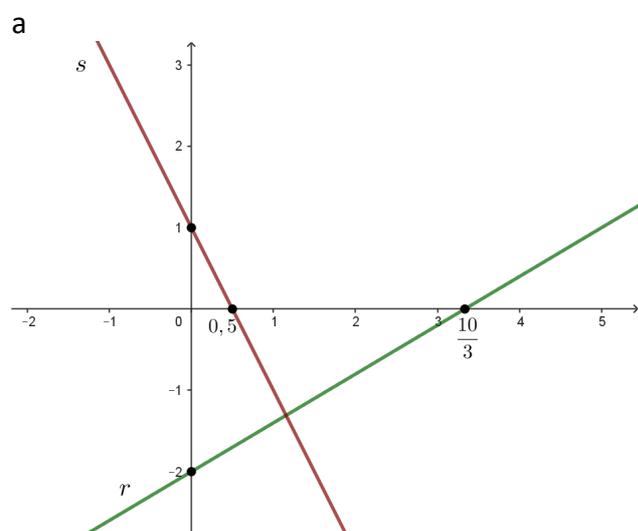
$$2 + a_1^2 + a_2^2 = a_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_2^2 \quad \text{que es equivalente a } 2 = -2 \cdot a_1 \cdot a_2, \text{ luego}$$

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

*Para pensar:* Intentá explicar que la propiedad se cumple, aunque las rectas perpendiculares no pasen por el origen de

**También se puede probar que si el producto de las pendientes de dos rectas da  $-1$ , las rectas son perpendiculares. (propiedad recíproca)**

27) En cada caso, indicá si las rectas graficadas son perpendiculares. Explicá tus respuestas

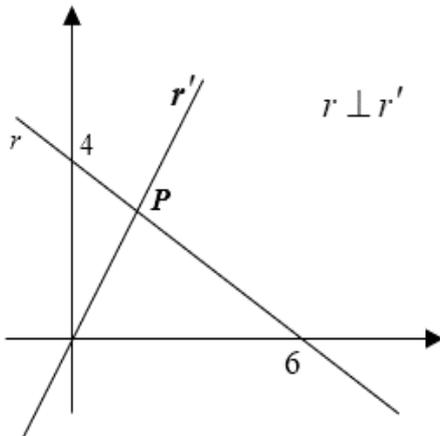


28) Proponé las fórmulas de dos rectas perpendiculares a la recta  $r : y = 2x + 6$ . Graficá las tres rectas.

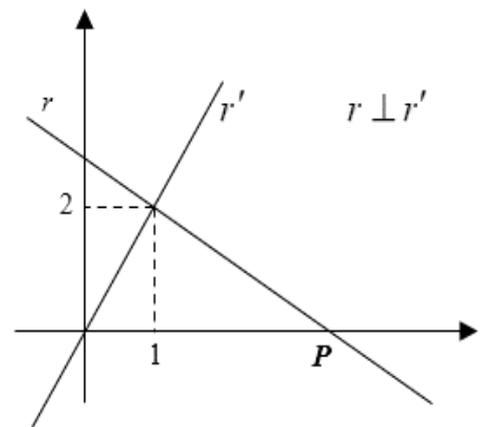
29) Hallá la fórmula de la recta que pasa por el punto  $(3;8)$  y es perpendicular a  $r : y = -x + 6$ . Grafiquen las dos rectas.

30) En cada caso, encuentren las coordenadas del punto P.

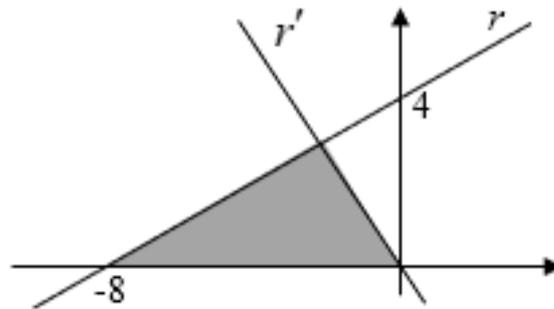
a)



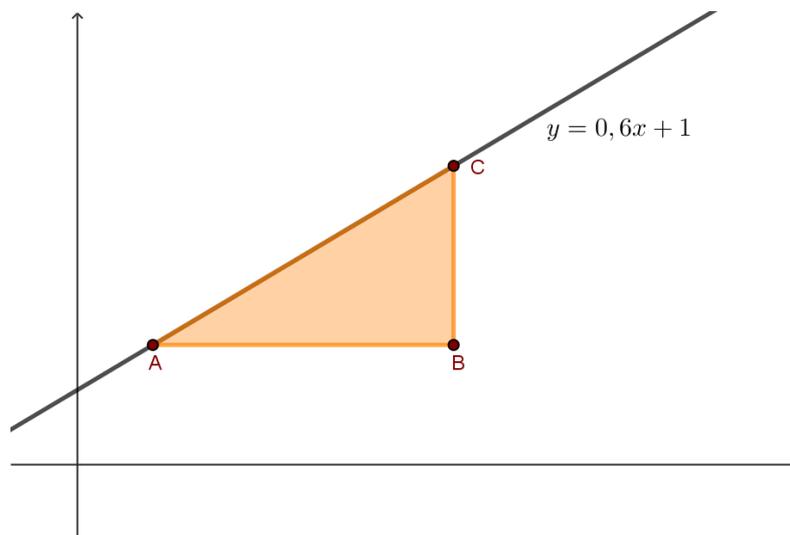
b)



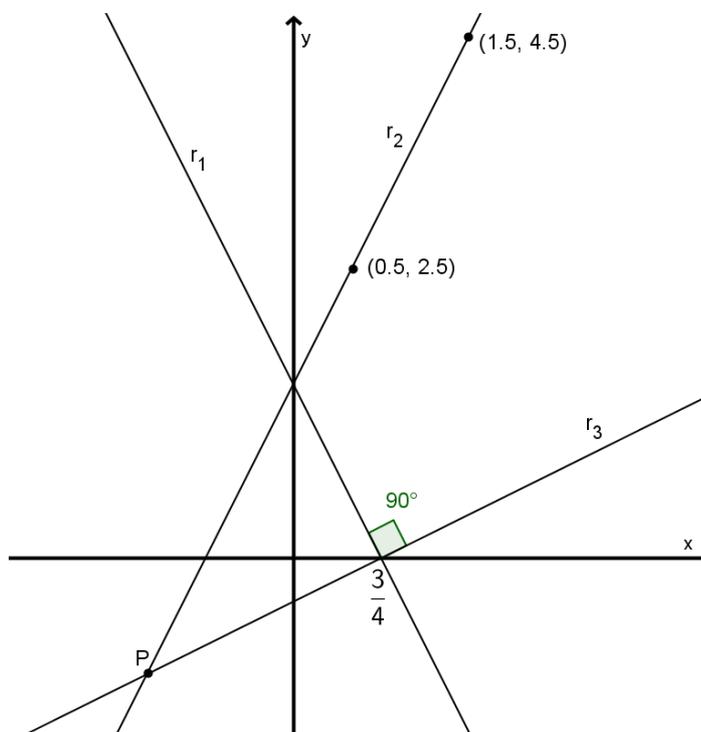
31) Hallá las ecuaciones de las rectas perpendiculares  $r$  y  $r'$  y el área del triángulo sombreado.



32) En la figura, la ecuación de la recta es  $y = 0,6x + 1$ . El área del triángulo  $ABC$  es  $4,8 \text{ cm}^2$ . Determiná las longitudes de sus lados.

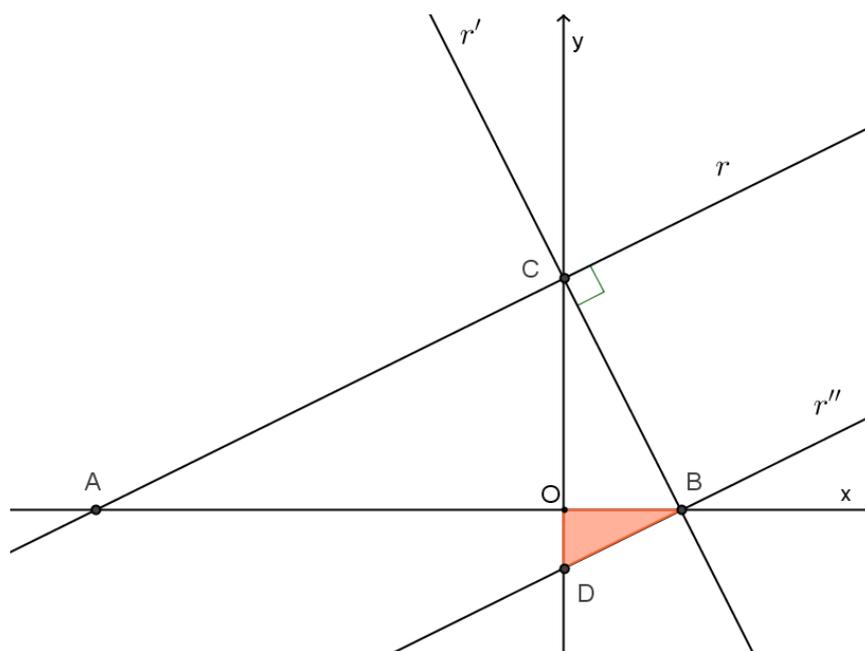


**33)** Determiná las ecuaciones de las rectas  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ . Luego hallar las coordenadas del punto P.



**34)** La fórmula de una de las rectas que se muestran tiene ecuación  $y = \frac{1}{2}x + 2$ ,  $r' \perp r$  y  $r \parallel r''$ .

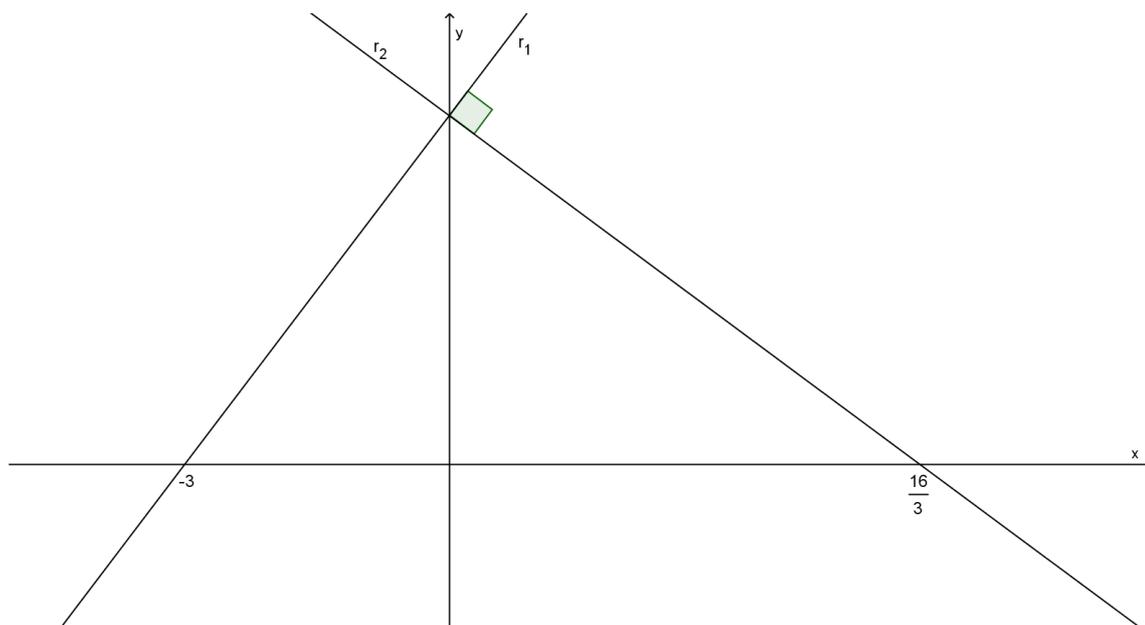
Determiná el área del triángulo  $\triangle OBD$ .



35) Determiná las coordenadas del punto de la recta  $r: y = -2x + 12,5$ , que se encuentra más cerca del punto  $(0;0)$ .

36) Determiná las coordenadas del punto de la recta  $r: y = 3x + 8$ , que se encuentra más cerca del punto  $(3;5)$ .

37) Hallá las ecuaciones de las rectas perpendiculares  $r_1$  y  $r_2$  que se cortan sobre el eje de las ordenadas.



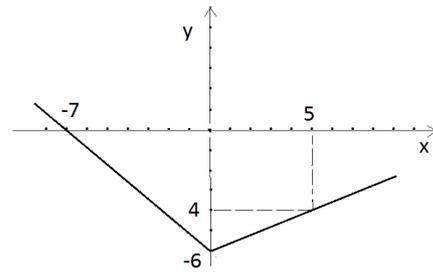
### Funciones lineales por tramos

38) Sea  $f: R \rightarrow R/f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 3 \\ \frac{3}{2}x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ . Graficá, definí  $I_f$  y hallá el conjunto de ceros.

39) Sea  $f: A \rightarrow R/f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } 2 < x < 5 \\ -4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ .

Graficá, definí  $I_f$  y hallá el conjunto de ceros.

40) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ .



- a) Completá teniendo en cuenta el gráfico.
- b) Hallá el conjunto de ceros.

**Función módulo**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = |x|$

Por definición de módulo de un número real podemos escribir:

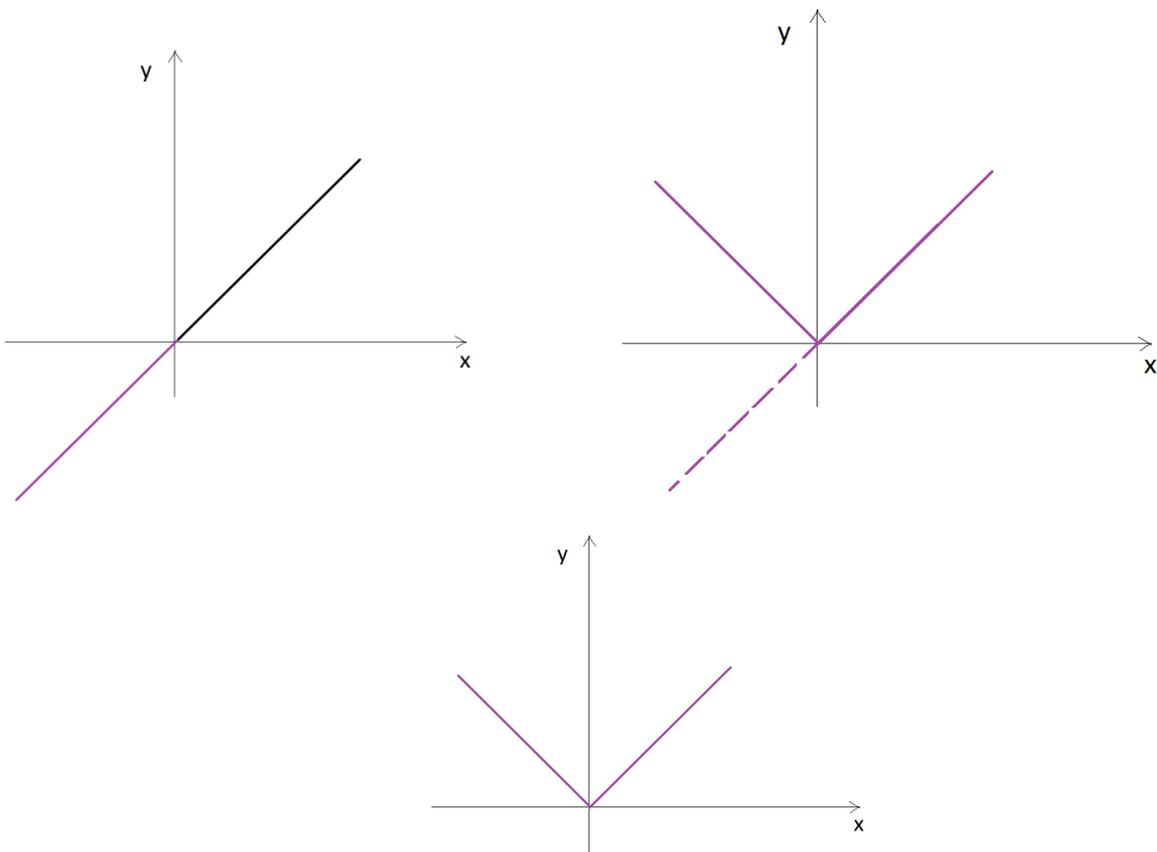
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

41) Determiná el conjunto imagen y analizá la paridad de la función anterior.

Nota: es interesante observar qué sucede con el gráfico de una función cuando le aplicamos el módulo.

Representamos  $y=x$  e  $y=|x|$

La semirrecta que está incluida en el semiplano inferior en la representación de  $y=x$  pasa a ocupar el semiplano superior en la representación de  $y=|x|$ . Son simétricas respecto del eje x.



**42)** Representá en un mismo gráfico  $y=x+1$  e  $y = |x|$  definidas de  $R \rightarrow R$  sin utilizar tabla de valores para la segunda.

**43)** Graficá las siguientes funciones:  $f: R \rightarrow R/$

a)  $f(x)=3-|x|$                       b)  $f(x)=1+|x-1|$

**44)** A partir del gráfico de  $f: R \rightarrow R/f(x) = |x|$  representá:

a)  $g(x) = f(x+2)$     b)  $s(x) = f(x-2)$     c)  $h(x) = f(x)+1$     d)  $t(x) = -f(x)$

## Unidad 3: Función cuadrática.

### PRIMERA PARTE

1) Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un micro emprendimiento como técnicos de computadoras.

Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula:

$$G(p) = 22050 - 2(p - 250)^2$$

La misma permite calcular la ganancia semanal "G" en función del precio por hora "p".

- Miguel propone cobrar \$175 por hora ¿cuánto ganarían en ese caso?
- Ernesto quiere aumentar la ganancia semanal ¿a qué precio podrían cobrar la hora?
- ¿Cuál es la máxima ganancia semanal que se puede obtener? ¿Qué precio/s por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia?
- ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia semanal de \$10800?
- Propongan diferentes precios por hora que pueden cobrar para obtener la misma ganancia.

2) Los registros de temperatura tomados un día del mes de julio entre las 0hs y las 15hs en una zona rural se ajustan a la función:  $T(x) = 0,1(x - 8)^2 - 4$ , donde 'T' es la temperatura en grados Celsius y 'x' la hora del día.

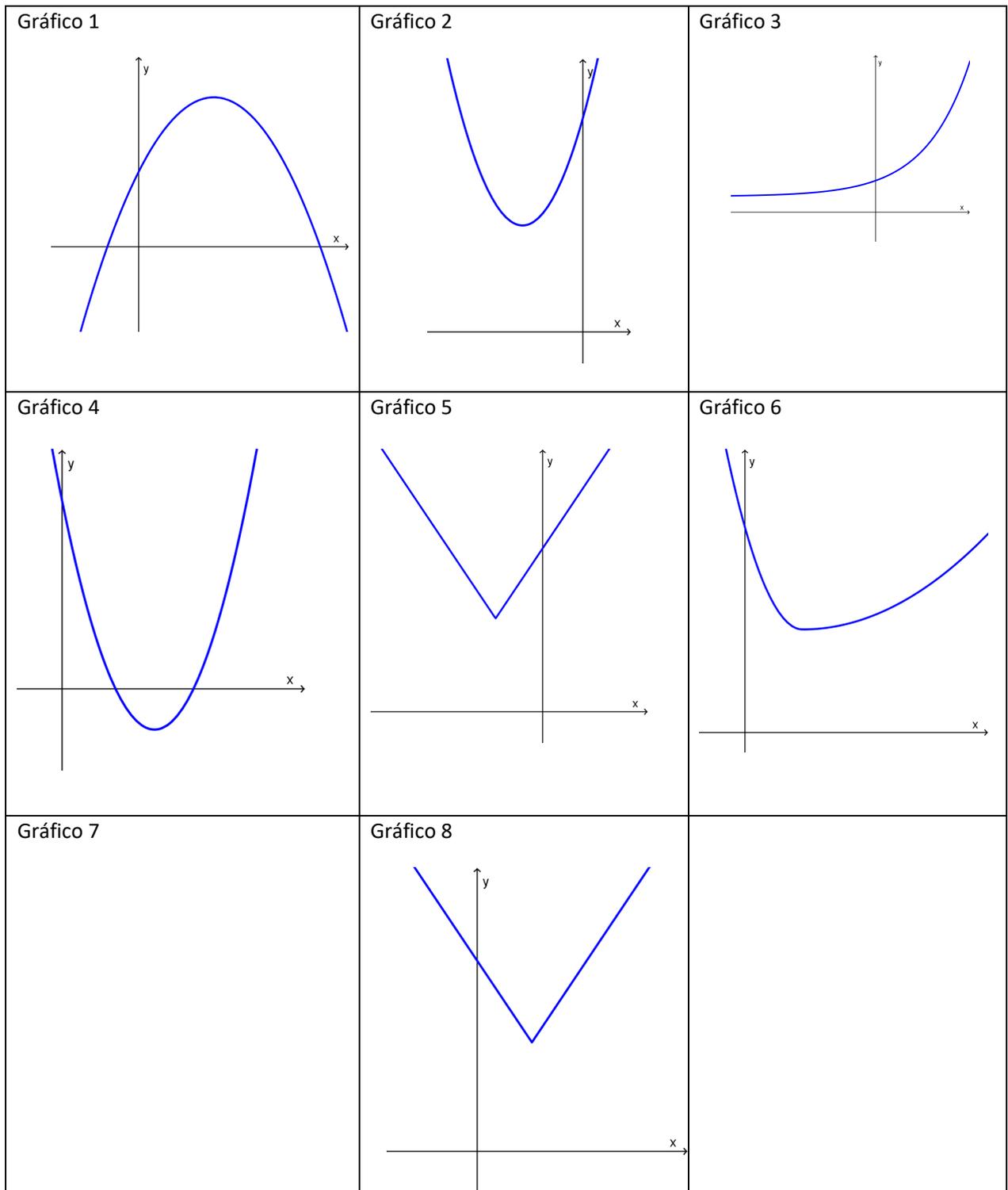
- ¿Qué temperatura hubo a las 2 de la mañana?
- ¿En algún momento de la mañana se registró la misma temperatura que a las 15 hs?
- ¿En algún momento del día se registró la misma temperatura que a las 0 horas?
- Propongan momentos del día donde se haya registrado la misma temperatura.
- ¿Es posible haber registrado antes de las 15 horas una temperatura de  $1,5^\circ\text{C}$ ? ¿y de  $5^\circ\text{C}$ ?
- ¿Cuál fue la temperatura mínima entre las 0 y las 15 horas y a qué hora se registró?

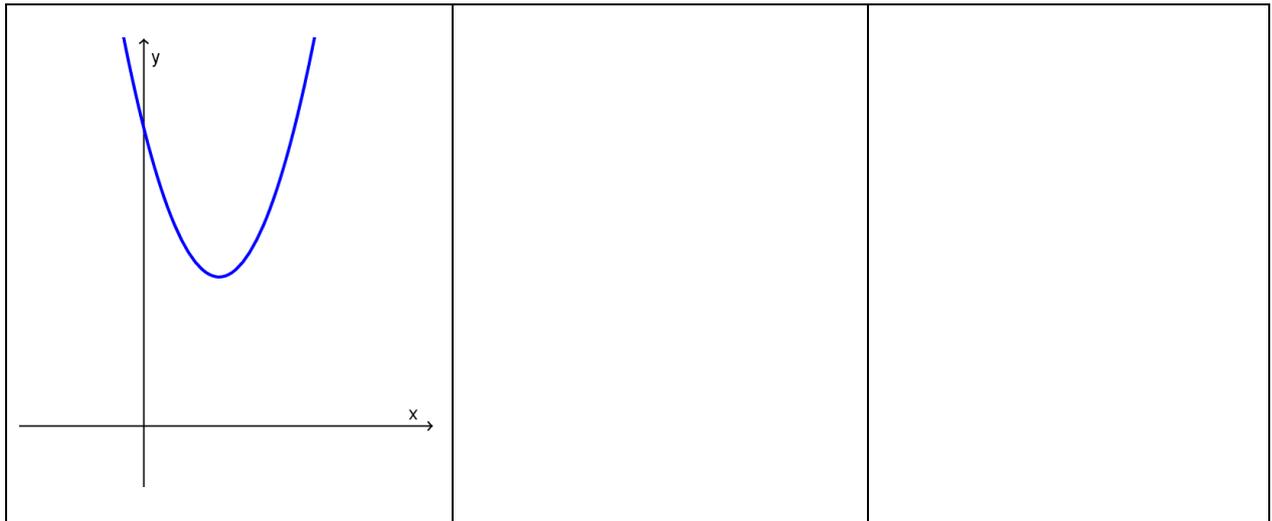
3) Dada la siguiente función  $f(x) = (x - 2)^2 + 4$

Busquen, si existen, otros valores de dominio que tengan la misma imagen que  $x = 5$ . ¿Cuántos hay?

- Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que  $x = 3$ . ¿Cuántos hay?
- Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que  $x = 2$ . ¿Cuántos hay?
- Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 20. ¿Cuántos hay?
- Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 3. ¿Cuántos hay?
- Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 4. ¿Cuántos hay?

- f) Confeccionen una tabla con las respuestas de los ítems anteriores.
- g) Analicen cuáles de los siguientes gráficos podría corresponder con la función analizada.





4) Dadas las siguientes funciones, hallen el máximo o el mínimo valor que puede alcanzar cada una de las funciones y en qué valor de  $x$  lo alcanza:

a)  $f(x) = (x + 5)^2 - 4$

b)  $g(x) = -2(x - 5)^2 + 1$

c)  $h(x) = 5 - (4x + 3)^2$

d)  $i(x) = (7x - 5)^2 + 18$

5) (para hacer con GeoGebra en el celular)

Ingresen a [www.geogebra.org/classic](http://www.geogebra.org/classic).

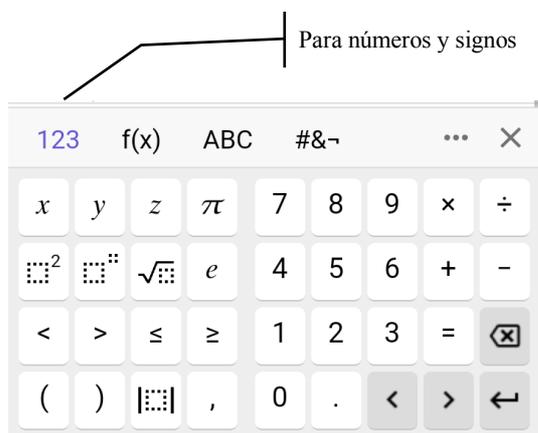
Tipeen lo siguiente (en orden):

$a = 1$

$b = 2$

$c = 3$

$f(x) = a(x + b)^2 + c$



En cada caso, modifiquen los valores de **a**, **b** y/o **c** de manera que la función

$$f(x) = a(x + b)^2 + c:$$

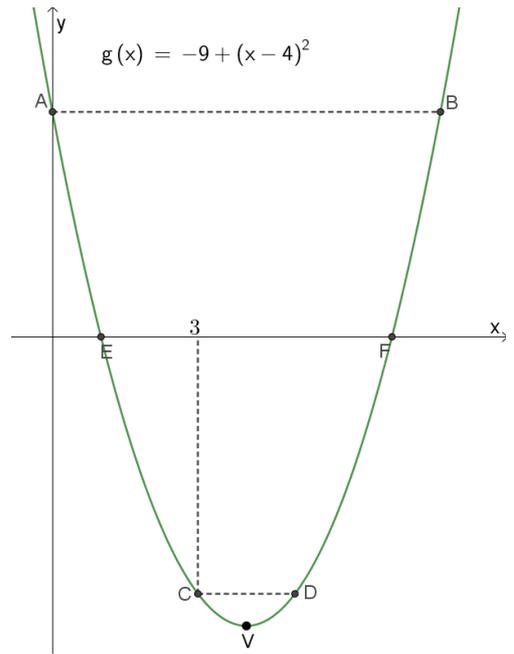
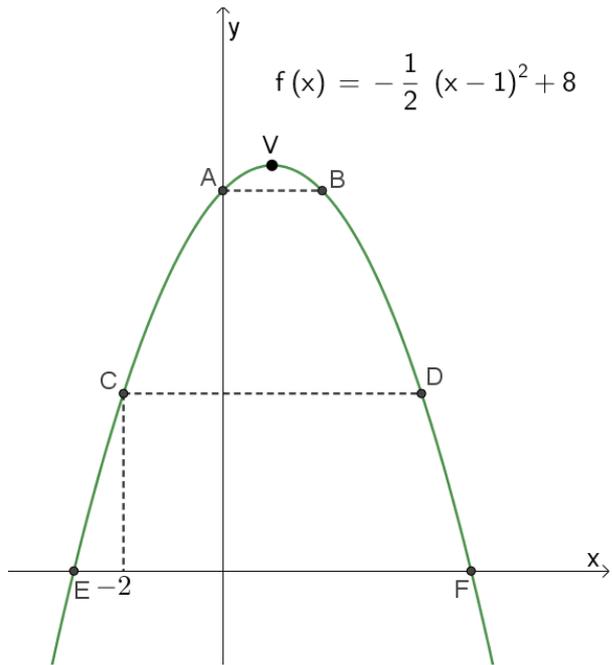
*Para cada ítem, una vez lograda la función pedida:*

- *En los casos donde sea posible, capturen la pantalla de GeoGebra y péguenla un archivo de Word. Si no es posible, porque no existe o no es posible hallarla con GeoGebra, expliquen por qué.*
- *Escriban la fórmula que obtuvieron.*
- *Expliquen cómo se dan cuenta que la fórmula que obtuvieron cumpla con lo pedido.*

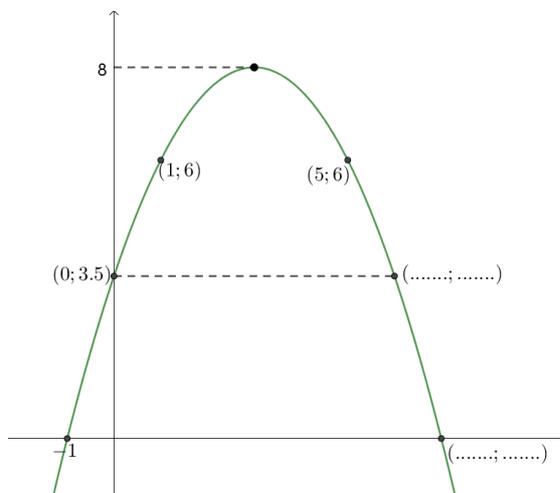
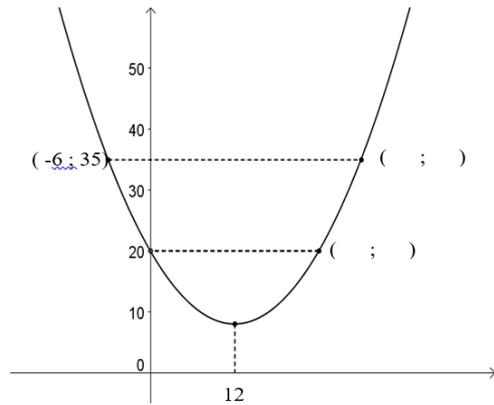
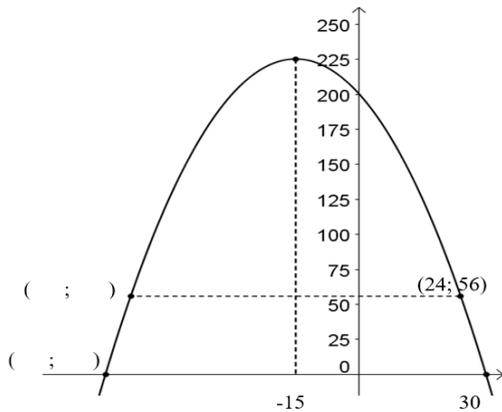
- a) tenga un valor máximo igual a 3,6. Si no es única, propongan otra.
- b) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un máximo igual a 3,6?
- c) Tenga un valor mínimo igual a -4,1. Si no es única, propongan otra.
- d) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un mínimo igual a -4,1?
- e) Tenga un valor máximo igual a 3,6 y que se alcance en  $x = 2$ . Si no es única, propongan otra.
- f) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un máximo igual a 3,6 que se alcance en  $x=2$ ?
- g) Tenga un valor mínimo igual a 2 y se alcance en  $x = -5$ . Si no es única, propongan otra.
- h) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un mínimo igual a 2 que se alcance en  $x=-5$ ?
- i) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f no interseque (no "toca" ni "atraviesa") al eje de las x?
- j) Tenga el vértice en el punto (5;-8) y el gráfico pase por el punto (9;0).
- k) Tenga el vértice en el punto (4;7) y el gráfico pase por el punto (2;1).
- l) Tenga el vértice en el punto (-2;10) y el gráfico pase por el punto (0;1).
- m) Tenga el vértice en el punto (-3;-5) y el gráfico pase por el punto (0;1).

**6)** Los segmentos con líneas punteadas que unen puntos de las parábolas son paralelos a los ejes coordenados.

Hallen, en cada caso, las coordenadas del punto V (vértice) y de los puntos A, B, C, D, E y F.



7) Para las siguientes parábolas, completen las coordenadas de los puntos marcados:



8) Grafiquen, sin usar GeoGebra, las siguientes funciones. Coloquen las coordenadas del vértice y dos puntos simétricos.

$$f(x) = -(x+2)^2 + 9$$

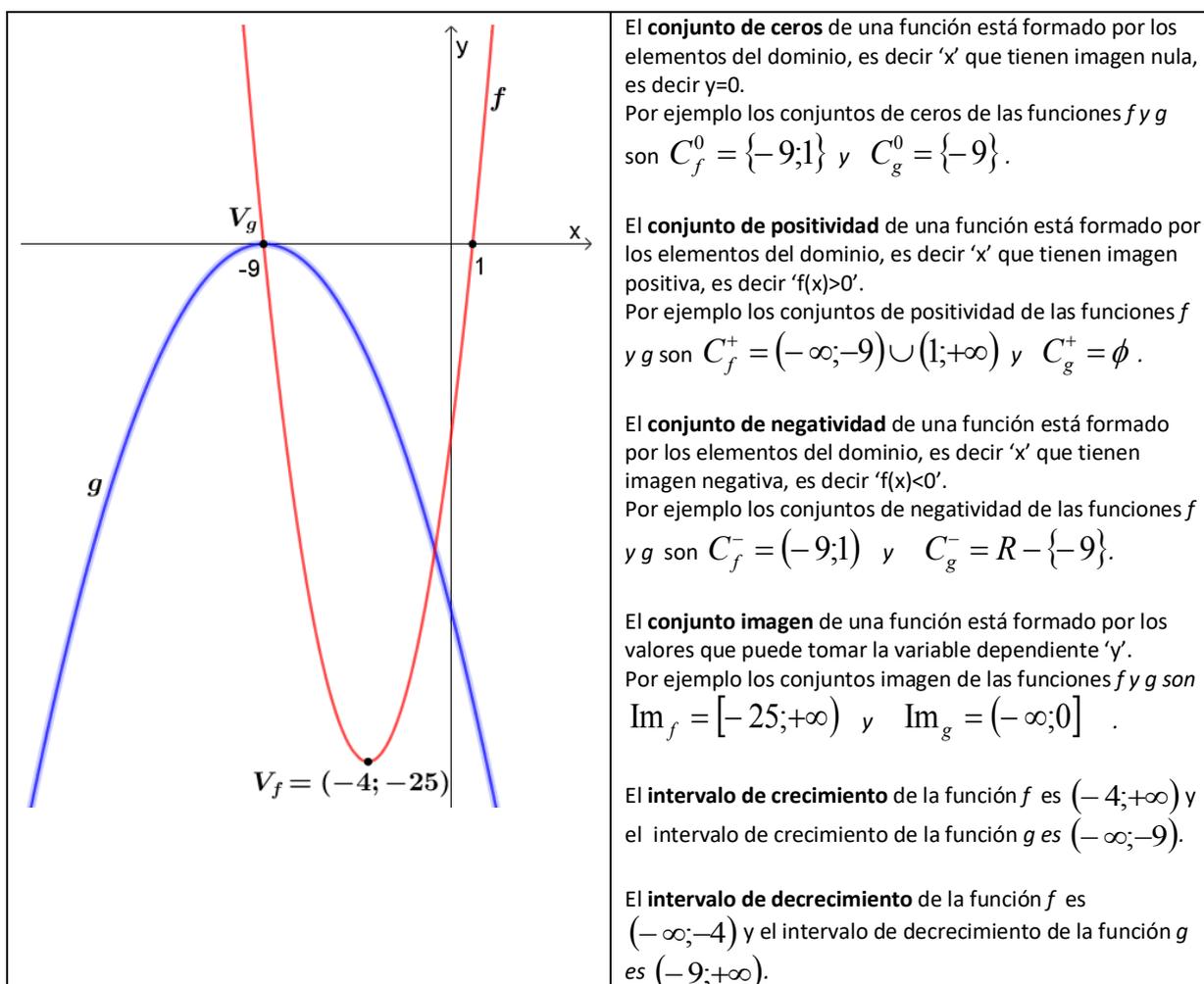
$$g(x) = 4(x-3)^2 - 1$$

$$h(x) = -2(3x-1)^2 - \frac{1}{2}$$

$$i(x) = -2(x+3)^2$$

$$j(x) = x^2$$

### RECORDAMOS ALGUNAS DEFINICIONES

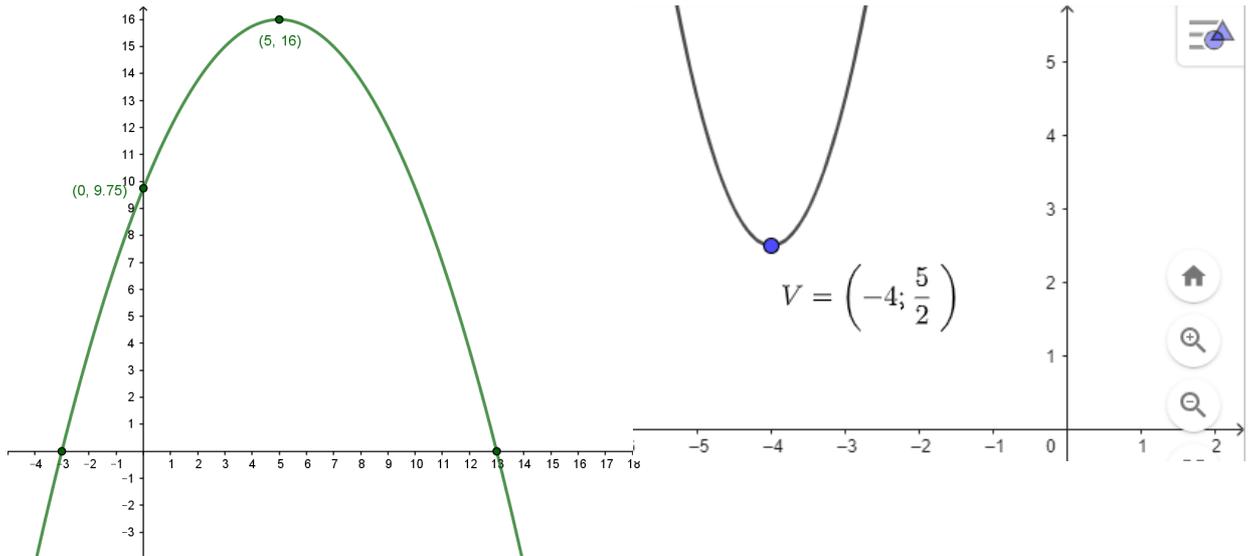


9)

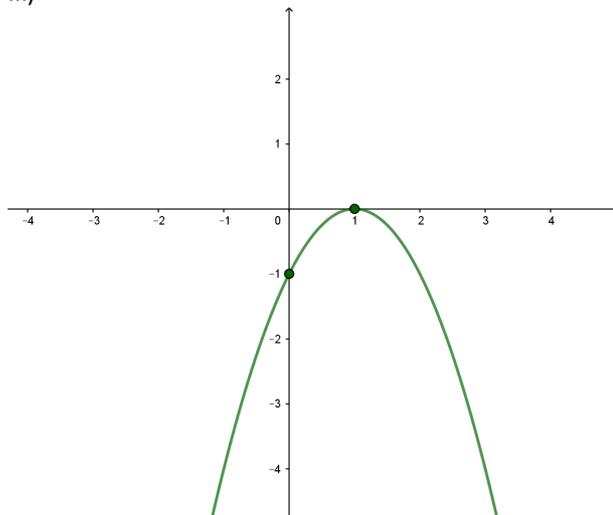
a) Para cada una de las funciones representadas en los siguientes gráficos, indiquen su conjunto de positividad, su conjunto de negatividad, su imagen y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

i)

ii)



iii)

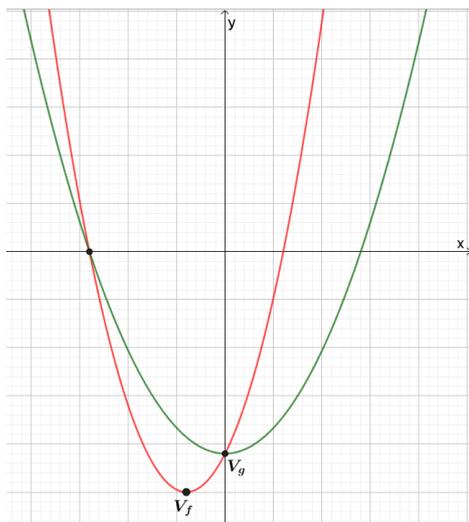


**10)**

- a) Hallen, para cada una de las funciones del Problema 8, el conjunto de positividad, el conjunto de negatividad, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento y conjunto imagen.
- b) Escriban, si es posible, la ecuación de una parábola que tenga un máximo igual a 8 en  $x = -7$ , y que pasa por el punto  $(-5;6)$ . Luego hallen el conjunto de negatividad y el conjunto imagen.
- c) Escriban, si es posible, la ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a  $-8$  en  $x=1$  y pase por el punto  $(9;0)$ . Luego, hallen el conjunto de positividad y el conjunto imagen.
- d) Escriban, si es posible, la fórmula de una función cuadrática que decrece en  $(-\infty; 7)$  y tiene imagen  $[0; +\infty)$ . ¿Hay una sola posibilidad?

e) Escriban, si es posible, la fórmula de una función cuadrática que crece en  $(-\infty; -2)$ , tiene imagen  $(-\infty; 12]$  y pasa por el punto  $(-1;9)$ . Luego, hallen el conjunto de positividad y negatividad.

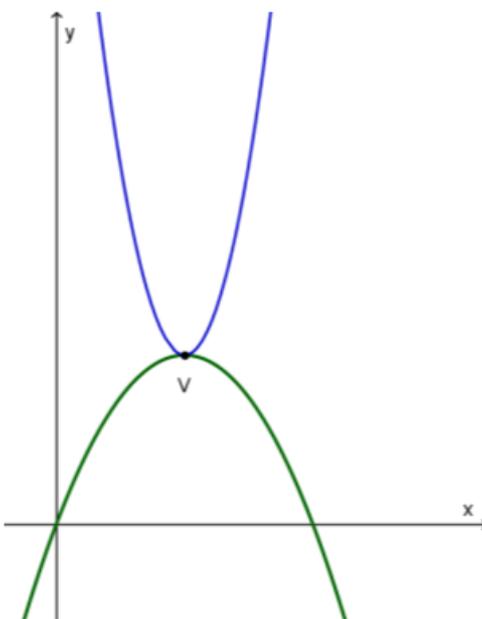
f) Una de las parábolas que se muestra tiene ecuación:  $y = \frac{1}{4}(x + 8)^2 - 25$ . Los puntos  $V_f$  y  $V_g$  son los vértices de las parábolas  $f$  y  $g$  respectivamente. Las parábolas  $f$  y  $g$  se cortan en los ejes coordenados.



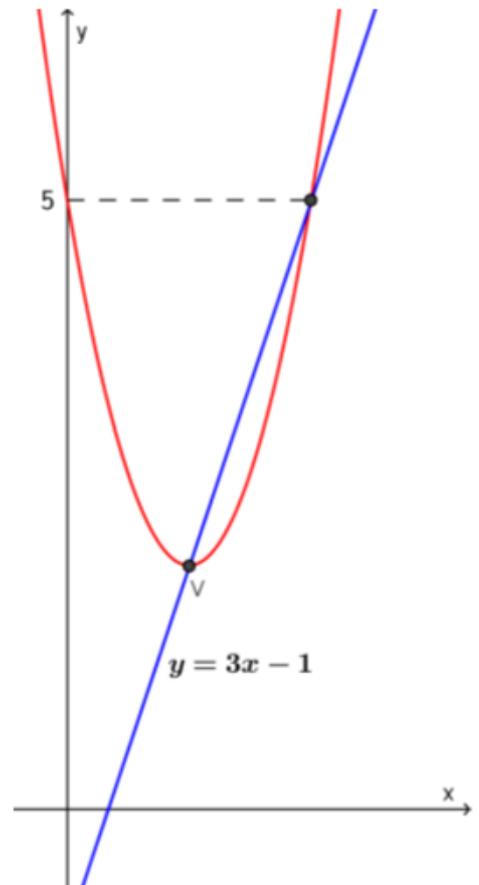
Determinen a qué parábola corresponde la fórmula dada y hallen la fórmula de la otra.

g) El conjunto imagen de la función cuadrática cuyo gráfico pasa por los puntos  $(3;-5)$  y  $(-9;-5)$  es  $Im = (-\infty;4]$ . Determinar el conjunto de positividad y negatividad de la función.

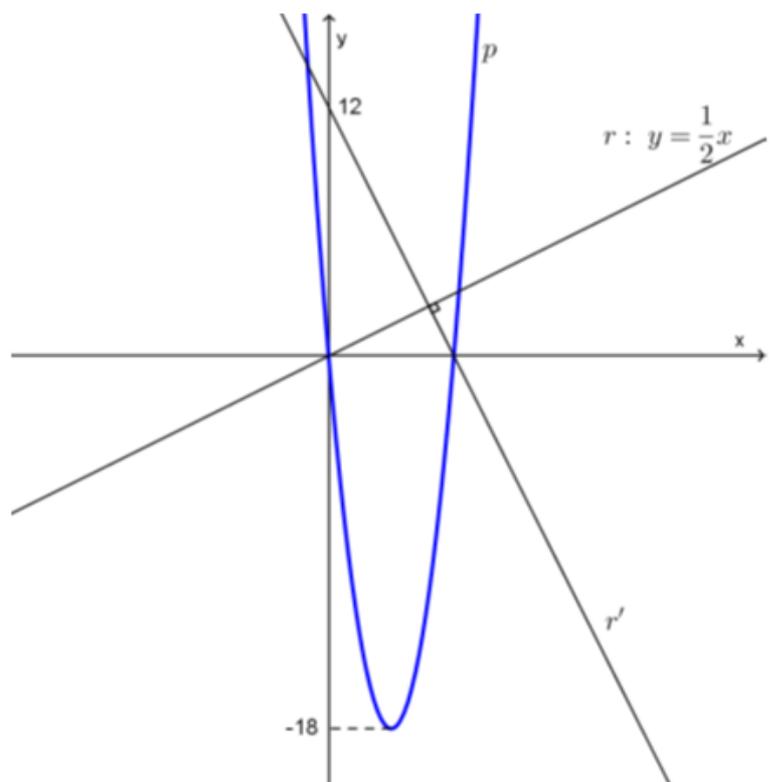
h) Las dos parábolas que se muestran a continuación comparten el vértice. La fórmula de una de ellas es  $y = (2x - 3)^2 + 2$ . El origen de coordenadas pertenece a uno de los gráficos. Hallar la fórmula de la otra.



i) La recta de ecuación  $y = 3x - 1$  pasa por el punto V (vértice de la parábola). Hallen la fórmula de la parábola.



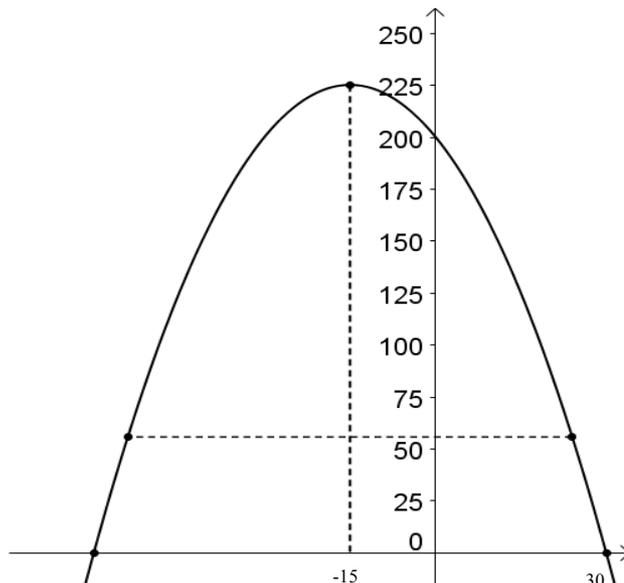
j) En la imagen se muestran una parábola y dos rectas perpendiculares. Las raíces de las rectas coinciden con las raíces de la parábola.



Determinen la ecuación de la parábola p.

## SEGUNDA PARTE

1) Marcar todas las fórmulas que pueden corresponder al gráfico. Expliquen por qué.



a)  $y = -\frac{1}{9}(x+15)^2 + 225$

b)  $y = \frac{1}{9}(x+15)^2 + 225$

c)  $y = -\frac{1}{9}(x+60)(x-30)$

d)  $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{30}{9}x + 225$

e)  $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{30}{9}x + 200$

f)  $y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{30}{9}x + 200$

2)

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones tienen el mismo gráfico que  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4,5$

I)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

II)  $y = -\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$

III)  $y = -\frac{1}{2}(5x-5)^2 + 4,5$

IV)  $y = -\frac{1}{2}(x-2)x + 4$

V)  $y = -\frac{1}{2}(x-6)(x+4) - 8$

b) Consideren todas las funciones de la parte a),

b<sub>1</sub>) ¿En cuál o cuáles de las fórmulas pueden "leer" las coordenadas del vértice de la parábola que define?

*b<sub>2</sub>) ¿En cuál o cuáles pueden “leer” las raíces?*

*b<sub>3</sub>) ¿Qué información pueden leer de las fórmulas IV y V?*

*b<sub>3</sub>) Grafiquen la parábola y ubiquen en el gráfico la información que se puede leer en cada fórmula.*

**3)** Para cada una de las siguientes funciones, se pide:

$$f(x) = -2(x-3)(x+5) \quad g(x) = 2x(x+6) \quad h(x) = -x \cdot (x+21)$$

$$j(x) = x(x-6) + 1$$

$$k(x) = (x-9)(x+21) + 3 \quad m(x) = (15-5x)(x+5) \quad n(x) = x^2 + 65 \quad p(x) = (x-4)^2$$

a) Decidan si tienen máximo o mínimo y hállolo.

b) Grafiquen las funciones anteriores. Ubiquen, en cada parábola, el vértice y un par de puntos simétricos.

**4)** Decidan, en cada caso, si f y g tienen el mismo vértice. Hallen las coordenadas del vértice.

a)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$                        $g(x) = x(x+2) - 1$

b)  $f(x) = 2x(x-4) + 6$                        $g(x) = \frac{1}{8}(x+2)(x-6)$

c)  $f(x) = x^2 - 4x$                        $g(x) = (x+1)(x-5)$

d)  $f(x) = 2x(x-6) + 10$                        $g(x) = x^2 - 6x + 1$

e)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$                        $g(x) = 2x^2 - 8x + 7$

**5)** Realicen un gráfico aproximado de la siguiente parábola:  $y = x^2 + 16x + 66$ .

**6)**

A) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación con una velocidad inicial de 10 metros por segundo.

Se sabe que  $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ , es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra la piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

a) ¿A qué altura se encuentra la piedra 0,5 segundos después de que fue lanzada?

b) ¿A qué altura se encuentra la ventana?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra y en qué momento la alcanza?

B) Supongamos que en el mismo instante en que se lanza la piedra del problema anterior, simultáneamente, desde el suelo, se lanza otra piedra con una velocidad de 20 m/s. Se sabe que en este caso  $j(t) = -5t^2 + 20t$  es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra esta piedra, medida desde el suelo,  $t$  segundos después de que fue lanzada.

- ¿En qué momento esta piedra vuelve a tocar el suelo?
- Una persona sentada dentro de la habitación, ¿puede ver pasar a esta piedra?
- ¿En algún momento las piedras alcanzan la misma altura? ¿A qué altura sucede esto?
- ¿Dónde se encuentra la piedra que fue lanzada desde la ventana cuándo la que se lanzó desde el suelo alcanza la altura máxima?

7) Decidan si cada una de las siguientes funciones tiene máximo o mínimo y hállo. Confeccionen, en cada caso, un gráfico aproximado. Ubiquen dos puntos simétricos y el vértice.

$$f(x) = -2(x - 7)(x + 1) - 3$$

$$h(x) = x^2 + 5x$$

$$j(x) = 2x^2 - 6x$$

$$l(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$g(x) = x(x + 3) + 4$$

$$i(x) = -x^2 + 10x - 25$$

$$k(x) = 4x^2 + 3x$$

$$m(x) = x^2 - 12x - 35$$

8)

- Propongan la fórmula de una función cuadrática que tenga raíces  $x = 0$  y  $x = -4$ . ¿Es única?
- Propongan las fórmulas de dos parábolas cuyos ceros sean 3 y  $-7$ .
- ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática  $f$  que verifique:  $f(0) = f(4) = 0$  y  $Im = (-\infty; 8]$ ?
- Propongan la fórmula de una parábola que pase por los puntos  $(0; 8)$ ,  $(-4; 8)$ . ¿Es única?
- Propongan la fórmula de una parábola que pase por los puntos  $(0; 8)$ ,  $(-4; 8)$  y  $(-3; 6)$ .

9)

a) Hallen los ceros de las siguientes funciones  $f(x) = 4(x + 3)^2 - 100$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$$

b) Transformen, si es posible, las fórmulas del ítem a) para que se puedan "leer" las raíces.

10)

a) Hallen el conjunto de ceros de las siguientes funciones cuadráticas:

$$m(x) = -4(x-2)(x-4) + 12 \quad h(x) = 3x^2 + 18x - 21 \quad g(x) = -x^2 - 2x \quad f(x) = -2x^2 -$$

$$4x - 2 \quad j(x) = 3x^2 + 5$$

b) Transformen, si es posible, las fórmulas del ítem a) para que se puedan "leer" las raíces.

c) Hallen el conjunto de positividad, negatividad e imagen para cada una de las funciones del ítem a).

### TERCERA PARTE

1) Demuestren que los valores de 'x' que satisfacen la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  (en el caso de que tenga solución), se pueden calcular con las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2) Resuelvan las siguientes ecuaciones utilizando los resultados del ejercicio anterior:

a)  $3x^2 - 5x + 2 = 0$       b)  $12x - 4 - 9x^2 = 0$       c)  $x \cdot (x+3) = 5x+3$       d)  $x^2 = 3(x-1)$

[Video con la resolución de la ecuación a.](#)

[Video con la resolución de la ecuación b.](#)

[Video con la resolución de la ecuación c.](#)

[Video con la resolución de la ecuación d.](#)

3) Resuelvan las siguientes situaciones problemáticas:

a) En un rectángulo de área  $40 \text{ cm}^2$ , la base mide 3 cm más que la altura.

Determinen el perímetro del rectángulo.

b) Uno de los lados de un rectángulo mide 4 cm más que el otro y su área es  $96 \text{ cm}^2$ .

Calculen el perímetro del rectángulo.

[Video con las resoluciones de los ejercicios 3 a y b.](#)

4) Determinen los puntos de intersección de la parábola con vértice en el punto  $(1; -7)$  que pasa por el punto  $(2; -5)$  y la recta de ecuación  $y = -2x+7$ . Grafiquen.

[Video con la resolución](#)

5) Una piscina rectangular de 15m de largo por 9m de ancho está rodeada por un camino de cemento de ancho uniforme. Si el área del camino es  $81 \text{ m}^2$  ¿Cuánto mide el ancho del camino?

[Video con la resolución](#)

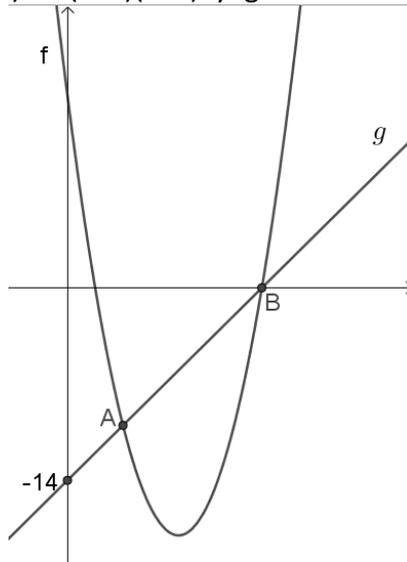
6) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación. La fórmula  $h(t) = -5t^2 + 8t + 13$  permite calcular la altura "h" de una piedra, medida desde el suelo, "t" segundos después de ser lanzada.

a) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en caer el suelo?

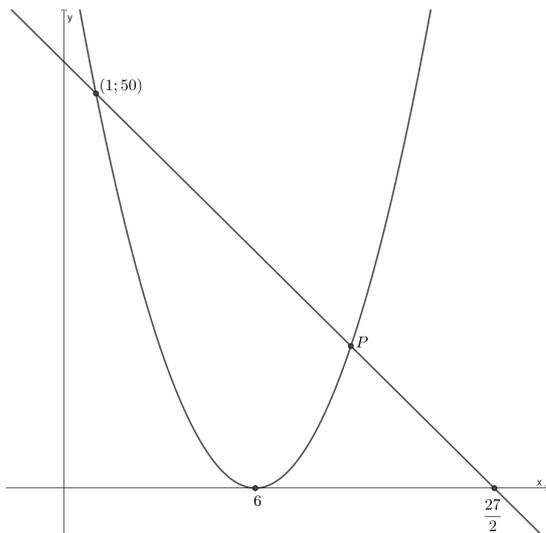
b) ¿En qué momento del descenso la piedra está a 9m del suelo?

c) Grafiquen h. (Coloquen el punto que indica la altura máxima y las respuestas de los ítems a y b).

7) Se muestran los gráficos de  $f(x) = 2(x-1)(x-7)$  y g. Determinen las coordenadas del punto A.



8) La parábola que se muestra tiene un único cero. La recta r corta a la parábola en los puntos (1;50) y P.



a) Determinen las fórmulas de la recta y la parábola.

b) Determinen las coordenadas del punto P.

9) Cuando se produce una cantidad t (en miles de toneladas) de una cierta mercadería, dos productores obtienen una ganancia mensual (en millones de pesos) que viene dada por las siguientes funciones

$$P_1(t) = -2(t - 1,5)(t - 6,5)$$

$$P_2(t) = 2t - 7,5$$

Donde  $P_1$  y  $P_2$  son las ganancias del productor 1 y del productor 2 respectivamente. Los casos en los que las ganancias sean negativas se consideran como pérdidas.

Así, por ejemplo, si el productor 1 produce 5500 toneladas, su ganancia será de 8 millones de pesos ya que  $P_1(5,5) = 8$ . En cambio, si produjera 1000 toneladas, como  $P_1(1) = -5,5$  sufriría pérdidas por 5,5 millones de pesos.

- a. Transformen la expresión  $P_1(t)$  para que pueda leerse directamente la cantidad que debe producir el productor 1 para obtener la máxima ganancia.
- b. ¿Qué pérdida o ganancia obtiene el productor 2 si produce la misma cantidad que tiene que producir el productor 1 para obtener su máxima ganancia?
- c. ¿Cuál es la mínima cantidad que debe producir cada uno para no obtener pérdidas?
- d. ¿Cuánto deben producir ambos productores para obtener la misma ganancia?

**10)** Determinen, si existen, el o los puntos en los cuales se intersecan las gráficas de  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  y  $g(x) = -x^2 + 5x - 2$ . Luego grafiquen ambas funciones de modo que se observen los puntos de intersección (si los hubiera).

[Video con la resolución](#)

**11)** El área de un rectángulo es  $80 \text{ cm}^2$  y el perímetro 36 cm. Calculen las medidas de los lados del rectángulo.

[Video con la resolución](#)

**12)** Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen.

- a) El gráfico de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  tiene una sola raíz si  $b^2 - 4ac = 0$ .
- b) Para que la familia de parábolas dadas por la fórmula  $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + 9$  tengan dos raíces,  $b$  tiene que tomar exclusivamente valores del intervalo  $(3; +\infty)$ .
- c) El único valor posible de  $c$  para que el gráfico de  $h(x) = -2x^2 + 3x + c$  no corte al eje X, es  $c = -2$ .

**13)** Sea  $f(x) = 3x^2 + bx + 1$  indiquen para qué valores de  $b$ .

- a.  $f(x)$  tiene exactamente una raíz.
- b. El gráfico de  $f(x)$  no "toca" ni "atraviesa" al eje X.

**14)** Vuelvan al ejercicio 8 y propongan una recta paralela a  $r$  que corte a la parábola en un solo punto. Determinen las coordenadas del punto de intersección.

## Unidad 4: Funciones polinómicas

### Definición

La expresión:  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_n \neq 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  se denomina **POLINOMIO** de grado  $n$ .

### Ejercicios

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

- a)  $x^3$
- b)  $\sqrt{5 + x^2}$
- c)  $\frac{x+1}{x}$
- d)  $\sqrt{3x} + \sqrt{2}$
- e)  $x$
- f)  $\sqrt{x + 2}$
- g)  $(x - 1)(x + 3)$
- h)  $0$
- i)  $1$
- j)  $\frac{1}{x}$
- k)  $3x^{-2}$

2) Completar y ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la variable y determinar sus grados, el coeficiente principal y el valor del término independiente.

- a)  $\frac{1}{2} + x^4 - 2x^2$
- b)  $-1 + x$
- c)  $-3$
- d)  $0$
- e)  $-\frac{3}{4}x^5$
- f)  $-\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$
- g)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$
- h)  $\frac{x-1}{2} + \frac{2-x-x^2}{3}$

3) Determinar a, b y c (números reales) tales que los siguientes polinomios sean iguales:

- a)  $p(x) = a(3x - 5) + b(2x - 1) + cx^2$  y  $q(x) = 6 - 5x$
- b)  $p(x) = a(2x + 1) + (bx + c)(2x - 1)$  y  $q(x) = (x + 1)(4x + 3)$

**Nota:** la igualdad de polinomios significa que son del mismo grado y PARA TODO VALOR DE X se verifica que  $p(x) = q(x)$ . Esto significa la igualdad de las expresiones algebraicas.

Notemos la diferencia con la resolución de ecuaciones. En una ecuación, también se plantea una igualdad, pero esa igualdad se verifica sólo para algunos valores que son sus soluciones o raíces.

Por ejemplo, cuando se pide resolver la ecuación  $7(3x - 5) + 2(2x - 1) + 3x^2 = 6 - 5x$  se pide que se hallen, si existen, el o los valores de  $x$  que satisfacen esta igualdad, que obviamente NO se verifica para todo  $x$ .

### Definición

La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  se denomina **función polinómica** de grado  $n$ .

Las funciones lineal y cuadrática que hemos estudiado en las unidades anteriores son casos particulares de esta cuando  $n$  es menor o igual a 2.

En esta unidad trabajaremos con funciones polinómicas de cualquier grado.

4) Sean  $f$  y  $g$  dos funciones lineales, definimos la función  $h(x)$  de la siguiente manera: para cada valor de  $x$ ,  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

A partir de los gráficos de  $f(x)$  y de  $g(x)$  que se dan a continuación

a) Calcular el valor de  $h(x)$  en cada caso:

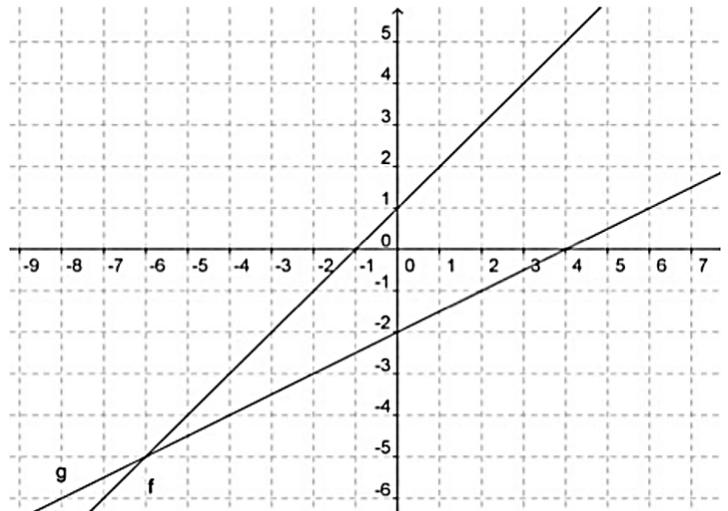
- |               |                  |
|---------------|------------------|
| i. $h(0) =$   | v. $h(-2) =$     |
| ii. $h(2) =$  | vi. $h(4) =$     |
| iii. $h(6) =$ | vii. $h(-8) =$   |
| iv. $h(3) =$  | viii. $h(4,5) =$ |

b) Decidir si  $h(x)$  es negativa, positiva o cero:

- |                |                |
|----------------|----------------|
| i. $h(-10) =$  | iv. $h(5) =$   |
| ii. $h(-20) =$ | v. $h(-2,5) =$ |
| iii. $h(-1) =$ |                |

c) Hallar  $h(-15)$ .

d) Hallar la forma general de  $h(x)$  y realizar un gráfico aproximado.



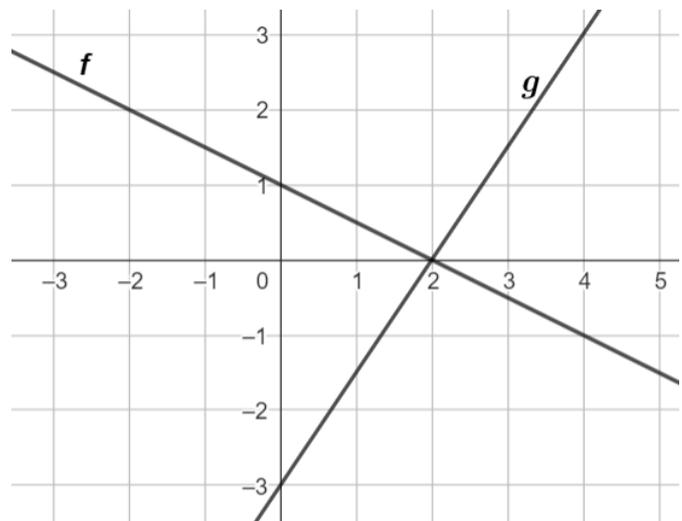
5) En el siguiente sistema de coordenadas se da la representación gráfica de  $f(x)$  y de  $g(x)$ , ambas funciones lineales. Definimos

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

a) Establecer el conjunto de valores de  $x$  para los cuales la función  $h(x)$  es positiva, negativa o cero.

b) Proponer un gráfico aproximado de  $h(x)$ .

c) Escribir la forma factorizada y general de la función  $h(x)$ .



Llamamos **intervalo de positividad** de una función al subconjunto del dominio en el cual  $f$  es positiva, es decir  $C^+(f) = \{x \in D_f / f(x) > 0\}$

Análogamente, **intervalo de negatividad** de  $f$ :  $C^-(f) = \{x \in D_f / f(x) < 0\}$

6) a) ¿Es cierto que siempre que “multiplicamos” dos rectas obtenemos una parábola?

b) ¿Cómo obtenemos los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la parábola a partir de los gráficos de las rectas?

- c) ¿Es cierto que toda parábola puede ser escrita como el “producto” de dos rectas?  
 d) ¿Cómo deben ser las rectas para que su “producto” sea una parábola que tenga máximo?  
 e) ¿Cómo deben ser las rectas para que su “producto” sea una parábola con un cero doble? ¿Y con dos ceros simples?

Sugerimos usar geogebra.

- 7) a) Se sabe que  $h(x) = -8x^2 - 4x + 24$  es producto de dos funciones lineales  $g(x)$  y  $f(x)$ . ¿Puede ser  $g(x) = 2x + 4$ ? Si les parece que sí, encontrar  $f$ . Si les parece que no, justificar.  
 b) Estudiar la misma situación del ítem a) si  $h(x) = 0,5x^2 + 1,5x - 9$  y  $g(x) = x + 2$ .

### División de polinomios

Dados  $p(x)$  y  $q(x)$  dos polinomios,  $q(x) \neq 0$  y  $gr[p(x)] \geq gr[q(x)] \Rightarrow$  existen y son únicos  $c(x)$  y  $r(x)$  tales que:  $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$ , siendo:

$p(x)$  el dividendo,  $q(x)$  el divisor,  $c(x)$  el cociente y  $r(x)$  el resto, verificandose que  $gr r(x) < gr q(x)$  ó  $r(x)=0$ .

#### Ejemplo:

Sean  $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3$  y  $q(x) = x^2 - 2x + 1$

Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de  $x$  y el dividendo debe completarse.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 \quad \Big| \quad x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - x^2} \phantom{+ 0x - 3} \\
 -3x^2 + 0x - 3 \\
 \underline{3x^2 - 6x + 3} \\
 -6x
 \end{array}$$

Así, el cociente es  $C(x) = x^2 - 3$  y el resto  $R(x) = -6x$

8) Dividir  $a(x)$  y  $b(x)$ , en cada caso:

a)  $a(x) = 3x^3 - 2x^5 - 2x^2 - 2x + 5$  y  $b(x) = x^3 - x + 2$

b)  $a(x) = 5x^4 - 2x^5 - x^2 + 1$  y  $b(x) = -2x^2 - x$

c)  $a(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$  y  $b(x) = -x + 1$

### Regla de Ruffini

Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio por otro que guarda la forma:  $x - a$  con  $a$  número real.

#### Ejemplos:

l) Hallar el cociente y el resto de la división

$$(-6x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2) : (x + 1)$$

La disposición práctica es la siguiente:

			-6	2	-1	-1	2	
			coeficientes del dividendo					
opuesto del termino ind. del div. o sea, "a"		-1						
				6	-8	9	-8	
			-6	8	-9	8	-6	
			coeficientes del cociente					resto

$$C(x) = -6x^3 + 8x^2 - 9x + 8 \quad R(x) = -6$$

$$II] (7x^4 + 1 - 2x^2) : (x - 3)$$

		7	0	-2	0	1
3			21	63	183	549
		7	21	61	183	550

$$C(x) = 7x^3 + 21x^2 + 61x + 183 \quad R(x) = 550$$

#### Notas:

- En todos los casos de división entre un polinomio  $p(x)$  y un binomio de la forma  $x - a$  el resto es una constante. Justificar.
- Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es divisible por el divisor.

#### Ejemplos:

$$I] (x^2-9) : (x-3)$$

$$c(x)=x+3 \quad r(x)=0$$

$x^2-9=(x-3)(x+3)$  hemos factorizado el dividendo

II] Polinomios ya factorizados:

$y=x^2(x-1)$  es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son  $x_1=0$  (doble) y  $x_2=1$  (simple)

$y=2x(x-1)^2(x+2)^3$  es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son  $x_1=0$  (simple)

$x_2=1$  (doble) y  $x_3=-2$  (triple)

$y=x(x+1)(x^2+1)$  es una función polinómica de grado 4. Tiene solo 2 ceros reales  $x=0$  y  $x=-1$

#### Teorema del resto

El resto de la división  $p(x) : (x-a)$  con  $a$  real es  $r=p(a)$

Lo demostraremos:

$p(x)$	$x-a$
$r$	$q(x)$

$$p(x)=(x-a) \cdot q(x)+r$$

$$p(a)=(a-a)q(a)+r=r$$

Ejemplo: Siendo  $p(x)=x^3+kx^2-kx-9$  determinar  $k$  para que  $-3$  sea raíz de  $p(x)$ .

$$p(-3)=0=(-3)^3+k(-3)^2-k(-3)-9 \quad k=3$$

O sea  $p(x)=x^3+3x^2-3x-9$  es divisible por  $(x+3)$ , o sea por  $(x-(-3))$

Podría factorizarlo:

	1	3	-3	-9
-3				
	1	0	-3	0

$$p(x)=(x+3)(x^2-3)$$

**¡¡¡¡¡IMPORTANTE!!!**

$$\text{Si } P(a) = 0 \leftrightarrow x = a \text{ es raíz de } P(x)$$

$$\leftrightarrow P(x) \text{ es divisible por } (x - a)$$

$$\leftrightarrow P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

**9)** Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre  $a(x)$  y  $b(x)$ . Verificar utilizando el teorema del resto.

a)  $a(x) = x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 1$        $b(x) = x - 2$

b)  $a(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x - 1$        $b(x) = x + 2$

c)  $a(x) = x^3 + m^3$        $b(x) = x + 2$

d)  $a(x) = 16x^4 + 1$        $b(x) = x + 1$

e)  $a(x) = -x + 2 - x^2 + x^5$        $b(x) = x - \frac{1}{2}$

f)  $a(x) = mx^4 - m^5$        $b(x) = x - m$

g)  $a(x) = (x - 3)^2 - 2(x + 1)$        $b(x) = 2x - (x - 1)$

**10)** Calcular  $m$  para que  $a(x)$  sea divisible por  $b(x)$

a)  $a(x) = x^4 - mx^2 + 1$     y     $b(x) = x + 1$

b)  $a(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 2$     y     $b(x) = x + 2$

c)  $a(x) = 2x^2 - 3x - 9$     y     $b(x) = x - m$

**11)** Sea  $a(x)=2x^4-x^2+mx-m$ , calcular “ $m$ ” sabiendo que la diferencia de los restos de su división por  $(x+m)$  y  $(x-m)$  es igual a  $-1$ .

**12)** Calcular el valor de  $a$ , si  $r$  es el resto de  $p(x):q(x)$

a)  $p(x) = 4x^3 - x^2 + ax - 2$  ,     $q(x) = x - 2$  ,  $r = 26$

b)  $p(x) = 5x^4 + ax^2 + ax^3 + 3x^2$  ,  $q(x) = x - 3$  ,  $r = 0$

c)  $p(x) = 3ax^4 + (a+1)x^3 + 2x^2$  ,  $q(x) = x + 1$  ,  $r = -1$

**13)** En una división de polinomios se cumple que:

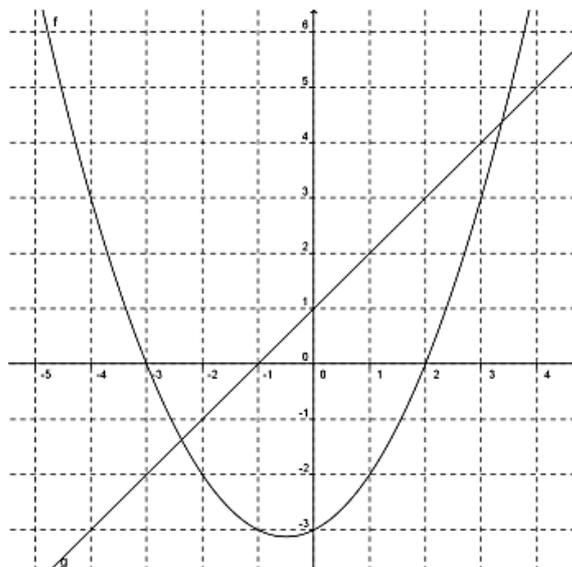
divisor:  $2x^2 + x + 5$

cociente:  $x^2 + x$

resto:  $x+6$   
hallar el polinomio dividiendo.

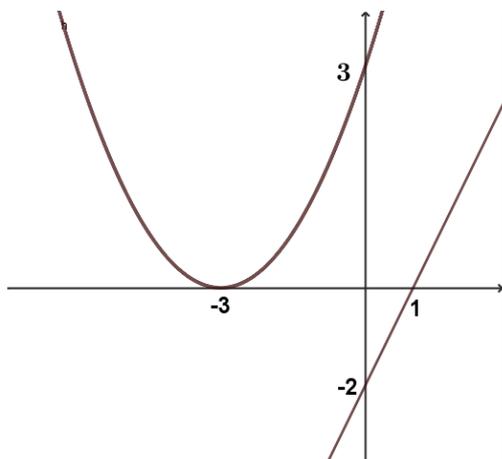
**14)** A continuación se dan los gráficos de  $f(x)$  y de  $g(x)$ . Considerar la función producto  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

- a) Calcular el valor de  $h(x)$  en cada caso:
- i.  $h(1) =$                       iv.  $h(-2) =$
  - ii.  $h(0) =$                       v.  $h(3) =$
  - iii.  $h(-3) =$                     vi.  $h(-4) =$
- b) Decidir si  $h$  es positiva, negativa o cero en cada caso:
- i.  $h(6) =$                       iv.  $h(0) =$
  - ii.  $h(1,5) =$                     v.  $h(-2,5) =$
  - iii.  $h(-4) =$                     vi.  $h(-20) =$
- c) Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.
- d) Hallar la forma factorizada y general de  $h(x)$  y realizar un gráfico aproximado.

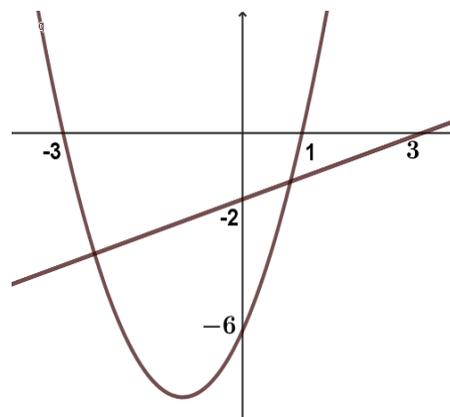


**15)** A partir de la información dada en cada uno de los gráficos, hallar la expresión factorizada de cada función  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

a)

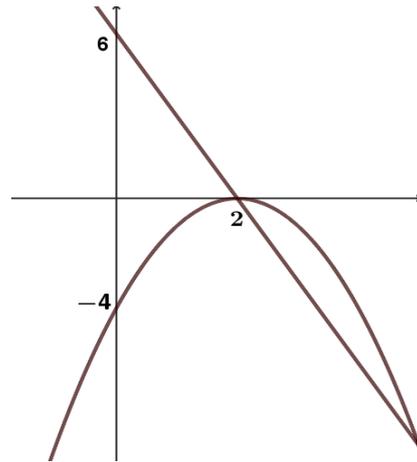
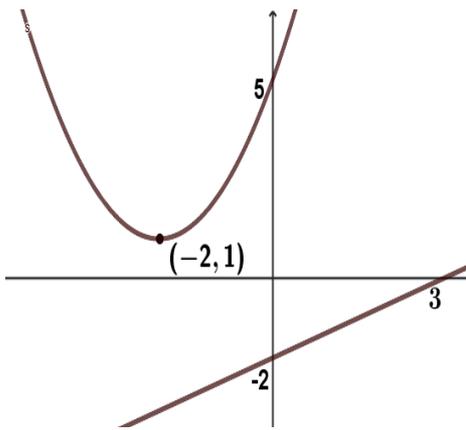


b)

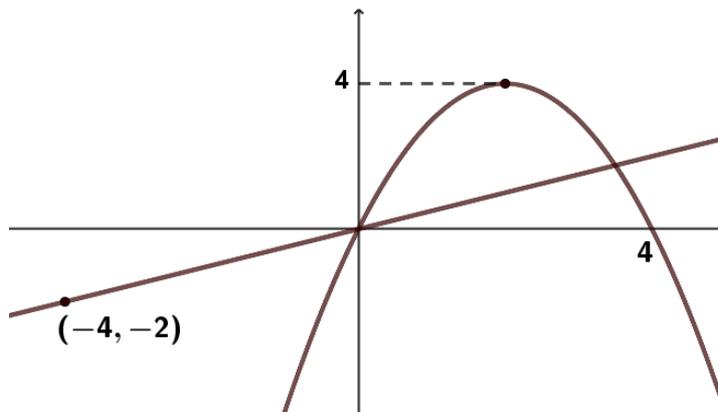


c)

d)



e)



❖ **Sobre los ceros (o raíces) de una función polinómica:**

Los ceros de una función polinómica son las raíces de la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Si esta ecuación asociada a la función tiene raíz  $x_0$ , simple o múltiple de orden impar, la gráfica de  $f$  atraviesa al eje  $x$  en  $x_0$ .

Si la ecuación asociada a la función tiene raíz  $x_0$ , múltiple de orden par, la gráfica de  $f$  no atraviesa al eje  $x$  en  $x_0$ .

Ejemplo:

Dada la función polinómica:  $f(x) = x^3 - 3x$  deseamos conocer los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores positivos o negativos.

$$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$$

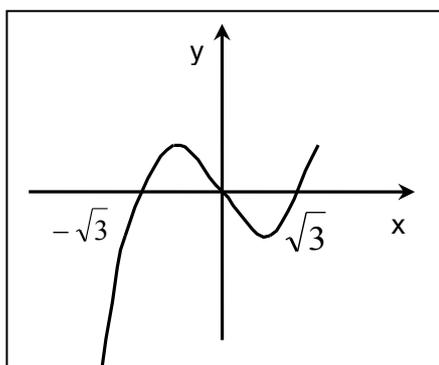
Ceros:  $x=0$   $x=\sqrt{3}$   $x=-\sqrt{3}$

Son tres ceros simples  $\Rightarrow$  la gráfica de  $f$  atraviesa al eje  $x$  en cada uno de ellos.

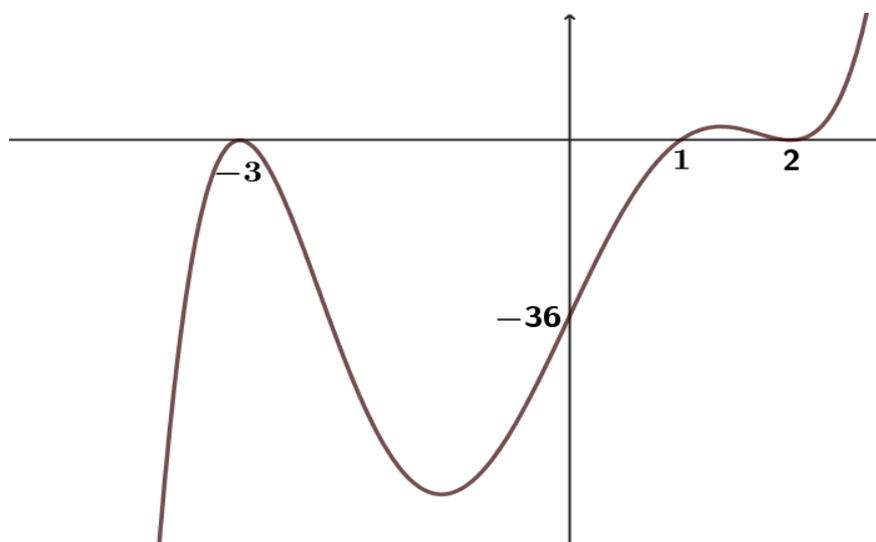
Completar la tabla con signo + si la función es positiva y signo - si es negativa.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f(x)							

Si además de esto pudiéramos encontrar los máximos y mínimos podríamos dibujarla.  
(la función polinómica es continua)



16) Escribir un polinomio  $P(x)$  cuyo gráfico sea el siguiente. ¿Es único?



17) En cada caso, hallar, si existe, la fórmula de una función cúbica  $h$  que verifique lo pedido. Si les parece que no existe explicar por qué:

- Las raíces son  $-5$ ,  $-2$  y  $4$ , y  $h$  toma valores negativos para  $x$  mayores que  $4$ . ¿Es única?
- Las raíces son  $-3$ ,  $2$  y  $8$  y el gráfico de  $h$  corta al eje de las  $y$  en  $12$ . ¿Es única?
- Las raíces son solamente  $0$  y  $-1$  y  $h(1) = 10$ . ¿Es única?
- que tenga un solo cero y esté en  $x = 7$ . ¿Es única?
- que tenga un solo cero, que esté en  $x = 7$  y que sea una raíz simple. ¿Es única?
- que tenga un cero doble en  $x = -5$ . ¿Es única?
- que tenga como única raíz  $x = -5$  y que su orden de multiplicidad sea  $2$ .
- que tenga ceros en  $x = -\frac{1}{5}$ ,  $x = 3$ ,  $x = -3$  y en  $x = 0$ .
- que no tenga ceros.

18) La función  $h(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$  es el producto de  $g(x)$  y  $f(x)$ .

- a) ¿Puede ser que una de ellas sea  $g(x) = -2x - 1$ ? Si les parece que sí encuentren  $f$ . Si les parece que no, justificar.
- b) ¿Y si fuera  $g(x) = x - 1$ ?
- c) Si es posible, escribir  $h(x)$  como producto de tres lineales. De no ser posible, explicar por qué.

**19)** Dadas las funciones:

$$h_1(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

$$h_2(x) = -2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$$

$$h_3(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$$

$$h_4(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

- a) ¿Todas estas funciones tienen por raíz  $x = 1$ ? Usando este dato busquen, si es posible, una recta y una parábola cuyo producto sea  $h$ .
- b) Si es posible, escribir las funciones polinómicas dadas como producto de tres lineales. De no ser posible, explicar por qué.
- c) Realizar un gráfico aproximado de cada función  $h$ .

**20)** Escribir un polinomio que cumpla con las condiciones pedidas.

- a) de grado 4 que tenga como únicas raíces a:  $-1$  y  $2$ .
- b) de grado 4 que tenga al menos 2 raíces simples reales:  $-1$  y  $2$ .

**21)** Escribir, en cada caso, un polinomio que cumpla las siguientes condiciones:

- a) de grado 8 tal que  $-1$  es una raíz de multiplicidad 3, cero sea una raíz de multiplicidad 5 y cuya gráfica pase por el punto  $(-2; -8)$ .
- b) de grado 5 tal que sus únicas raíces reales sean  $x = 1$  de multiplicidad 2 y  $x = -2$  de multiplicidad 1 y además  $p(-1) = 3$

**22)** Mostrar que 1 es una raíz de multiplicidad 3 de  $p(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$ . Encontrar la otra raíz.

**23)** Sea  $P(x) = a \cdot (x + 7) \cdot (x - 1) \cdot (x + m)$  un polinomio de grado 3, hallar  $a, m \in R$  sabiendo que  $C^+ = (-\infty; -7)$  y  $P(0) = -14$ .

**24)** Determinar una función polinómica y graficar aproximadamente:

- a) de grado 4 sabiendo que  $C^0 = \{2; 4\}$ ,  $C^- = \emptyset$  y  $f(3) = \frac{1}{2}$ .
- b) de grado 3 sabiendo que  $C^- = (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$  y la ordenada al origen es  $y = -9$ .
- c) de grado mínimo, cuya ordenada al origen sea  $y = -10$ , sus únicas raíces sean  $-5, -1, 3$  y  $4$ , y  $C^+ = (-5; -1) \cup (4; +\infty)$ .
- d) de grado 4 cuyo conjunto de negatividad es  $C^- = (-3; 0)$ ; su coeficiente principal es  $1/90$ ,  $P(2) = 4/9$  y todas sus raíces son reales.
- e) de grado 4 cuyo  $C^+ = \emptyset$ ,  $C^- = R$  y pasa por el punto  $(0; -5)$ .

### Factorización de un polinomio

Cuando  $b$  es un cero o raíz de un polinomio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $(x-b)$  es divisor de  $p(x)$ , luego  $p(x)$  podría factorizarse como:

$p(x) = (x-b)q(x)$ , siendo  $q(x)$  el cociente de la división

Es posible que  $q(x)$  tenga más raíces con lo que puede iterarse el proceso factorizando  $q(x)$ . Es decir,  $p(x)$  puede descomponerse en más factores si conocemos todas sus raíces reales.

$$p(x) = a_n(x - b_0)(x - b_1)\dots(x - b_n)$$

Ejemplo: la factorización de una función polinómica de grado 3 cuyos ceros son  $x_1=0$   $x_2=1$  y  $x_3=-2$ , es:  
 $y=a.x.(x-1).(x+2)$

El valor de "a" no está determinado, por lo tanto existen infinitas funciones que cumplen con la condición. Podemos obtener una de ellas dándole un valor cualquiera a "a" no nulo.

Si se pidiese que la función sea tal que además cumpla que  $f(2)=4$

$f(2)=a.2(2-1)(2+2)=4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ , es decir, "a" queda determinado

$$y = \frac{1}{2}x(x - 1)(x + 2)$$

Nota aclaratoria:

Un polinomio de grado no nulo es primo cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. Son primos únicamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales. Cuando un polinomio no es primo es compuesto.

### Teorema de Gauss

Sea  $m(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polinomio en el cual sus coeficientes son números enteros. Si existen raíces racionales de  $m(x)$ , entonces dichas raíces son de la forma

$\frac{p}{q}$  donde  $\begin{cases} p \text{ divide a } a_0 \\ q \text{ divide a } a_n \end{cases}$  con  $p$  y  $q$  primos entre sí y  $a_0 \neq 0$ .

Si bien las raíces de un polinomio de las características enunciadas pueden no ser racionales, el teorema de Gauss permite buscar fácilmente sólo las que lo son, logrando una factorización del polinomio  $m(x)$ .

Ejemplos:

I] Factorizar  $p(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

Vemos que  $a_n=1$  y  $a_0=12$ .

divisores de  $a_0 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

divisores de  $a_n = \{\pm 1\}$

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

Por ser  $a_n=1$  vemos que los divisores de 12 son las posibles raíces de  $m(x)$

$m(1)=0 \Rightarrow 1$  es raíz

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0

$$m(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$$

Buscamos las raíces de  $x^3+3x^2-4x-12$

Probemos con 1:  $1+3-4-12 \neq 0$ , 1 no es raíz  
 Probemos con -1:  $(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 12 \neq 0$ , -1 no es raíz  
 Probemos con 2:  $2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 0$ , 2 es raíz

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$$m(x) = (x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$$

factorizamos el trinomio de segundo grado:  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Luego, la factorización resulta

$$m(x) = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$$

II]  $m(x) = 3x^3 + 8x^2 - 2x - 4$ . Se ve que  $a_n = 3$  y  $a_0 = -4$

Buscamos los divisores de 4 y de 3.

Cualquier raíz debe estar entre los números:  $\pm \frac{2}{3}$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm \frac{1}{3}$ ,  $\pm 1$ ,  $\pm 4$ ,  $\pm \frac{4}{3}$

De estas 12 posibles sólo 3 pueden ser raíces de la ecuación  $3x^2 + 8x^2 - 2x - 4 = 0$

$$m\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

	3	8	-2	-4
-0.67		-2	-4	4
	3	6	-6	0

$$m(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 6)$$

Factorizamos el trinomio de segundo grado

$$3x^2 + 6x - 6 = 3(x - (-1 + \sqrt{3}))(x - (-1 - \sqrt{3}))$$

y vemos que sus raíces no son racionales, no hubieran surgido de Gauss: se puede probar que ninguno de los otros 11 valores es raíz del polinomio.

Hemos factorizado el polinomio  $m(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

## 25) Factorizar

a)  $x^2 - 2x + 3 + (x + 1)^2$

b)  $x^4 - 5x^2 + 4$

c)  $-4x^4 + 12x^2 - 9$

d)  $x^4 - 64$

e)  $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$

f)  $8x^4 - x$

g)  $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

h)  $x^5 - 2x^4 + 3x - 6$

i)  $\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{6}$

j)  $t(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$

k)  $r(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 8x + 8$

**26)** Determinar las raíces de los polinomios, establecer la multiplicidad de cada raíz y graficar aproximadamente.

a)  $p(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2$

b)  $t(x) = x^3(x^2 - 4)^2$

c)  $q(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

d)  $r(x) = (2x^2 - 4x + 2)(x^4 - x^2 - 12)$

### ❖ Clasificación de Funciones

**Función inyectiva:** Una función  $f: A \rightarrow B$  es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada B.

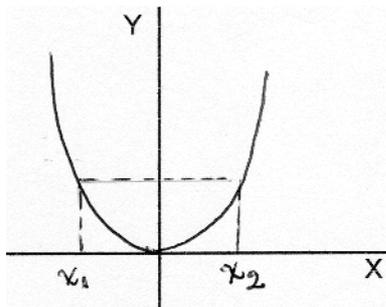
En símbolos:

$$\forall x_1, x_2 \in A: (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

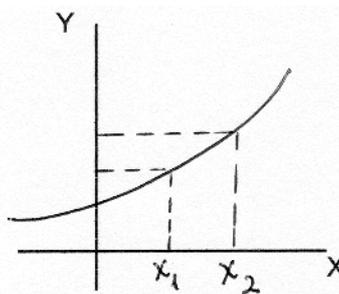
o bien,  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede interceptar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del conjunto imagen puede ser imagen de más de un elemento del dominio.

Nótese que  $f$  es inyectiva  $\Leftrightarrow f$  es estrictamente creciente ( o estrict. decreciente).



No es inyectiva



Es inyectiva

**Función sobreyectiva:** Una función  $f: A \rightarrow B$  es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen preimagen en el dominio A. Dicho con otras palabras el conjunto B y el conjunto imagen de  $f$  deben coincidir.

$$\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x)$$

**Función biyectiva:** Una función es biyectiva  $\Leftrightarrow$  es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

**27)** Sea la función cuya fórmula es  $f(x) = x^2 - 4$ .

a) Graficar.

b) Unir con flechas según corresponda:

- si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  no es inyectiva ni sobreyectiva
- si  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  no es función
- si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   $f$  no es inyectiva pero es sobreyectiva
- si  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   $f$  es inyectiva pero no es sobreyectiva

c) Indicar un par de conjuntos A y B para que:  $f: A \rightarrow B / f(x) = x^2 - 4$  sea función biyectiva.

**28)** Proponer el gráfico de una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  inyectiva y no sobreyectiva.

**29)** Dados  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{3, 7\}$

a) Definir, si es posible, una  $f: A \rightarrow B$  que sea:

a.1) Sobreyectiva

a.2) Inyectiva

b) Se puede definir en estos conjuntos una función biyectiva?

Explicar la respuesta

c) ¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos para que se pueda definir una función biyectiva entre ambos?

### ❖ Función Inversa

Se denomina **relación inversa** de una función  $f$  definida de A en B, a la que se obtiene de invertir los pares de  $f$  y se denomina  $f^{-1}$ .

Es decir dada  $f$  definida de A en B, cuya gráfica está constituida por los pares  $(a, b)$ , la relación inversa de  $f$  ( $f^{-1}$ ) está constituida por los pares  $(b, a)$ . Esta relación queda definida de B en A y no siempre es función en dichos conjuntos.

Por ejemplo: Si  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{3, 7\}$  y  $f: A \rightarrow B / f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 7)\}$ , su relación inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$ ,  $f^{-1} = \{(3, 1), (3, 2), (7, 3)\}$  No es función de B en A.

Qué condiciones debe cumplir una función  $f: A \rightarrow B$  para que su relación inversa sea función de B en A?

Si la función admite función inversa y existe una expresión analítica a través de una fórmula  $y = f(x)$ , para hallar la expresión analítica de la inversa cambiamos  $x$  por  $y$ , e  $y$  por  $x$  (es decir invertimos los pares), y despejamos la variable "y", si es posible.

**30)** Dada la función  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [2, +\infty) / f(x) = x^2 + 2$ . Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

**31)**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3$ . Clasificarla y hallar, si existe, su inversa. Representar.

**Los gráficos de funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, o sea la recta  $y = x$  siempre que la escala utilizada en ambos ejes sea la misma.**

32) Dadas las siguientes funciones definidas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ ,

- Hallar los ceros,
- escribir los intervalos de positividad y
- estudiar paridad.
- Graficar aproximadamente.
- Indicar conjunto imagen.

a)  $f(x) = x^3 + 2$

b)  $f(x) = (x + 2)^3$

c)  $f(x) = (x - 1)^3 + 2$

d)  $f(x) = -x^3$

e)  $f(x) = 2x^3$

f)  $f(x) = x^4$

g)  $f(x) = -x^4 + 3$

Clasificar las funciones del ejercicio 7 cuando están definidas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Indicar, cuando sea necesario, restricciones en los conjuntos para que sean biyectivas.

En esos conjuntos, definir las funciones inversas.