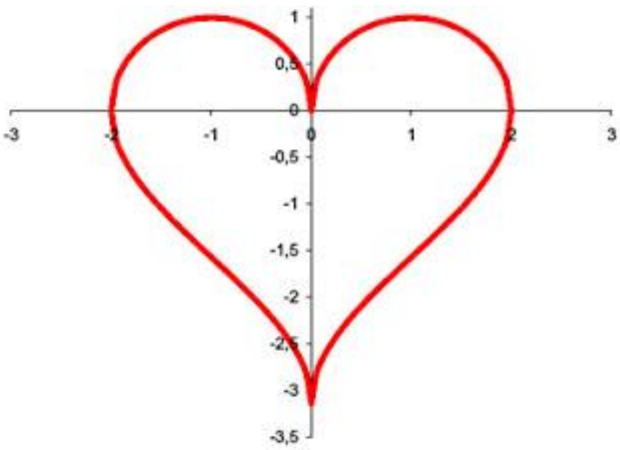
Colegio Nacional de Buenos Aires

MATEMÁTICA DE 3er AÑO

Guía de Trabajos Prácticos



2021

Contenidos

PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA TERCER AÑO 2018

Unidad 1: Funciones. Generalidades.

Definición de función. Gráficos. Conjunto Imagen. Intersecciones con los ejes. Paridad.

Unidad 2: Función lineal.

Función lineal. Ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. Intersección de rectas. Problemas. Funciones lineales definidas por tramos. Función módulo.

Unidad 3: Función cuadrática.

Función cuadrática. Traslaciones y simetrías. Raíces. Ecuación de segundo grado. Movimientos. Intersección de parábola con recta.

Unidad 4: Las funciones polinómicas.

Ceros de una función polinómica. Multiplicidad de las raíces. Clasificación de funciones. La función biyectiva y su inversa.
Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini, Teorema del resto. Divisibilidad. Resolución de ecuaciones. Teorema de Gauss. Descomposición factorial de un polinomio. Clasificación. Movimientos. Representación aproximada de funciones polinómicas a partir de ceros, intervalos de positividad y negatividad.

Unidad 5: Las funciones racionales e irracionales

Función racional. Función homográfica. Operaciones con expresiones algebraicas racionales. Ecuaciones. Problemas. Funciones irracionales. Problemas.

Unidad 6: Álgebra de funciones.

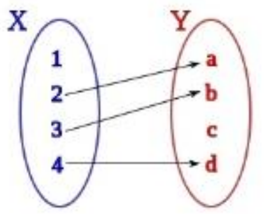
Igualdad de funciones. Suma, producto, cociente de funciones. Composición de funciones.

Unidad 1: Funciones. Generalidades.

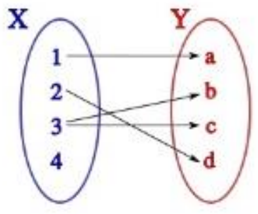
CONCEPTO DE FUNCIÓN

En matemática, en física y en otras ramas de la ciencia o de la vida humana, se presentan relaciones binarias entre dos conjuntos (el primero, llamado de partida, el segundo llamado de llegada) que tienen especial importancia. De éstas, interesan, en particular, las que hacen corresponder a ***todo*** elemento del primer conjunto un ***único*** elemento del segundo conjunto. Este tipo de relación recibe el nombre de **FUNCIÓN o RELACIÓN FUNCIONAL**. Por lo tanto, hay dos requisitos o condiciones fundamentales para que una relación sea función. La primera es que todos los elementos del primer conjunto estén relacionados con algún elemento del segundo conjunto (denominada: ***condición de existencia***). La segunda es que si un elemento del primer conjunto se relaciona con otro elemento del segundo conjunto, este último sea único, a dicho elemento del segundo conjunto se lo denomina **IMAGEN PUNTUAL** del primer elemento (denominada: ***condición de unicidad***), es decir que no puede ocurrir que un elemento del primer conjunto tenga dos o más imágenes distintas en el segundo conjunto.

NO SON FUNCIONES

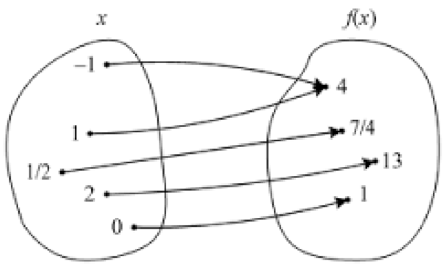


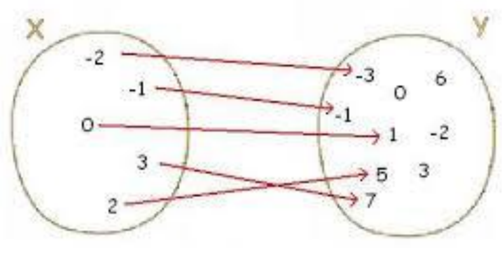
NO SE CUMPLE LA EXISTENCIA



NO SE CUMPLE LA UNICIDAD

SON FUNCIONES





Observación: Es necesario aclarar que la unicidad es para las imágenes, pues puede darse el caso que, en una relación funcional, un elemento del segundo conjunto pueda ser imagen de más de una elemento del primer conjunto.

Notación:

Para notar que la función "f" tiene al conjunto A como primer conjunto o conjunto de partida y al conjunto B, como segundo conjunto o conjunto de llegada, escribiremos: f: A $\rightarrow$ B

Expresiones equivalentes:
Decir que y es la imagen de x en la función f, es igual a afirmar que x es la preimagen de y en la función f, análogamente podemos expresar que el par ordenado (x,y) pertenece a la relación funcional o función “f”, $(x,y) \in f$ o bien $f(x)=y$

Aclaración
Dominio: Si recordamos que la definición de DOMINIO para una relación cualquiera de A en B, es el conjunto formado por los elementos del primer conjunto que están relacionados con algún elemento del segundo conjunto, vemos que en estas relaciones funcionales o FUNCIONES, donde es necesaria la condición de existencia, EL DOMINIO DEBE COINCIDIR CON EL CONJUNTO DE PARTIDA O PRIMER CONJUNTO.

En resumen:
Una relación de $f: A \rightarrow B$ es FUNCIÓN, si cumple con las condiciones de:

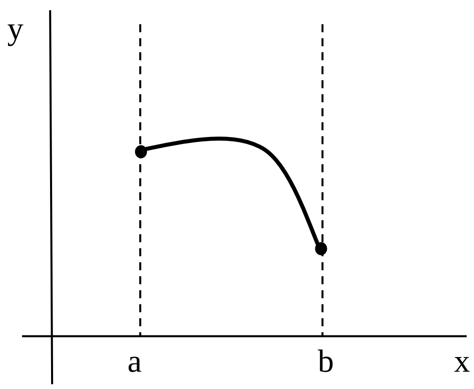
- **EXISTENCIA** (Dominio de f = A)
  $\forall x \in A \ \exists y \in B \ / \ f(x) = y$ (todos los elementos de A tienen alguna imagen en B)

- **UNICIDAD (** si un elemento de A tiene imagen en B , dicha imagen debe ser única)
  $\forall x \in A \ \forall y \in B \ \forall z \in B : [\, f(x) = y \wedge f(x) = z \Rightarrow y=z]$

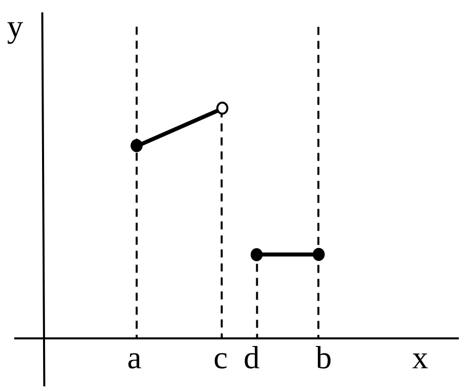
NOTA:
En el lenguaje formal matemático, para afirmar que un elemento es único se presupone que, en principio puede ser diferente, como en este caso las imágenes fueron llamadas “y” y “z” y si necesariamente resulta que ambas son iguales, se afirma que son únicas.

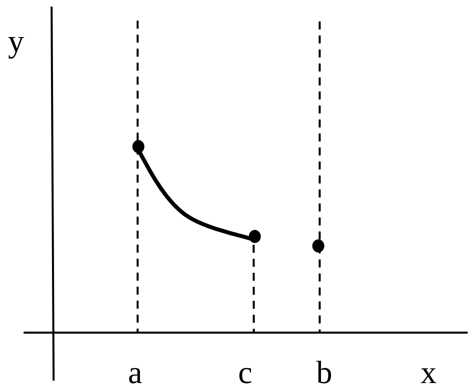
EJERCICIO Nº 1
Dadas las relaciones de $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, se propone analizar si son FUNCIONES y en cada caso justificar fundamentando con las condiciones de EXISTENCIA y UNICIDAD ya definidas (en caso de no cumplirse, es aconsejable dar un ejemplo referido al gráfico donde la condición en estudio no se cumpla, también llamado CONTRAEJEMPLO).

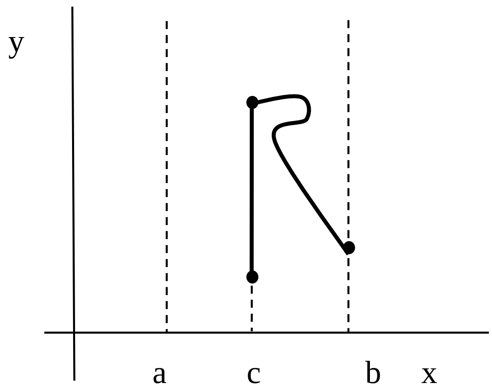
a)



b)



c) 

d) 

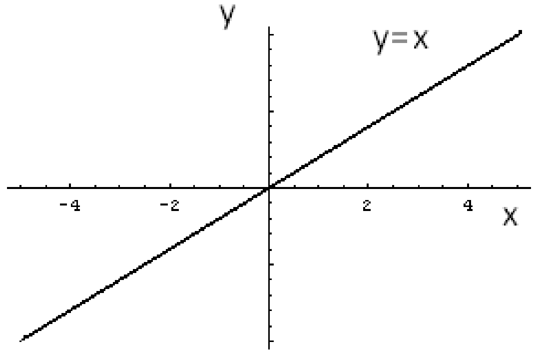
GRÁFICOS DE FUNCIONES ELEMENTALES

A continuación, graficaremos algunas funciones vistas en segundo año para el reconocimiento de las condiciones mencionadas, veremos "por qué" para definir una FUNCIÓN es necesario dar sus tres elementos:

- El dominio o conjunto de partida.
- El segundo conjunto o conjunto de llegada.
- El gráfico o la regla de asignación de imágenes, por ejemplo $y= x+1$; $y = 3x^2 -2x$; $y= x^3$ …

Propuesta:
Los gráficos pueden ser realizados con la aplicación de algún software por ejemplo "GeoGebra".

Comencemos por y = x



EJERCICIO Nº 2

Al visualizar el gráfico podemos responder las siguientes preguntas:
¿La relación y=x ¿es función de A $\rightarrow$ B?
Contestar para cada uno de los siguientes casos:

a) A = $\mathbb{R}_0^+ \wedge$ B= $\mathbb{R}$
b) A = $\mathbb{R} \wedge$ B= $\mathbb{R}_0^+$
c) A = $\mathbb{R}_0^+ \wedge$ B= $\mathbb{R}_0^-$
d) A = $\mathbb{R} - \{0\} \wedge$ B = $\mathbb{R}$
e) A = $\mathbb{R} \wedge$ B = $\mathbb{R}$
f) A = $\mathbb{R}_0^+ \wedge$ B = $\mathbb{R}_0^+$

EJERCICIO Nº 3

Graficar y realizar el mismo análisis que en el EJERCICIO Nº 2 para las gráficas de:

1) $y = x^2$
2) $y= x^3$
3) $y = |x|$
4) $y= \frac{1}{x}$
5) $y = \sqrt{x}$

En cada caso analizar cuál debe ser el conjunto A mayorante (el más amplio), para que cumpla la condición de existencia.

EJERCICIO Nº 4

Hallar el dominio mayorante (máximo en el sentido de la inclusión) de las siguientes funciones y expresarlo como intervalo o unión de intervalos:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{|x+1|-2}}$

b) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2-9)(x+1)}$

c) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-5}{2-x^2}}+\dfrac{1}{|x|-\sqrt{3}}$

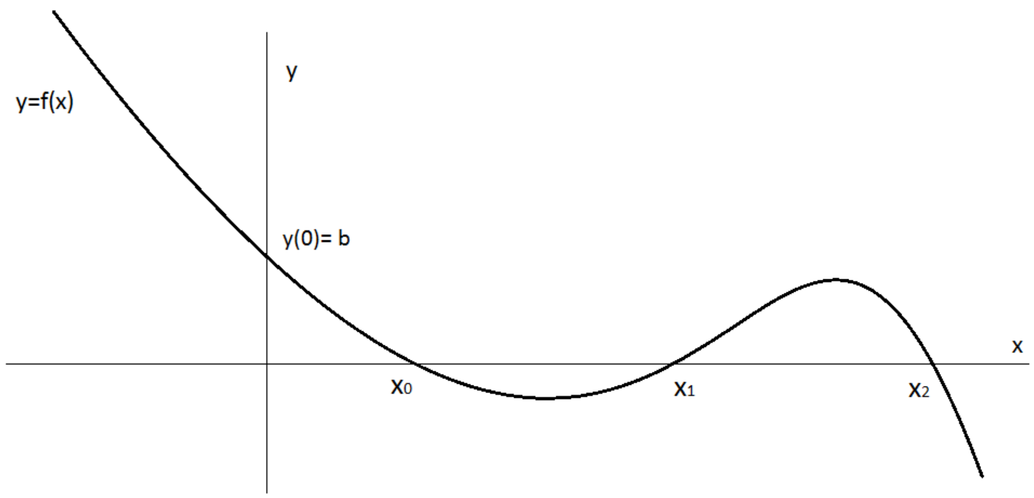
d) $f\ \ x\ =\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\ \ x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{x^2-1}$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+2}}$

PUNTOS NOTABLES DE UNA FUNCIÓN - INTERSECCION CON LOS EJES COORDENADOS.

Analicemos el siguiente gráfico funcional



1) Se denomina ***ordenada al origen*** **(b)** a la imagen del valor cero perteneciente al dominio funcional. Es decir:

$$\boxed{\mathbf{b = f(0),\ \text{llamado en este gráfico}\ y(0)}}$$

NOTA:

El valor de ordenada al origen es el que corresponde al punto donde el gráfico funcional corta al eje ¨y¨ (eje de ordenadas).

EJERCICIO Nº 5

a) Señalar en el gráfico anterior con un punto rojo, el valor ¨ b¨.

b) Si estamos estudiando el gráfico de una función, puede existir más de un punto ¨ b ¨? Justificar la respuesta.

c) En los gráficos del EJERCICIO Nº 3 señalar, si existe, la ***ordenada al origen*** y verificarlo analíticamente.

d) Crear tres gráficos funcionales distintos definidos de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ donde el valor de la ***ordenada al origen,*** sea 2, -1 y 0 respectivamente.

2) Se denomina ***abscisa al origen*** al valor ó valores del dominio funcional cuya imagen es el número cero, es decir:

$$\boxed{x \in D \ / \ f(x) = 0}$$

NOTA:

Al analizar el gráfico anterior, advertimos que los valores de las ***abscisas al origen*** (también llamados **ceros** de la función) corresponden a los puntos donde la gráfica funcional corta al eje ¨x¨ (eje de abscisas). En este ejemplo particular existen tres valores x_0, x_1 y x_2 (denotados en el dibujo).

EJERCICIO Nº 6

i) Marcar en el gráfico anterior con puntos azules, aquellos donde existan abscisas al origen.

ii) Si estamos estudiando el gráfico de una función, podrían presentarse, entre otros, los siguientes casos:

a- No existir abscisa al origen. Graficar un ejemplo.
b- Haber infinitas abscisas al origen, dar ejemplos.
c- Dos abscisas al origen que resulten simétricas respecto al eje¨y¨. Dibujar por lo menos un ejemplo.

iii) En los gráficos del EJERCICIO Nº 3 señalar la o las ***abscisas al origen***, si existen y verificarlo analíticamente.

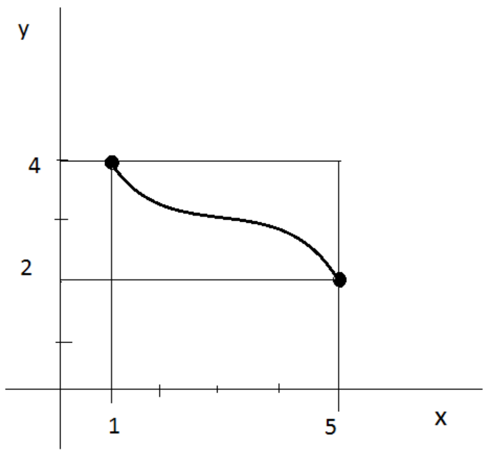
iv) Crear cuatro gráficos funcionales distintos donde el valor de las ***abscisas al origen*** sean:

a- -1, 4 ,7.
b- 0.
c- Ninguna.
d- -5, -3, 0, 3, 5.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Dada la función $f: A \to B$ se denomina CONJUNTO IMAGEN o sintéticamente IMAGEN de f, al subconjunto del B formado por todas las imágenes puntuales de los elementos del conjunto A.
Lo denotamos como **Im f** $=\{ y \in B \,/\, \exists\, x \in A \wedge y=f(x) \}$

Por ejemplo, en el siguiente gráfico de la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$:



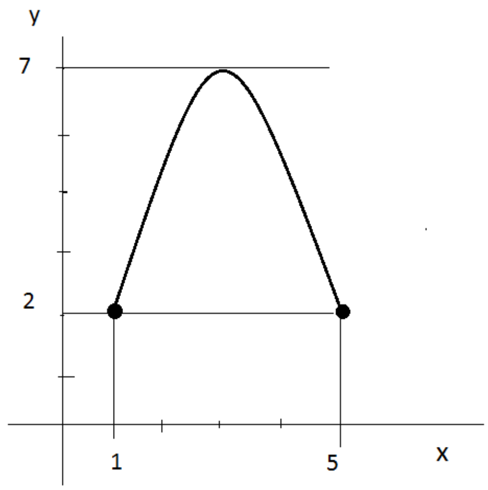
Se observa que el conjunto imagen es el intervalo [2,4]

Propuesta:

Crear tres gráficos funcionales distintos de modo tal que el dominio y el conjunto imagen sigan siendo los mismos que en el ejemplo anterior.

EJERCICIO Nº 7

Hallar el conjunto imagen para las siguientes funciones, si es necesario utiliza un graficador:



a) f: **[1;5]** $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ determinada por el gráfico

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x)= IxI

c) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x)= 4 - x^2$

d) f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x)= \sqrt{x}$

e) f: $[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x)= \sqrt{4-x^2}$

f) f: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x)= \frac{1}{x}$

g) f: $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x)= x^3$

PARIDAD E IMPARIDAD DE UNA FUNCIÓN

En algunos casos, la representación gráfica de ciertas funciones escalares puede simplificarse si se tiene en cuenta la simetría de la misma.

ACLARACIÓN:

Tanto la paridad como la imparidad se podrán analizar en dominios simétricos respecto al origen, es decir que si x ϵ A también -x ϵ A. Algunos ejemplos aclararán este concepto:
A=[-5,5] ó A=[-7,7] ó A=$(-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$ ó A=[-8,-2]U [2,8] ó A= $\mathbb{R}$ son conjuntos que resultan simétricos respecto al origen .

DEFINICIONES:

FUNCION PAR:

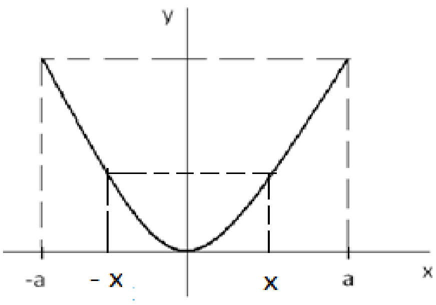
Una función es **PAR** si la imagen de números opuestos (¨x¨ y su opuesto ¨-x¨) es el mismo valor, es decir:

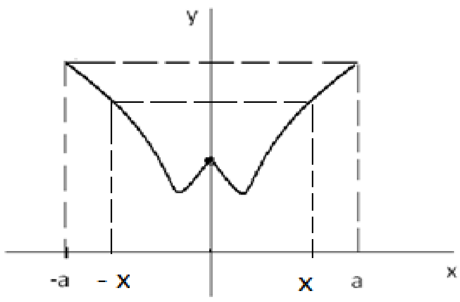
$$\boxed{\text{f es una función PAR} \Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom } f : f(x) = f(-x)}$$

El gráfico de una función PAR es simétrico con respecto al eje de ordenadas ¨ y ¨.

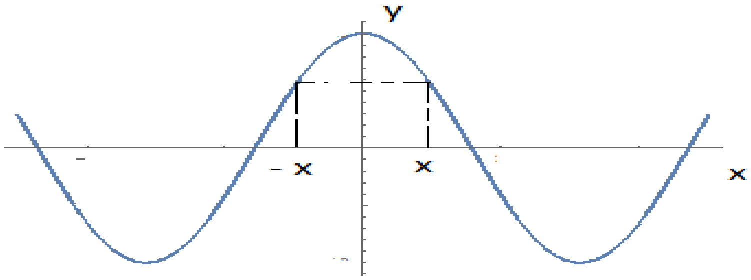
Los siguientes gráficos corresponden a funciones pares:

$f: [-a, a] \to \mathbb{R}$, con $a \rangle 0$





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



EJERCICIO Nº 8

Dadas las siguientes funciones se pide graficarlas y concluir si son pares o no. En caso afirmativo realizar la demostración analítica y en otro caso, dar un contraejemplo.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = x^2$
b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 2x + 1$
c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = |x|$
d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 4 - x^2$

EJERCICIO Nº 9

Dar ejemplo de gráficos de funciones pares definidas de A en $\mathbb{R}$:

a) A= [-5,5]
b) A= $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
c) A= [-8,-2]U [2,8]
d) A= $\mathbb{R}$

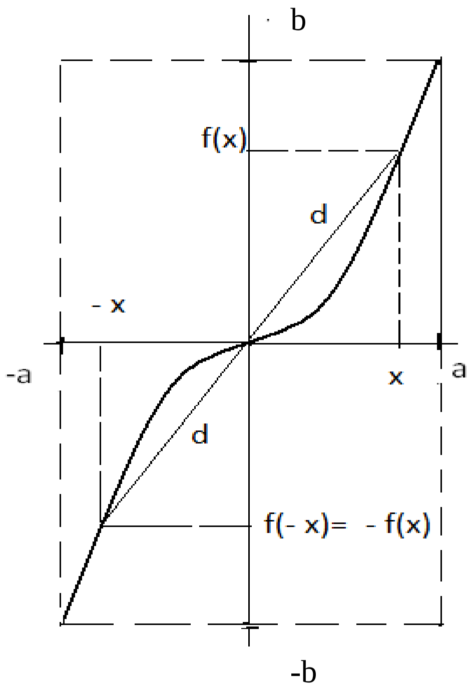
FUNCIÓN IMPAR

Una función es **IMPAR** si la imagen de números opuestos (¨x¨ y su opuesto ¨-x¨) son también, números opuestos entre sí, es decir:

f es una función IMPAR $\Leftrightarrow \forall x \in$ Dom f : f(x) = - f(-x)

El gráfico de una función IMPAR es simétrico con respecto al origen de coordenadas.
Nuevamente, el dominio debe ser simétrico respecto del cero.

El siguiente gráfico corresponde a una función impar f : [-a ,a] $\rightarrow \mathbb{R}$



Obsérvese que decir:

f(x) = - f(-x) ,es análogo a afirmar que: f(- x) = - f(x).

EJERCICIO Nº 10

Dadas las siguientes funciones graficarlas, analizar si son impares o no. En caso afirmativo realizar la demostración analítica y en otro caso, dar un contraejemplo.

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x) = x^3

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x) = - x +1

c) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x) = x

d) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / f(x) = $\sqrt[3]{x}$

EJERCICIO Nº 11

Dar ejemplos de gráficos de funciones impares definidas de A en $\mathbb{R}$ en cada caso:

a) A= [-4,4]

b) A= $(-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$

c) A= [-10,-4]U [4,10]

d) A= $\mathbb{R}$

Obsérvese que existen funciones que no son pares ni impares.

EJERCICIO Nº 12

¿Existe alguna función par e impar a la vez? Justificar.

Unidad 2: Función lineal

Función lineal

f es una función lineal $\Leftrightarrow f(x) = mx + b$ donde m y b son números reales llamados **pendiente** y **ordenada al origen** respectivamente.
Los puntos (x,y) de la gráfica son tales que están alineados. Se dice que y=mx+b es la ecuación de esta recta.

Casos particulares de función lineal:

a) **Función constante**: es aquella en la cual m=0, es decir f(x)=b. Asigna a todo valor de x del dominio, el numero b.
   La gráfica es una recta paralela al eje x que pasa por el punto (0,b).
b) Si b=0 $\Rightarrow$ f(x)=mx. Los puntos de la gráfica en este caso conforman una recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0). (función de proporcionalidad directa).
c) Cuando m=1 y b=0, f(x)=x, se denomina **función identidad** porque asigna a cada valor del dominio el mismo valor como imagen.

EJERCICIO Nº 1

a) Graficar la función identidad e indicar qué ángulo forma la recta con el semieje positivo de las x. Justificar.

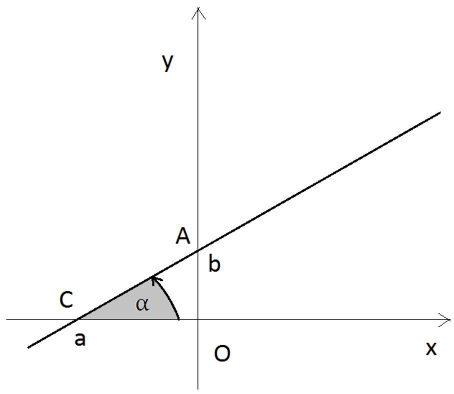
b) Graficar las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f(x)=2x y g(x)=$\frac{2}{3}$x

Calcular la tangente del ángulo determinado por cada una de las rectas y el semieje positivo de las x. ¿Qué relación existe con la pendiente de cada una?

Pendiente de una recta

Graficar: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

Medir el ángulo determinado por el semieje positivo x y la recta.
Calcular la tangente de ese ángulo.
¿A qué es igual dicha tangente?



y=mx+b

La recta forma con el eje x un ángulo α

$$A=(0,b) \quad C=(a,0)=(-\frac{b}{m};0)$$

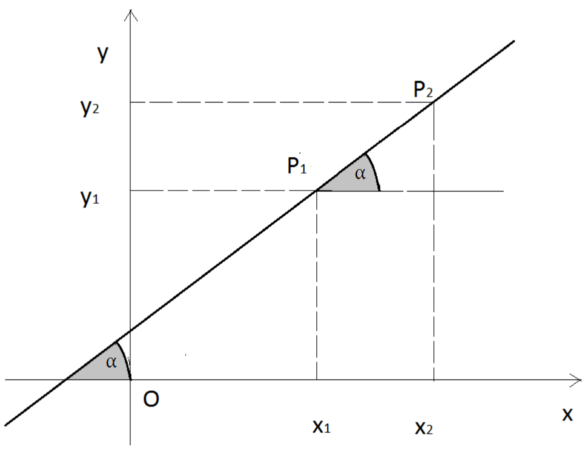
Relación entre m y α:

En el triángulo rectángulo AOC es:

$$tg\alpha=\frac{|AO|}{|CO|}=\frac{b-0}{0-a}=\frac{b}{-a}=\frac{b}{-(-\frac{b}{m})}=m$$

Luego la pendiente nos da la tangente del ángulo α , que forma la recta con el semieje positivo de las x, medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Una recta queda determinada unívocamente por dos puntos, observemos, cómo podemos obtener su pendiente.



$$P_2 \in r \Rightarrow y_2 = mx_2 + b$$

-

$$P_1 \in r \Rightarrow \underline{y_1 = mx_1 + b}$$

Restando membro a miembro obtenemos:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = tg\,\alpha$$

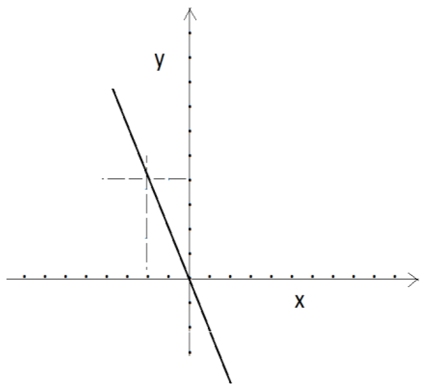
Definimos: $\Delta y = y_2 - y_1$ como el incremento o variación de y.

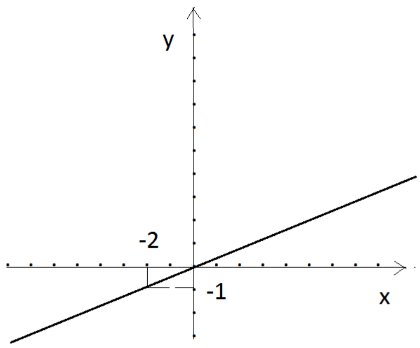
$\Delta x = x_2 - x_1$ como el incremento o variación de x. Luego $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

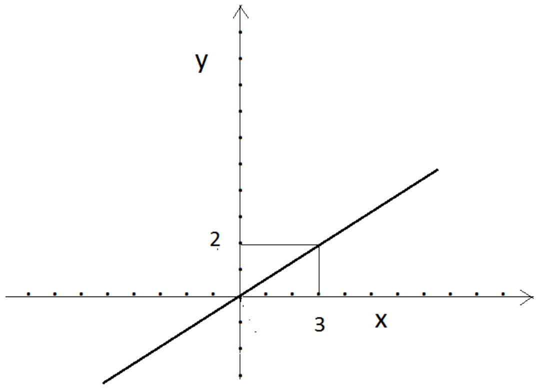
¿Entre qué valores se encuentra α ?..................................

EJERCICIO Nº 2

Escribir la ecuación de la recta correspondiente a cada uno de los siguientes gráficos.







EJERCICIO Nº 3

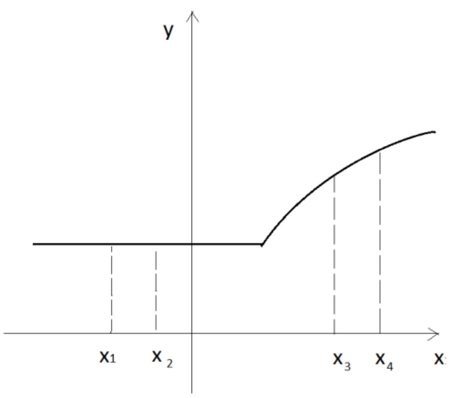
Representar las siguientes rectas, teniendo en cuenta su pendiente sin hacer tabla de valores: y=4x

$y = \frac{3}{2}x$ $y = -\frac{5}{3}x$ y=-x

❖ **Definimos en general: Funciones monótonas**

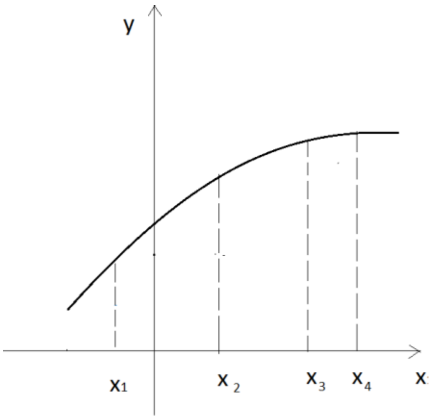
a) **Función creciente**: (Sea f una función continua)

f: $A \to B$ /y = f(x) es creciente en A $\Leftrightarrow \forall x_1 \in A$ y $\forall x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



b**) Función estrictamente creciente:** (Sea f una función continua)

f: $A \to B$ /y = f(x) es creciente en A $\Leftrightarrow \forall x_1 \in A$ y $\forall x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



El conjuto A se denomina **Intervalo de crecimiento** de f.

EJERCICIO Nº 4

Dada la función lineal general $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = mx + b$, analizar si:

a) f es una función monótona.

b) En qué condiciones es una función estrictamente creciente.

c) En qué condiciones es una función estrictamente decreciente.

EJERCICIO Nº5

Representar la función dada y todos los desplazamientos indicados en el cuadro:
(utilizá GeoGebra si te resulta más cómodo)

Recta	Desplazamiento respecto de y=1/2x
f(x)=1/2x	
f(x)+1=1/2x+1	
f(x)-2=1/2x-2	
f(x+1)=1/2(x+1)	
f(x-1)=1/2(x-1)	

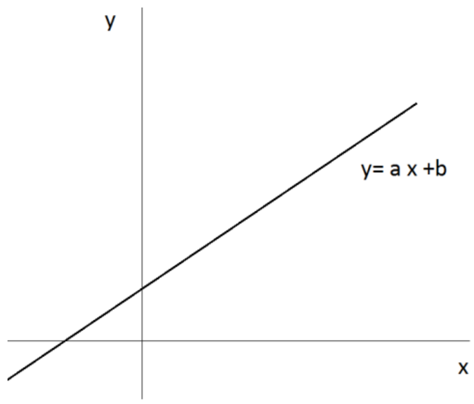
EJERCICIO Nº 6

Representar en un mismo sistema de ejes:

a) f(x)=3x b) g(x)=-f(x) c) Qué relación existe entre las gráficas?

EJERCICIO Nº 7

A partir del gráfico de la figura, obtener el gráfico correspondiente a:
y=ax   y=ax-b   y=-ax   y=ax+2b   y=-ax+b



EJERCICIO Nº 8

Sea la función: f(x)=-3x+4

a) Si trasladamos la gráfica de f, 3 unidades hacia arriba la ecuación correspondiente es:
y=...................

b) Si realizamos una simetría de eje x la ecuación correspondiente es: y=.....................

c) Si realizamos una simetría de eje x y luego una traslación hacia abajo 5 unidades la ecuación correspndiente es: y=....................

Realizar los gráficos de cada recta obtenida.

Ecuación de una recta que pasa por $P(x_0,y_0)$ y tiene pendiente m

$$y = mx + b \qquad (1)$$

$$P_0 \in r \Rightarrow \underline{y_0 = mx_0 + b} \qquad (2)$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$ surge restando miembro a miembro (1) menos (2)

Ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos: Sean los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

Vimos anteriormente que su pendiente es $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la ecuación de una recta que pasa por un punto $P_1(x_1,y_1)$ de pendiente m es:

$y-y_1=m(x-x_1)$

Entonces:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \qquad \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

EJERCICIO Nº 9

Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,y=\dfrac{2}{5}+x$ se pide:

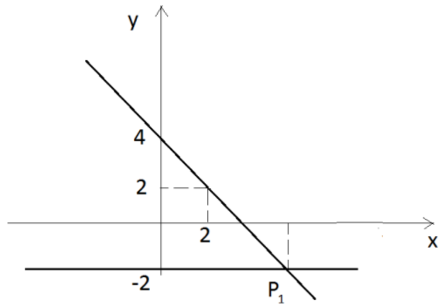
a) Ceros de la función

b) Hallar A= $\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq 0\}$

c) Hallar B= $\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2\leq f(x)<3\}$

d) Hallar D= $\{f(x)\in\mathbb{R}\,/\,x>1\}$

e) Hallar E= $\{f(x)\in\mathbb{R}\,/\,0<x\leq 1{,}5\}$



EJERCICIO Nº 10

Siendo f una función lineal de variable real se sabe f(5)=4 y f(-2)=5, hallar la ecuación de la recta correspondiente.

EJERCICIO Nº 11

Hallar la ecuación de la recta que verifica:

a) Ordenada al origen igual a 7 y $\alpha=45°$

b) Ordenada al origen igual a 7 y $\alpha=120°$

EJERCICIO Nº 12

Hallar la ecuación de la recta r que pasa por P_0=(1,-9) y cumple la siguiente condición:

a) Tiene ángulo de inclinación $\alpha=45°$

b) Tiene pendiente $\dfrac{1}{3}$

c) Tiene ordenada al origen 2

d) Pasa por el origen de coordenadas

EJERCICIO Nº 13

Hallar f, sabiendo que es una función lineal de variable real que asigna a los valores del intervalo [1,3], el intervalo [2,5]. ¿Cuántas posibilidades hay?

EJERCICIO Nº 14

¿Todas las rectas del plano representan funciones? Justificar la respuesta.

EJERCICIO Nº 15

a) Indicar si P, Q y R están alineados siendo:

P(3,2) $\quad Q(\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4})$ $\quad$ R(1,0)

b) De acuerdo con el gráfico, indicar coordenadas de P_1:

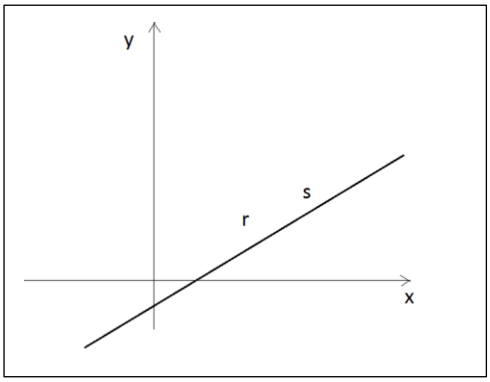
EJERCICIO Nº 16

Determinar, si existe, las coordenadas del punto de intersección en cada caso.
Resolver este ejercicio gráfica y analíticamente.

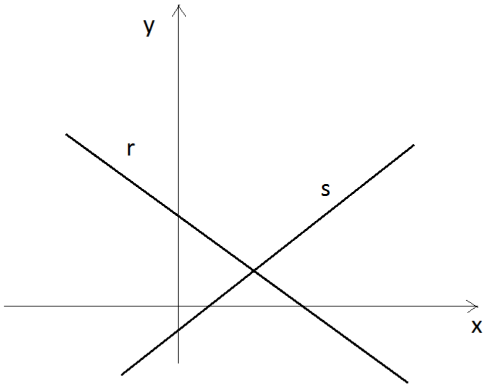
a) $\begin{cases} 5x-2y+9=(\\ 3x+7=2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3y+6x=2 \\ -2x=y-4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4y-3x=40/ \\ 9/4x+10=3 \end{cases}$

Intersección de rectas Pueden presentarse los siguientes casos:

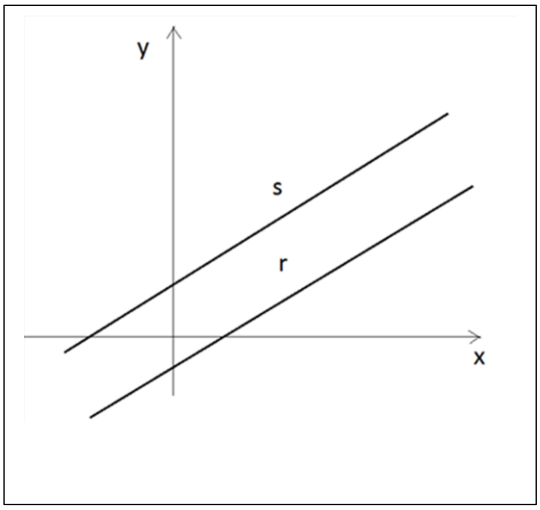
a)



b)



c)



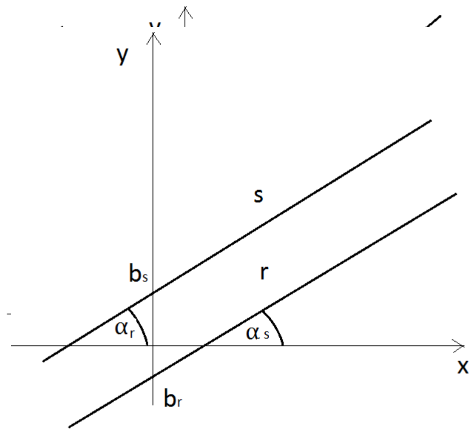
a) Hay un único punto de intersección. Se trata de un sistema <u>compatible determinado</u>.

b) Se obtienen dos rectas superpuestas y en consecuencia hay infinitos puntos de intersección. Se trata de un <u>sistema compatible indeterminado</u> (existen infinitas soluciones).

c) Se obtienen dos rectas paralelas no coincidentes y, por lo tanto, la intersección es vacía. Se trata de un <u>sistema incompatible</u> (no tiene solución). Clasifica los sistemas del ejercicio 16.

Paralelismo y perpendicularidad

a) **Paralelismo**



$r \rightarrow y = m_r x + b_r$

$s \rightarrow y = m_s\ x + b_s$

$r \,||\, s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow tg\alpha_r = tg\alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$

(por ser $0^o \leq |\alpha_r| < 180^o \wedge 0^o \leq |\alpha_s| < 180^o$)

Conclusión:
Para que dos rectas sean **paralelas** las **pendientes** deben ser **iguales**.

EJERCICIO Nº 17

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(2,1)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $P_1(1,-3)$ y $P_2(-3,0)$.

b) Perpendicularidad
Para que dos rectas sean **perpendiculares** la **pendiente** de una de ellas debe ser **la recíproca de la opuesta** de la otra, o lo que es equivalente, **la opuesta de la recíproca** de la otra.

Queda la justificación para el alumno (Se sugiere trabajar com triângulos semejantes).
Analizar el caso especial de rectas paralelas a los ejes coordenados.

EJERCICIO Nº 18

Hallar la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a r: $P_0(-1,2)$ $\quad r \to y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

EJERCICIO Nº 19

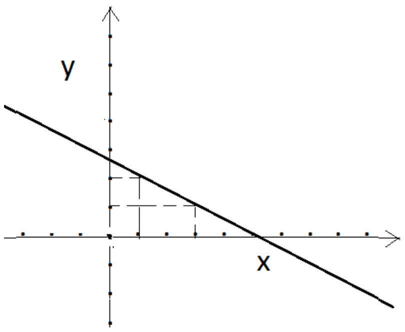
Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(-1,2)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $P_1(0,4)$ y $P_2(6,6)$.

EJERCICIO Nº 20

Responder Vo F.

a) La ecuación de la recta del gráfico es $y = -\frac{1}{2}x + 3$

(Considerar que las unidades marcadas representan 1, 2, 3)



b) Si $\begin{cases} r_1 \to y = x - 4 \\ r_2 \to y = -x + 4 \end{cases}$ entonces se verifica que $r_1 \perp r_2$

c) Si $\begin{cases} r_1 \to y = \frac{1}{2}x + 4 \\ r_2 \to y = x + \frac{9}{2} \end{cases}$ entonces se cumple que $r_1 \cap r_2 = \{(-1,3)\}$

EJERCICIO Nº 21

Hallar el área del triángulo determinado por la recta r y los ejes coordenados siendo r la recta que pasa por M=(4,-1) y es $\perp$ a $r_1 \to y = \frac{1}{2}x$

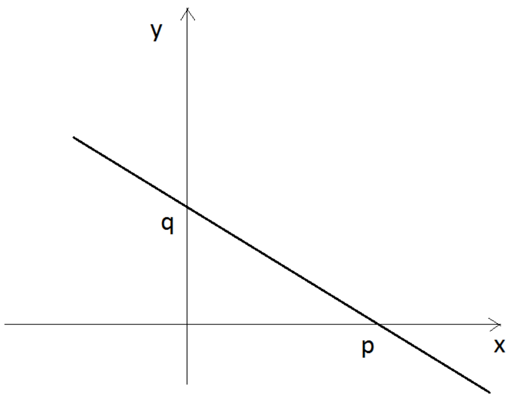
EJERCICIO Nº 22

Hallar h y k de manera tal que las rectas de ecuaciones:

$3y - 5x - 3 = 0 \qquad 2kx - y + h = 0$ sean:

a) Perpendiculares.
b) Paralelas, no coincidentes.
c) Coincidentes.

Forma segmentaria de la ecuación de una recta



$$r \rightarrow ax + by + c = 0$$
$$ax + by = -c$$
$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

abscisa al origen: $-\frac{c}{a} = p$

ordenada al origen: $-\frac{c}{b} = q$

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

EJERCICIO Nº 23

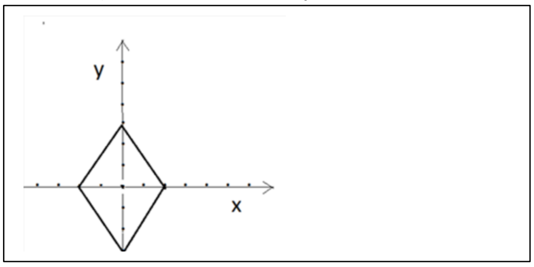
Escribir la forma segmentaria de r y representar:

a) $r_1 \rightarrow 3x - 4y + 12 = 0$

b) $r_2 \rightarrow 2x - 4y - 4 = 0$

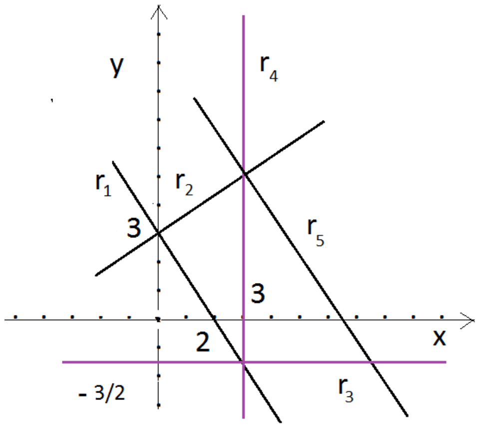
EJERCICIO Nº 24

Escribir las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados y las diagonales del rombo.(Considerando que las unidades marcadas representan 1, 2, 3, ...)



EJERCICIO Nº25

a) Completar la tabla teniendo en cuenta los datos de la figura.



	Forma implícita ax+by+c=0	Forma explícita y=mx+b	Forma segmentaria
r_1			
r_2			
r_3			
r_4			
r_5			

siendo $r_2 \perp r_1$ $\quad r_3 \parallel$ eje x $\quad r_4 \parallel$ eje y $\quad r_5 \parallel r_1$

b) Hallar coordenadas de los puntos de intersección.

c) Hallar ceros, si existen.

EJERCICIO Nº 26

Determinar k tal que la recta de ecuación $\frac{x}{k}+\frac{3}{5}y-2k=0$ tenga abscisa al origen igual 3 $(k \neq 0)$.

EJERCICIO Nº 27

Un estudio determinó que la altura de un árbol y la longitud de la sombra que produce (en una cierta hora del día) tienen una relación lineal.

Si el árbol mide 2 m, la longitud de su sombra será de 3 m. Si mide 9m, la longitud de su sombra será de 13,5 m.

a) ¿Cuál será la altura de un árbol que produce una sombra de 18 m?

b) Encontrar la función que relaciona las dos variables anteriores. Graficar.

EJERCICIO Nº 28

Un resorte mide 7 cm cuando colgamos de él 10 g y mide 13 cm cuando colgamos 80 g.

a) Escribir la ecuación que relaciona la longitud L con el peso P.

b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso?

c) Teniendo en cuenta que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial. Cuál es el dominio de definición de la función L(P)?

d) ¿Cuál es la variación de longitud por cada 10g? Y por cada 5g? Y por cada gramo?

EJERCICIO Nº 29

Un depósito se vacía mediante una bomba de agua. El volumen de agua que queda (en m^3) viene dado por $V(t) = 8 - \frac{1}{2}t$. ¿Cuántos m^3 de agua habrá al poner en funcionamiento la bomba? Cuál será el volumen si el depósito se vacía con una bomba 4 veces más potente que la original?

Funciones lineales por tramos

EJERCICIO Nº 30

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} 3/2x + 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$.

Se pide : Graficar, definir I_f , conjunto de ceros.

EJERCICIO Nº 31

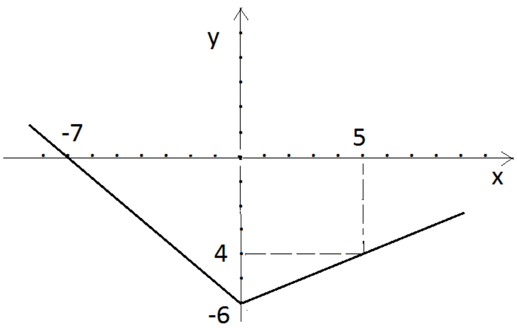
Sea $f : A \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ -4 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$.

Se pide: graficar, definir I_f , conjunto de ceros.

EJERCICIO Nº 32

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} \text{..........................} \\ \text{..........................} \end{cases}$

a) Completar teniendo en cuenta el gráfico.
b) Conjunto de ceros.



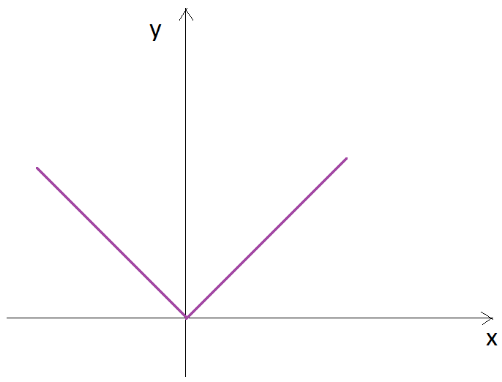
Función módulo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x|$

Por definición de módulo de un número real podemos escribir:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

EJERCICIO Nº 33

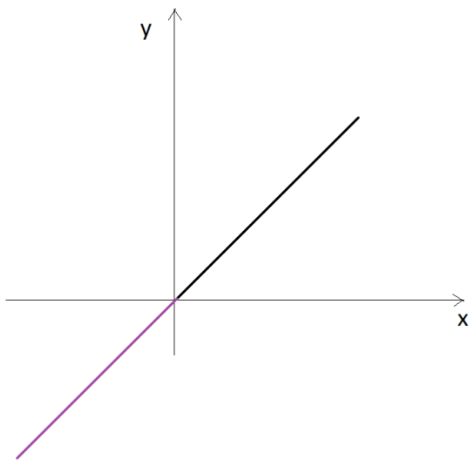


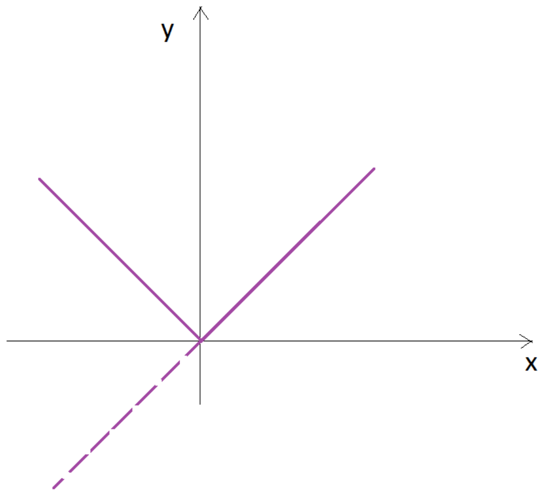
a) Determinar el conjunto imagen y analizar la paridad de la función anterior.

Nota: es interesante observar qué sucede con el gráfico de una función cuando le aplicamos el módulo.

Representamos y=x e $y = |x|$

La semirrecta que está incluida en el semiplano inferior en la representación de y=x pasa a ocupar el semiplano superior en la representación de $y = |x|$. Son simétricas respecto del eje x.





EJERCICIO Nº 34

Representar en un mismo gráfico y=x+1 e $y = |x+1|$ definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sin utilizar tabla de valores para la segunda.

EJERCICIO Nº 35

Graficar las siguientes funciones: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ /

a) f(x)=3-$|x|$ b) f(x)=1+$|x-1|$

EJERCICIO Nº36

A partir del gráfico de f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = |x|$ representar:

a) g(x)=f(x+2) b)s(x)=f(x-2) c)h(x)=f(x)+1 d) t(x)=-f(x)

Unidad 3: Función cuadrática

Una función cuadrática es una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^2+bx+c$ donde a, b, $c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$. Los puntos de la gráfica conforman una curva llamada parábola cuya ecuación es $y=ax^2+bx+c$.

❖ **En general:** recordamos que llamamos **CEROS** de una función a aquellos valores del dominio para los cuales se anula el valor de la función. Es decir, son las soluciones o **raíces** de la ecuación f(x)=0

En el caso de la función cuadrática, los ceros de f, son los x/ $ax^2+bx+c=0$.

¿Qué representan en el gráfico de la parábola los ceros de la f?

Ejercicio Nº1

a) Dadas las siguientes funciones cuadráticas, hallar ceros (completar cuadrados para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2+bx+c=0$ en los casos que sea necesario)

b) Graficar e indicar eje de simetría.

c) Indicar coordenadas del punto de intersección del gráfico con eje y.

1) $f(x)= x^2-6x+9$
2) $f(x)=3x^2-2$
3) $f(x)=x^2+4x+1$
4) $f(x)=3x^2-12x$
5) $f(x)=-x^2+2x-2$
6) $f(x)=4x^2-16x+12$
7) $f(x)=x^2+4x+5$
8) $f(x)=-x^2+x$

Ejercicio Nº2

a)Verificar que toda ecuación del tipo $ax^2+bx+c=y$ se puede escribir de la forma: $y=a(x-x_0)^2+y_0$, (forma canónica)

b) ¿Qué representa el punto (x_0,y_0) en el gráfico de la parábola?

c) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?

❖ **Intervalos de postividad:**

Se denomina intervalo de positividad de una función f al intervalo en el cual se verifica que $\forall$x del intervalo f(x) >0.

En forma análoga de se define intervalo de negatividad de f.

Para el caso de la función cuadrática el intervalo de positividad, serán todos los valores de x/ $ax^2+bx+c>0$

Ejercicio Nº3

En las funciones del ejercicio 1,

a) Escribir la ecuación de la parábola asociada a cada caso en forma canónica, expresar coordenadas del vértice y ecuación del eje de simetría.

b) Indicar en todos los casos: conjunto imagen, intervalos en que $f(x)\geq 0$ (analíticamente).

c) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento.

❖ Desplazamientos

Actividad:
I] Representar en hoja cuadriculada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / f(x)=x^2

Representar en el mismo gráfico, sin usar tabla de valores: $g(x)=f(x)+1$, $h(x)=f(x)-2$ ambas definidas de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Relación entre la gráfica de f(x) y las de g(x) y h(x):
Si trasladamos la gráfica de .... 1 unidad en el sentido positivo del eje y obtenemos la gráfica de ....
La gráfica de h se obtiene trasladando ……….

II] Consideremos nuevamente $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=x^2$ Sin usar tabla de valores representar:
$p(x)=f(x-1)$ j(x)= f(x + 1)
Expresar la fórmula de la función resultante.

Qué relación existe entre las gráficas de f, p y j?
………
………
……..

En general:

Dada una función f y un número k>0
a) La gráfica de g(x)=f(x) $\pm k$ se obtiene desplazando la gráfica de f en la dirección del eje y.
   i) k unidades en el sentido positivo si g(x)=f(x)+k
   ii) k unidades en el sentido negativo si g(x)=f(x)-k

b) La gráfica de $h(x)=f(x\pm k)$ se obtiene desplazando la gráfica de f en la dirección del eje x.

En el caso particular de la función cuadrática, podemos representar una parábola cualquiera expresada en forma canónica

$y=a(x-x_0)^2+y_0$ mediante desplazamientos de $y=ax^2$.

Ejemplo:

$$y=x^2-4x+3=x^2-2.2x+4-4+3=(x-2)^2-1$$

La gráfica es una parábola que se obtiene desplazando la gráfica de $y=x^2$ 2 unidades en el sentido positivo de x y 1 unidad en el sentido negativo de y.

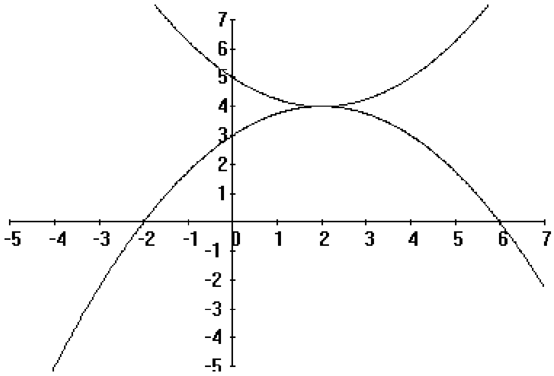
Ejercicio Nº4

Dadas las parábolas

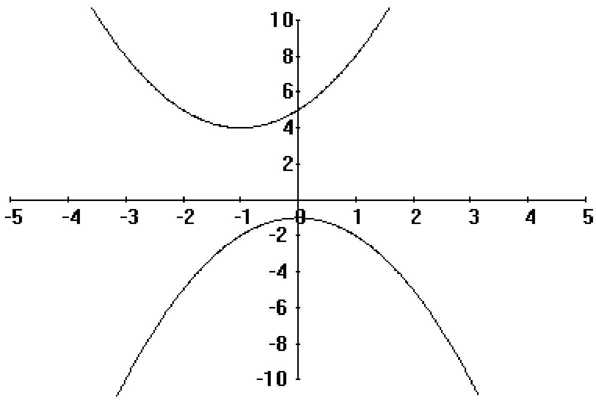
$$p_2 \to y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$
$$p_1 \to y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

donde $|a_1| = |a_2|$ hallar las ecuaciones de p_1 y p_2 teniendo en cuenta en cada caso los datos que figuran en las gráficas.

a)



b)



Ejercicio Nº5

a) Dada la parábola $p_1 \to y = a_1(x-2)^2$

- hallar la ecuación de la parábola p_2 que pasa por el punto Q=(0,5) y tiene el mismo vértice que P_1.
- ¿Cuál es el valor de a_1 si $a_2=2\,a_1$?

b) Dar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos: A(0,6) B(4,-10) C(2,6).

- Determinar los ceros y el vértice.
- Graficarla.
- Determinar su imagen.
- Decir en qué intervalo es positiva y decreciente simultáneamente y en cuál es negativa y creciente.

Fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado

Deduciremos una fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado o ceros de una función cuadrática en forma más práctica que completando cuadrados.

$$ax^2+bx+c=0 \text{ (ecuación de segundo grado)}$$

dividimos por a: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

completando cuadrados:

$$\underbrace{x^2+2.\frac{1}{2}\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{(x+\frac{b}{2a})^2}\underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente de la ecuación de 2do. Grado

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vemos que para hallar esta fórmula, simplemente se han resuelto en términos generales los mismos cálculos que hemos realizado para los casos particulares planteados en el ej. 1 con valores numéricos, con la ventaja de haber obtenido una expresión general en función de los parámetros a, b y c.

Ejercicio Nº6

De todos los rectángulos de perímetro 8 hallar las dimensiones del que tiene área máxima.

Ejercicio Nº7

Hallar dos números de suma 36 y de producto máximo.

Ejercicio Nº8

Una compañía de TV por cable de acuerdo con un estudio de mercado sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de x pesos mensuales viene dada por la función (x)=500(300-x).x (0<x<300)

Hallar cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo.

Ejercicio Nº9

En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados n, a los t años está dado por: $n(t) = -t^2 + 21t + 100$ (t>0)

a) Calcular los valores de t para los cuales n=154.

b) ¿Se extingue la población? Si fuera así, ¿cuándo ocurre?

Ejercicio Nº10

Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo, coronado por un semicírculo, cuyo perímetro total sea de 12m. Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible. Sugerencia: utilizar como variable independiente el radio del semicírculo.

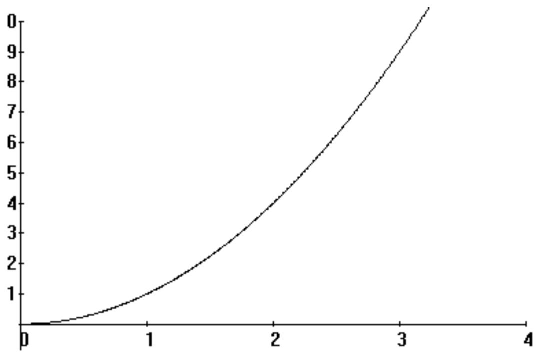
Leyes del movimiento rectilíneo uniformemente variado

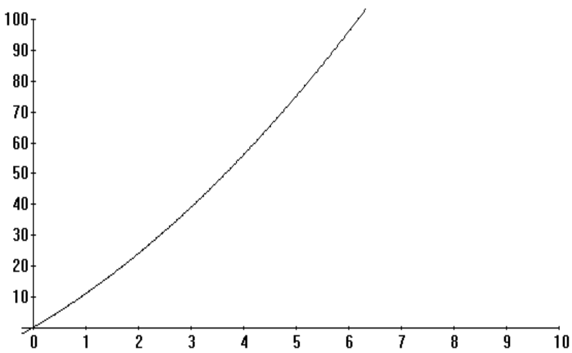
$e = \frac{1}{2}at^2$ uniformemente acelerado sin velocidad inicial

$e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ uniformemente acelerado con velocidad inicial.

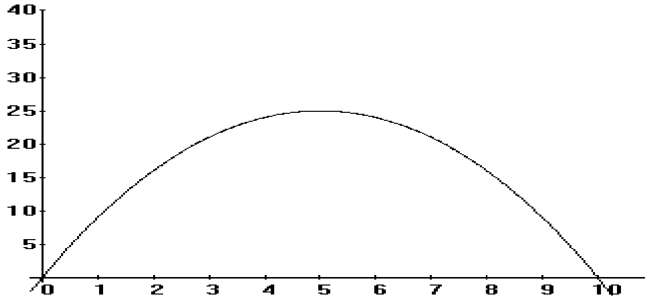
$e = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ uniformemente retardado con velocidad inicial.

Gráficos:





$e = t^2$ $a = 2\frac{m}{s^2}$ $e = 10t + t^2$ $v_0 = 10\frac{m}{s}$ $a = 2\frac{m}{s^2}$



$e = 10t - t^2$

$v_0 = 10\frac{m}{s}$

$a = -2\frac{m}{s^2}$

Ejercicio Nº11

En un movimiento rectilíneo uniformemente variado, donde:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$v_0 = -3 \frac{m}{seg}$$

$$e_0 = 6m$$

$$a = 2 \frac{m}{seg^2}$$

Se pide:

a) Obtener e = f(t)   v = g(t)   a = h(t)
b) Graficar estas tres funciones en distintos sistemas de ejes coordenados.
c) ¿Qué pasa en t=1,5?
   En el intervalo [0;1,5) ¿cómo es el movimiento?
   En el intervalo (1,5;5] ¿cómo es el movimiento?
d) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa v = g(t)?
   ¿Qué representa físicamente dicha pendiente?

Ejercicio Nº12

a) Representar $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / e = f(t) = -t^2 + 10t$

b) ¿Para qué tiempo se obtiene un "e" máximo?

Ejercicio Nº13

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad de 120 m/s. Su altura sobre el suelo t segundos después del disparo está dada por $s(t)=-4{,}9t^2+120t$.

a) Para qué valores de t el proyectil asciende y para cuáles desciende.
b) Hallar el instante en que el proyectil alcanza su altura máxima y calcularla.
c) Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.
d) Hallar el instante en que el proyectil alcanza los 50 m de altura.

Discriminante de la ecuación de 2dogrado

En la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ cuya fórmula resolvente es:

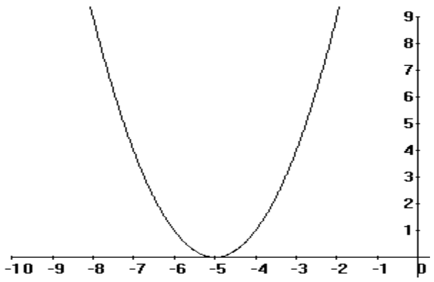
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Llamamos discriminante a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ .Se dan las siguientes situaciones posibles:

a) $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$ raíces reales iguales (raíz doble)
b) $\Delta > 0$ $x_1 \neq x_2$ raíces reales y distintas (raíces simples)
c) $\Delta < 0$ no existen raíces en el campo real

Ejemplo:
Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones.

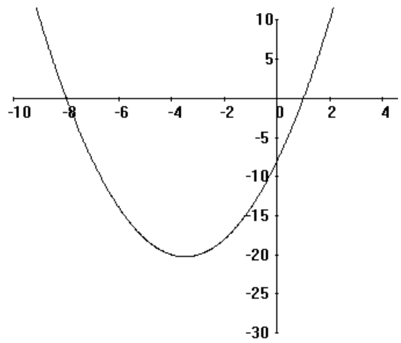
a)



$$x^2+10x+25=0$$
$$\Delta=0 \quad x_1=x_2=-5.\ Raiz\ doble$$
$$y=x^2+10x+25=(x+5)^2 \quad V(-5,0)$$

El eje x es tangente a la parábola.

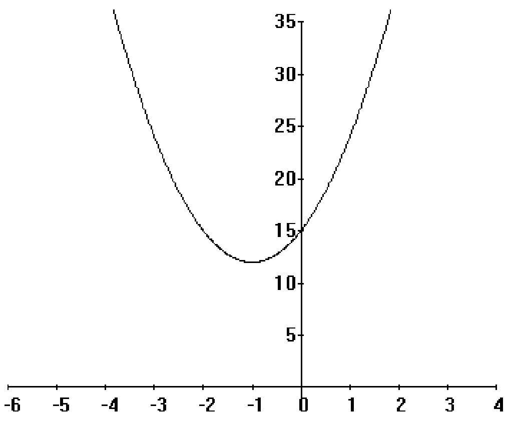
b)



$$x^2+7x-8=0$$
$$\Delta>0 \quad x_1=-8 \quad x_2=1 \quad x_1\neq x_2\ Raices\ simples$$
$$y=x^2+7x-8=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$$
$$V\left(-\frac{7}{2},-\frac{81}{4}\right)$$

El eje x corta a la parábola en dos puntos.

c)



$$3x^2+6x+15=0$$
$$\Delta<0 \quad \text{sin} \quad raíces \quad reales$$
$$y=3x^2+6x+15=3(x+1)^2+12$$
$$V(-1,12)$$

El eje x no corta a la parábola.

Ejercicio Nº14
Indicar V o F justificando.
Sean x_1 y x_2 raíces de un ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ y Δ su discriminante.
a)Si $x_1,x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0$
b) Si $x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0$
c) Si $a < 0 \Rightarrow \Delta > 0$
d) Si $b^2 > 4ac \Rightarrow x_1 \neq x_2$
e) Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow b^2 > 4ac$

Ejercicio Nº15
Siendo $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ obtener x_1+x_2 y $x_1.x_2$

Ejercicio Nº16
Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces son: $x_1=5$ y $x_2=-7$

Ejercicio Nº17
Reconstruir la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ sabiendo que sus raíces son:
a) $x_1 = 2 \quad x_2 = 8$ y a=2
b) $x_1 = 1-\sqrt{3} \quad x_2 = 1+\sqrt{3}$ y $a = -\dfrac{1}{2}$

Ejercicio Nº18
Calcular en cada caso el valor que debe tener m para que la ecuación:
a) $2x^2 + \dfrac{1}{2}x + m = 0$ tenga raíz doble
b) $x^2 + x + m = 1$ tenga una raíz nula
c) $x^2 - 8x + m = 0$ tenga una raíz igual al triplo de la otra

Ejercicio Nº19
Hallar k para que la ecuación tenga raíz doble
a) $2x^2 - \ k-1\ x = -\dfrac{1}{2}$
b) $x^2 + 2(k-1)x + 4k = 0$

Ejercicio Nº20
Hallar k para que la suma de las raíces sea igual al producto.
a) $x^2 - (2k-3)x - k = 0$
b) $2x^2 + (k+1)x + 3k - 5 = 0$

Ejercicio Nº21
Hallar k para que $x_1=0$
a) $5x^2 - 5kx + 4k - 1 = 0$
b) $x^2 + 3kx - k + 1 = 0$

Ejercicio Nº22

Hallar k sabiendo que una raíz es 3 veces la otra: $x^2+8x+k=0$

Factorización del trinomio de segundo grado

$$y=ax^2+bx+c$$
$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

pero: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ y $x_1.x_2=\frac{c}{a}$ reemplazando:

$$y=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2\right)$$
$$y=a\left(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2\right)$$
$$y=a\left(x(x-x_2)-x_1(x-x_2)\right)$$
$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Ejercicio Nº23

Factorizar los trinomios:

a) $2x^2-3x-2$
b) $x^2+4x-45$
c) $4x^2-3$
d) $3x^2+2x-1$
e) $-2x^2+2x+180$

Ejercicio Nº24

Resolver gráficamente las inecuaciones:

a) $y>2x^2-3x-2$
b) $y\leq x^2+4x-45$
c) $y\geq 4x^2-3$
d) $y<3x^2+2x-1$
e) $y\leq -2x^2+2x+180$

Ejercicio Nº25

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas

a) $4x^4-13x^2+3=0$
b) $4x^4-17x^2+4=0$
c) $4x^4-37x^2+9=0$
d) $4(x^2-1)^2+3x^2-3=0$
e) $(x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$

Recta secante, recta tangente o exterior a una parábola

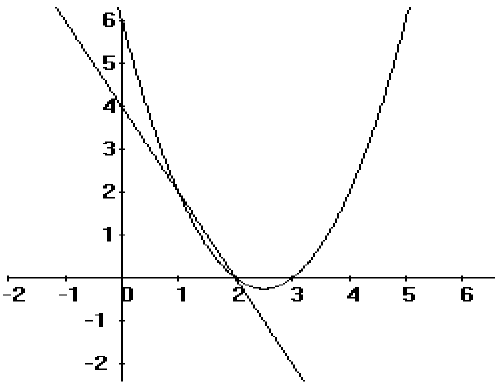
Resolvamos primero gráfica y luego analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \rightarrow \textit{parábola} \\ 2x + y = 4 \rightarrow \textit{recta} \end{cases}$$

a) Gráficamente

$$y = x^2 - \underbrace{5}_{2.\frac{5}{2}}x + 6 \qquad y = \underbrace{x^2 - 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}_{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} - \frac{25}{4} + 6$$

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} \qquad V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Representamos la parábola
Representamos la recta
Las coordenadas de los puntos A(2,0) y B(1,2) resuelven el sistema.

b) Analíticamente:

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 5x + 6 \\ y &= -2x + 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2x + 4 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 2x + 6 - 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 *$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

x=2 o x=1 , y=0 o y=2 , A(2,0) B(1,2)

Obtuvimos 2 puntos. Observemos la ecuación $*$. Al resolverla el discriminante es mayor que cero por eso encontramos 2 valores distintos para x. Es decir, existen dos puntos de intersección entre la recta y la parábola. La recta es **secante** a la parábola.

Cómo interpretarías gráficamente que el radicando hubiese sido:

a) nulo? (en este caso, la recta es **tangente** a la parábola)
b) negativo? (en este caso, la recta es **exterior** a la parábola)

Ejercicio Nº26

Resolver analítica y gráficamente:

a) $\begin{cases} -x^2+2x+3=y \\ 3x+y=7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y=-2x^2+4x+6 \\ y=-6x-6 \end{cases}$

Ejercicio Nº27

Dada la parábola $y=x^2-5x+6$, hallar la recta de la forma $y=mx+b$ tal que sea tangente a dicha la parábola en el punto (1,2) (**"punto de tangencia")**.

¿Existe otra recta que tenga un solo punto en común con la parábola en el punto (1,2) y no sea tangente? Indicar la ecuación. Graficar.

Ejercicio Nº28

Sea $y=x^2-2x-1$. Determinar m para que la recta $y=mx-2$ sea tangente a la parábola. Interpretar gráficamente e indicar punto de tangencia.

Ejercicio Nº29

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} y=-2x^2+x-1 \\ y=mx-1 \end{cases}$

indicar para qué valores de m la recta resulta secante a la parábola.

Ejercicio Nº30

Dada la parábola $y=3x^2-kx-1$ y la recta $y=kx-2$ determinar qué condición debe cumplir k para que:

a) La recta sea tangente a la parábola. Indicar punto de tangencia
b) La recta no corte a la parábola

Ejercicio Nº31

Dada $y=x^2-2x$ se pide

a) Ecuación de la secante que pasa por los puntos de la parábola de abscisas: $x_1=3$ $x_2=4$.

b) Ecuación de la tangente en el punto correspondiente a $x_1=3$.

Ejercicio Nº32

Hallar k para que la recta $y=2x+k$ sea tangente a la parábola $y=2x^2-2x$.

Realizar los gráficos correspondientes.

Ejercicio Nº33

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i) Graficar ii) Determinar el conjunto imagen.

a) $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-2x+1\right|$ b) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x\leq 1 \\ (x-1)^2 & si \quad x>1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & si \quad |x|\leq 2 \\ -3 & si \quad x<-2 \\ \frac{1}{2} & si \quad x>2 \end{cases}$

Unidad 4: Funciones polinómicas

Definición

La expresión:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$

se denomina **POLINOMIO** de grado n.

Ejercicio Nº1

Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

a) x^3

b) $\sqrt{5+x^2}$

c) $\dfrac{x+1}{x}$

d) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}$

e) x

f) $\sqrt{x+2}$

g) (x-1)(x+3)

h) 0

i) 1

j) $\dfrac{1}{x}$

k) $3x^{-2}$

Ejercicio Nº2

Ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la variable y determinar sus grados.

a) $\dfrac{1}{2} + x^4 - 2x^2$

b) -1+x

c) -3

d) 0

e) $-\dfrac{3}{4}x^5$

f) $-\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$

g) $\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$

g) $-\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2-x-x^2}{3}$

Definición

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ se denomina **función polinómica** de grado n.

Las funciones lineal y cuadrática que hemos estudiado en las unidades anteriores son casos particulares de esta cuando n es menor o igual a 2 .

En esta unidad trabajaremos con funciones polinómicas de cualquier grado.

Ejercicio Nº3

a) Graficar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3$

b) Graficar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / g(x)=(x-2)^3+1$ desplazando la gráfica anterior.

Ejercicio Nº4

Indicar si es V o F según corresponda:

a) 2 es un cero de $f(x)=x^2+4$

b) -2 es un cero de $f(x)=x^2+4$

c) -1 es un cero de $f(x)=x^3+1$

d) -3 es un cero de $f(x)=x^3+5/2x^2-3/2x$

❖ **Sobre los ceros (o raíces) de una función polinómica:**

Los ceros de una función polinómica son las raíces de la ecuación:
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$.

Si esta ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, simple o múltiple de orden impar, la gráfica de f atraviesa al eje x en x_0.

Si la ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, múltiple de orden par, la gráfica de f no atraviesa al eje x en x_0.

Llamamos **intervalo de positividad** de una función al subconjunto del dominio en el cual f es positiva, es decir $C^+(f)=\{x\in D_f \,/\, f(x)>0\}$

Análogamente, **intervalo de negatividad** de f: $C^-(f)=\{x\in D_f \,/\, f(x)<0\}$

Ejemplo:

Dada la función polinómica: $f(x)=x^3-3x$ deseamos conocer los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores positivos o negativos.

$f(x)=x^3-3x=x(x^2-3)$

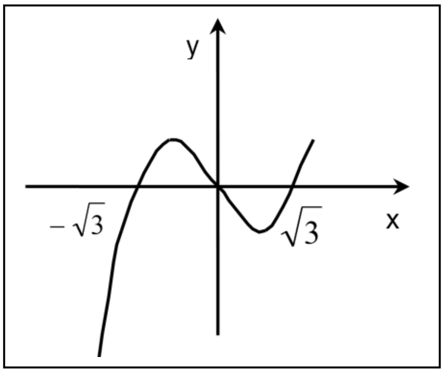
Ceros: x=0 x=$\sqrt{3}$ x=$-\sqrt{3}$

Son tres ceros simples $\Rightarrow$ la gráfica de f atraviesa al eje x en cada uno de ellos.

Completar la tabla con signo + si la función es positiva y signo – si es negativa.

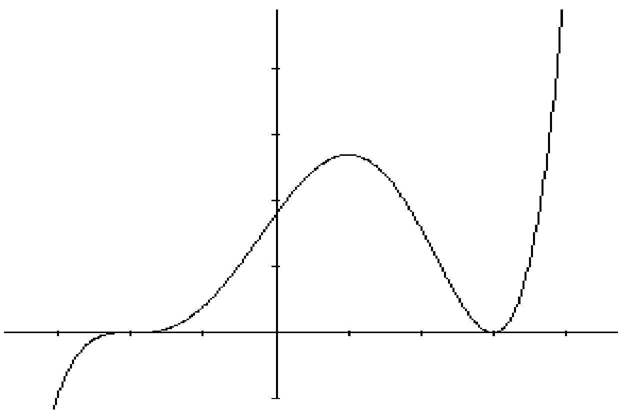
	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f(x)							

Si además de esto pudiéramos encontrar los máximos y mínimos podríamos dibujarla.
(la función polinómica es continua)



Ejercicio Nº5

En el siguiente gráfico, indica en qué punto la función tiene un cero de orden impar y en qué punto, un cero de orden par.



Ejercicio Nº6

Encontrar los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores negativos o positivos. Realizar la gráfica aproximada:

$$f(x)=x^3-3x^2.$$

Ejercicio Nº7
Dadas las siguientes funciones definidas de R en R,

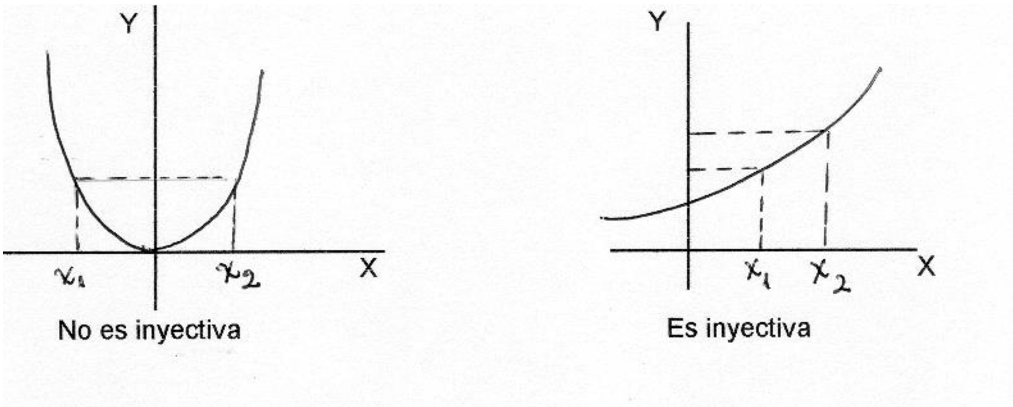
- Hallar los ceros,
- escribir los intervalos de positividad y
- estudiar paridad.
- Graficar aproximadamente.
- Indicar conjunto imagen.

a) $f(x)=x^3+2$
b) $f(x)=(x+2)^3$
c) $f(x)=(x-1)^3+2$
d) $f(x)=-x^3$
e) $f(x)=2x^3$
f) $f(x)=x^4$
g) $f(x)=-x^4+3$

❖ Clasificación de Funciones

<u>Función inyectiva:</u> Una función $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada B.
En símbolos:
$\forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

o bien, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede interceptar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del conjunto imagen puede ser imagen de más de un elemento del dominio.
Nótese que f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f es estrictamente creciente (o estrict. decreciente).



<u>Función sobreyectiva:</u> Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen preimagen en el dominio A. Dicho con otras palabras el conjunto B y el conjunto imagen de f deben coincidir.

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \,/\, y = f(x)$$

<u>Función biyectiva:</u> Una función es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

<u>Ejercicio Nº8</u>
Sea la función cuya fórmula es $f(x) = x^2 - 4$.
a) Graficar.
b) Unir con flechas según corresponda:

si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	f no es inyectiva ni sobreyectiva
si $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$	f no es función
si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$	f no es inyectiva pero es sobreyectiva
si $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$	f es inyectiva pero no es sobreyectiva

c) Indicar un par de conjuntos A y B para que: $f : A \to B \,/\, f(x) = x^2 - 4$ sea función biyectiva.

Ejercicio Nº9

Proponer el gráfico de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inyectiva y no sobreyectiva.

Ejercicio Nº10

Dados A= {1, 2, 3} y B={3,7}

a) Definir, si es posible, una $f : A \to B$ que sea:

a.1) Sobreyectiva

a.2) Inyectiva

b) Se puede definir en estos conjuntos una función biyectiva?

Explicar la respuesta

c) ¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos para que se pueda definir una función biyectiva entre ambos?

❖ Función Inversa

Se denomina **relación inversa** de una función f definida de A en B, a la que se obtiene de invertir los pares de f y se denomina f^{-1} .

Es decir dada f definida de A en B, cuya gráfica está constituída por los pares (a,b), la relación inversa de f (f^{-1}) está constituída por los pares (b,a). Esta relación queda definida de B en A y no siempre es función en dichos conjuntos.

Por ejemplo: Si A={1, 2, 3} y B={3,7} y $f : A \to B$ / f= {(1,3), (2,3), (3,7)}, su relación inversa $f^{-1} : B \to A$, f^{-1}= {(3,1), (3,2), (7,3)} No es función de B en A.

Qué condiciones debe cumplir una función $f : A \to B$ para que su relación inversa sea función de B en A?

Si la función admite función inversa y existe una expresión analítica a través de una fórmula y=f(x), para hallar la expresión analítica de la inversa cambiamos x por y, e y por x (es decir invertimos los pares), y despejamos la variable ¨y¨, si es posible.

Ejercicio Nº11

Dada la función $f:\mathbb{R}_0^+ \to [2,+\infty) \,/\, f(x)=x^2+2$. Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

Ejercicio Nº12

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x)=x^3$ .Clasificarla y hallar, si existe, su inversa. Representar.

Los gráficos de funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, o sea la recta y=x siempre que la escala utilizada en ambos ejes sea la misma.

Ejercicio Nº13

Clasificar las funciones del ejercicio 7 cuando están definidas de R en R.

Indicar, cuando sea necesario, restricciones en los conjuntos para que sean biyectivas.

En esos conjuntos, definir las funciones inversas.

Polinomios. Operatoria

Igualdad de polinomios:

<u>Ejercicio Nº14</u>

Determinar a,b y c (números reales) tales que los siguientes polinomios sean iguales:

a) $p(x)= a(3x-5)+b(2x-1)+cx^2$
   $q(x)=6-5x$

b) $p(x)=a(2x+1)+(bx+c)(2x-1)$
   $q(x) =(x+1)(4x+3)$

<u>Nota</u>: la igualdad de polinomios significa que son del mismo grado y PARA TODO VALOR DE X se verifica que p(x)=q(x). Esto significa la igualdad de las expresiones algebraicas.

Notemos la diferencia con la resolución de ecuaciones. En una ecuación, también se plantea una igualdad, pero esa igualdad se verifica sólo para algunos valores que son sus soluciones o raíces.
Por ejemplo, cuando se pide resolver la ecuación $7(3x-5)+2(2x-1)+3x^2=6-5x$ se pide que se hallen, si existen, el o los valores de x que satisfacen esta igualdad, que obviamente NO se verifica para todo x.

Operaciones con polinomios

<u>Ejercicio Nº15</u>

Dados los polinomios:

$p(x) = \frac{1}{2} + x^4 - 2x^2$

$r(x)=-1+x$

$s(x)=-3$

$t(x) = -\frac{3}{4}x^5$

$q(x) = -\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$

$v(x) = +\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$

$u(x)=-\frac{x-1}{2} + \frac{2-x-x^2}{3}$

Hallar

a) r(x)-2p(x) b) q(x).v(x) c) q(x)-v(x)

d) p(0)= $p(\sqrt{2})=$ $|s(0)| =$ t(-1)= ,q(-1)+p(-2)=

<u>Ejercicio Nº16</u>

Sean $a(x) = -\frac{1}{2}x^2$ b(x)=4x c(x)= $2x^3 - x^2 + 1$. Hallar las raíces o ceros del polinomio: p(x)=a(x).b(x)+c(x)

<u>Ejercicio Nº17</u>

Dados p(x)=-x+1 q(x)=2x. Hallar $p^2(x)+q(x)$

División de polinomios

Dados p(x) y q(x) dos polinomios, $q(x) \neq 0$ y $gr[p(x)] \geq gr[q(x)] \Rightarrow$ existen y son únicos c(x) y r(x) tales que: $p(x) = q(x).c(x) + r(x)$, siendo:
p(x) el dividendo, q(x) el divisor, c(x) el cociente y r(x) el resto, verificandose que gr r(x)<gr q(x) ó r(x)=0.

<u>Ejemplo:</u>
Sean $p(x)=x^4-2x^3-2x^2-3$ y $q(x)=x^2-2x+1$
Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de x y el dividendo debe completarse.

$$
\begin{array}{rl}
x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 & \underline{\big|\; x^2 - 2x + 1} \\
\underline{-x^4 + 2x^3 - x^2 \qquad\qquad} & \; x^2 - 3 \\
-3x^2 + 0x - 3 & \\
\underline{3x^2 - 6x + 3} & \\
-6x \qquad &
\end{array}
$$

Así, el cociente es C(x)= $x^2 - 3$ y el resto R(x)= $-6x$

<u>Ejercicio Nº18</u>

Dividir a(x) y b(x)

a) $a(x) = 3x^3 - 2x^5 - 2x^2 - 2x + 5$
$b(x) = x^3 - x + 2$

b) $a(x) = 6x^4 - x^2 + 1$
$b(x) = 3x^2 - x$

c) $a(x) = x^4 + c^2x^2 + c^4$
$b(x) = x^2 + cx + c^2$ c es constante

d) $a(x) = x^3 - c^3$
$b(x) = x + 2c$

e) $a(x) = x^4 - c^4$
$b(x) = x^2 + c^2$

f) $a(x) = -\frac{1}{3}x^5$
$b(x) = x^2 - x$

g) $a(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$
$b(x) = -x + 1$

h) $\begin{aligned} a(x) &= cx + 2c^2 - 1 - 2cx^3 - (2 + c^2)x^2 \\ b(x) &= 2x + c \end{aligned}$

Regla de Ruffini

Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio por otro que guarda la forma: x-a con a número real

Ejemplos:

I] Hallar el cociente y el resto de la división

$(-6x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2) : (x + 1)$

La disposición práctica es la siguiente:

		-6	2	-1	-1	2
			coeficientes del dividendo			
opuesto del termino ind. del div. o sea, "a"	-1		6	-8	9	-8
		-6	8	-9	8	-6
			coeficientes del cociente			resto

$c(x)=-6x^3+8x^2-9x+8$ $r(x)=-6$

II] $(7x^4+1-2x^2)$: (x-3)

	7	0	-2	0	1
3		21	63	183	549
	7	21	61	183	550

$c(x)=7x^3+21x^2+61x+183$ $r(x)=550$

Notas:

a) En todos los casos de división entre un polinomio p(x) y un binomio de la forma x-a el resto es una constante. Justificar.

b) Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es divisible por el divisor.

Ejemplos:

I] (x^2-9): (x-3)

$c(x)=x+3$ $r(x)=0$

$x^2-9=(x-3)(x+3)$ hemos factorizado el dividendo

II] Polinomios ya factorizados:

$y=x^2(x-1)$ es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son $x_1=0$ (doble) y $x_2=1$ (simple)

$y=2x(x-1)^2(x+2)^3$ es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son $x_1=0$ (simple) $x_2=1$ (doble) y $x_3=-2$ (triple)

$y=x(x+1)(x^2+1)$ es una función polinómica de grado 4. Tiene solo 2 ceros reales x=0 y x=-1

Teorema del resto

El resto de la división p(x) : (x-a) con a real es r=p(a)

Lo demostraremos:

p(x)	x-a
r	q(X)

p(x)=(x-a).q(x)+r

p(a)=(a-a)q(a)+r=r

Ejemplo: Siendo $p(x)=x^3+kx^2-kx-9$ determinar k para que –3 sea raíz de p(x)
$p(-3)=0=(-3)^3+k(-3)^2-k(-3)-9$ k=3

O sea $p(x)=x^3+3x^2-3x-9$ es divisible por (x+3), o sea por (x-(-3))

Podría factorizarlo:

	1	3	-3	-9
-3		-3	0	9
	1	0	-3	0

$p(x)=(x+3)(x^2-3)$

<u>Ejercicio Nº19</u>

Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre a(x) y b(x):

a) $a(x)=x^5+2x^3-2x^2+1 \quad b(x)=x-2$

b) $a(x)=-\frac{1}{2}x^3+x-1 \quad b(x)=x+2$

c) $a(x)=x^3+m^3 \quad b(x)=x+2$

d) $a(x)=16x^4+1 \quad b(x)=x+1$

e) $a(x)=-x+2-x^2+x^5 \quad b(x)=x-\frac{1}{2}$

f) $a(x)=mx^4-m^5 \quad b(x)=x-m$

g) $a(x)=(x-3)^2-2(x+1) \quad b(x)=2x-(x-1)$

h) $a(x)=(x^2-m)(x^2+m) \quad b(x)=(x+m)(x-m)-x(x-1)$

<u>Ejercicio Nº20</u>

Calcular directamente los restos de las divisiones del ejercicio anterior.

Ejercicio Nº21

Calcular m para que a(x) sea divisible por b(x)

a) $a(x) = x^4 - mx^2 + 1$
$b(x) = x + 1$

b) $a(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 2$
$b(x) = x + 1$

Ejercicio Nº22

Investigar si p(x) es divisible por q(x) en los siguientes casos. Extraer conclusiones:

a) $p(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$ $q(x) = x + a$

b) $p(x) = x^{2n+1} - a^{2n+1}$ $q(x) = x - a$

c) $p(x) = x^{2n} - a^{2n}$ $q(x) = x + a$

d) $p(x) = x^{2n} - a^{2n}$ $q(x) = x - a$

e) $p(x) = 8x^3 + 1$ $q(x) = 2x + 1$

f) $p(x) = x^{2n} + a^{2n}$ $q(x) = x - a$

Ejercicio Nº23

Calcular k para que $a(x)=2x^2-3x-9$ sea divisible por $b(x)=x-k$

Ejercicio Nº24

Sea $a(x)=2x^4-x^2+mx-m$ Calcular "m" sabiendo que la diferencia de los restos de su división por (x+m) y (x-m) es igual a -1.

Ejercicio Nº25

Determinar m y t para que
$a(x)=x^4+mx^2+t$ sea divisible por $b(x)=x^2+x+1$

Ejercicio Nº26

Calcular el valor de a, si r es el resto de p(x):q(x)
a) $p(x)=4x^3-x^2+ax-2$, $q(x)=x-2$, $r=26$
b) $p(x)=5x^4+ax^2+ax^3+3x^2$, $q(x)=x-3$, $r=0$

Ejercicio Nº27

En una división de polinômios se cumple que:
divisor: $2x^2+x+5$
cociente: x^2+x
resto: $x+6$
hallar el polinomio dividiendo.

Ejercicio Nº28

Determinar k para que el resto de la división entre $3kx^4+(k+1)x^3+2x^2$ y x+1 sea –1

Factorización de un polinomio

Cuando b es un cero o raíz de un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,
(x-b) es divisor de p(x), luego p(x) podría factorizarse como:
p(x)=(x-b)q(x), siendo q(x) el cociente de la división
Es posible que q(x) tenga más raíces con lo que puede iterarse el proceso factorizando q(x). Es decir, p(x) puede descomponerse en más factores si conocemos todas sus raíces reales.
$p(x) = a_n(x-b_0)(x-b_1).....(x-b_n)$

Ejemplo: la factorización de una función polinómica de grado 3 cuyos ceros son $x_1=0$ $x_2=1$ y $x_3=-2$, es:
y=a.x.(x-1).(x+2)

El valor de "a" no está determinado, por lo tanto existen infinitas funciones que cumplen con la condición. Podemos obtener una de ellas dándole un valor cualquiera a "a"no nulo.
Si se pidiese que la función sea tal que además cumpla que f(2)=4
f(2)=a.2(2-1)(2+2)=4 $\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, es decir, "a" queda determinado

$$y = \frac{1}{2}x(x-1)(x+2)$$

Nota aclaratoria:
Un polinomio de grado no nulo es primo cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. Son primos únicamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales. Cuando un polinomio no es primo es compuesto.

Ejercicio Nº29

Escribir un polinomio que cumpla con las condiciones pedidas.

a) de grado 3 que tenga raíces 2,-1y$\frac{1}{2}$.
b) de grado 4 que tenga como únicas raices a: –1 y 2.
c) de grado 4 que tenga al menos 2 raices simples reales: –1 y 2.

Ejercicio Nº30

Escribir un polinômio de grado 8 tal que –1 es una raíz de multiplicidad 3 y cero sea una raíz de multiplicidad 5.

Ejercicio Nº31

Mostrar que 1 es una raíz de multiplicidad 3 de $p(x)=x^4+x^3-9x^2+11x-4$. Encontrar la otra raíz.

Ejercicio Nº32

Definir un polinomio p(x) de grado 5 tal que sus únicas raices reales sean x= 1 de multiplicidad 2 y x= -2 de multiplicidad 1 y ademas p (-1) = 3

Teorema de Gauss

Sea $m(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ un polinomio en el cual sus coeficientes son <u>números enteros.</u>

Si existen raíces racionales de m(x), entonces dichas raíces son de la forma

$$\frac{p}{q} \text{ donde } \begin{cases} p \text{ divide a } a_0 \\ q \text{ divide a } a_n \end{cases}$$

con p y q primos entre sí y $a_0 \neq 0$.

Si bien las raíces de un polinomio de las características enunciadas pueden no ser racionales, el teorema de Gauss permite buscar fácilmente sólo las que lo son, logrando una factorización del polinomio *m(x)*.

<u>Ejemplos</u>**:**

I] Factorizar $p(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

Vemos que $a_n=1$ y $a_0=12$.

divisores de $a_0=\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 12\}$

divisores de $a_n=\{\pm 1\}$

$$\frac{p}{q}\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 12\}$$

Por ser $a_n=1$ vemos que los divisores de 12 son las posibles raíces de *m(x)*

$m(1)=0 \Rightarrow 1$ es raíz

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ 1 & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & 0 \end{array}$$

$m(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$

Buscamos las raíces de $x^3+3x^2-4x-12$

Probemos con 1: $1+3-4-12\neq 0$, 1 no es raíz

Probemos con –1: $(-1)^3+3(-1)^2-4(-1)-12\neq 0$, -1 no es raíz

Probemos con 2 : $2^3+3.2^2-4.2-12=0$, 2 es raíz

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

m(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)

factorizamos el trinomio de segundo grado: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

Luego, la factorizaci'on resulta

m(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)

II] m(x)=3x^3+8x^2-2x-4. Se ve que a_n=3 y a_0=-4

Buscamos los divisores de 4 y de 3.

Cualquier raíz debe estar entre los números: $\pm\frac{2}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm 1,\ \pm 4,\ \pm\frac{4}{3}$

De estas 12 posibles sólo 3 pueden ser raíces de la ecuación $3x^2+8x^2-2x-4=0$

$m\left(-\frac{2}{3}\right)=0$

	3	8	-2	-4
-0.67		-2	-4	4
	3	6	-6	0

$m(x)=(x+\frac{2}{3})(3x^2+6x-6)$

Factorizamos el trinomio de segundo grado

$3x^2+6x-6=3\left(x-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-(-1-\sqrt{3})\right)$

y vemos que sus raíces no son racionales, no hubieran surgido de Gauss: se puede probar que ninguno de los otros 11 valores es raíz del polinomio.

Hemos factorizado el polinômio $m(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$

Ejercicio Nº33

Factorizar

a) $x^2-2x+3+(x+1)^2$

b) x^4-5x^2+4

c) $-4x^4+12x^2-9$

d) x^4-64

e) $x^6-2x^5-x^4+4x^3-x^2-2x+1$

f) $8x^4-x$

g) $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$

h) x^5-2x^4+3x-6

i) $\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2-x-\frac{1}{6}$

Ejercicio Nº34

Determinar las raíces reales de:

a) $t(x)=3x^3-x^2-12x+4$

b) $r(x)=\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^4-8x+8$

Ejercicio Nº35

Determinar las raíces de los polinomios, establecer la multiplicidad de cada raíz y graficar aproximadamente.

a) $p(x)=x^4+4x^3-5x^2$

b) $t(x)=x^3(x^2-4)^2$

c) $q(x)=(x^2+2x-3)(x^2+5x+6)$

d) $r(x)=\left(2x^2-4x+2\right)\left(x^4-x^2-12\right)$

Unidad 5: Funciones racionales no enteras o fraccionarias y funciones irracionales

Expresiones y funciones racionales

La expresión $\frac{p(x)}{q(x)}$ con p(x) y q(x) polinomios, se denomina expresión algebraica racional.

Una función racional es una función que asigna imágenes a través de una expresión racional.

$f: A \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ siendo p(x) y q(x) dos polinomios tales que q(x) es de grado mayor o igual que 1 y $A = \{x / x \in \mathbb{R} \quad y \quad q(x) \neq 0\}$

Ejemplo de función racional:

$f: \mathbb{R} - \{-2;2\} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 7}{x^2 - 4}$

Ejercicio Nº1

Hallar el dominio más amplio en $\mathbb{R}$, los ceros y representar:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{x - 3}{-x^2 + 9}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^3 - x^2 - 12x + 4}$

Casos particulares de funciones racionales:

a) Cuando el numerador y el denominador tienen raíces comunes, pueden factorizarse y simplificarse, obteniendo una expresión más sencilla. Sin embargo, el dominio mayorante de la función sigue siendo el conjunto de los números Reales de los cuales se excluyen los puntos que anulan el denominador de la función dada.

Por ejemplo: $f: \Re - \{3\} \to \Re / f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3}$

Esta fracción puede simplificarse pues $x \neq 3$ f(x)=x+3. Tiene por gráfica a una **recta** de ecuación y=x+3 excluído el punto (3,6).

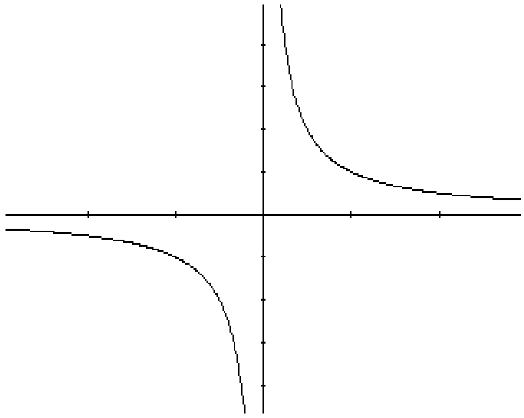
b) **Función homográfica**: $f: \Re - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \Re / \ f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad c \neq 0$

La consideramos función homográfica siempre que no pueda reducirse a una función constante. ¿En qué caso se produciría esta situación?

Notemos que R no es el conjunto imagen. Hallar el conjunto imagen.

La gráfica de la función homográfica es una curva llamada **hipérbola equilátera**.

Estudio de la función homográfica



Sea la función homográfica que surge de la definición
con a=0, b=1, c=1 y d=0

$$y = \frac{1}{x}$$

Conforme los valores de x están más próximos a cero,
el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que el valor absoluto de f(x) tiende a infinito cuando x se acerca a cero), en símblos

$$|f(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$$

Entonces diremos que el eje y, de ecuación x=0, es asíntota vertical de la curva.
En general, diremos que la recta de ecuación x=a es una asíntota vertical de la curva gráfica de f, cuando $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} \infty$

Volviendo al gráfico, vemos que a medida que x crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a cero. $f(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$

Diremos que el eje x, de ecuación y=0, es asíntota horizontal al gráfico de f(x).
En general, diremos que la recta de ecuación y=b es una asíntota horizontal de la curva gráfica de f, cuando $f(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} b$

Las asíntotas (en este caso los ejes coordenados) son perpendiculares, por eso se llama hipérbola equilátera (sólo este tipo de hipérbola será objeto de estudio em este curso) y se cortan en un punto que es el centro de simetría de la curva. La hipérbola tiene 2 ramas que en este caso están situadas en el 1er y 3er cuadrante (recordemos que los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del semieje positivo de las x)

Si representamos f(x)=$-\frac{1}{x}$ las ramas estarían en el 2do y 4to cuadrante.

Conociendo la gráfica de f(x)=$\frac{1}{x}$ puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos la gráfica de :

f(x)=$\frac{k}{x-x_0} + y_0$ (forma canónica)

La gráfica de esta función es una hipérbola que se obtiene de la gráfica de f(x)=$\frac{k}{x}$ desplazándola x_0 unidades en el sentido positivo de x (si x_0>0) y y_0 unidades en el sentido positivo de y (si y_0>0)

Si la función está dada en la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ puede llevarse a la forma canónica $f(x) = \frac{k}{x-x_0} + y_0$ de dos maneras:

Veamos un ejemplo:

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}$$

- **Completando los términos para simplificar y obtener la forma canónica**

$$f(x)=\frac{\frac{1}{3}(3x+3)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2+1)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)}{3x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}, \textit{sacando factor comun } 3 \textit{ y operando}$$

$\textit{con el numerador } 1/3{:}3=1/9$, tenemos $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$

- **O bien, dividiendo los polinomios se obtiene cociente $\frac{1}{3}$ y resto $\frac{1}{3}$**

Por ser una división entera $x+1=\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}$

Dividiendo miembro a miembro por 3x+2

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$av: x=-\frac{2}{3} \qquad ah: y=\frac{1}{3} \qquad D_f=\Re-\left\{-\frac{2}{3}\right\} \quad I_f=\Re-\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

<u>Ejercicio Nº2</u>

Dadas las funciones:

a) $f(x)=\frac{4x-1}{2x+3}$ b) $f(x)=\frac{x-2}{5x-10}$ c) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

d) $f(x)=\frac{2,5x+20}{5x+50}$ e) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{8+2x}{x}$

f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ g) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

Se pide: a) Graficarlas b) Dominio e imagen c) Ceros d) En los casos de funciones homográficas: pasaje a la forma canónica y ecuaciones de las asíntotas

Ejercicio Nº3

Dadas las siguientes funciones, se pide forma canónica, ecuaciones de las asíntotas, gráficos correspondientes, ceros, intervalos donde la función es positiva y creciente.

a) $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{-2x-3}{x-1}$

Ejercicio Nº4

Sea $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

¿Para qué valores de $x\in\mathbb{R}-\{3\}$:

a) f(x)>2?

b) f(x)>-1?

c) -1<f(x)<2 ?

Resolver analítica y gráficamente.

Ejercicio Nº5

Sea $f:A\to B\,/\,f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Hallar A y B mayorantes para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

Ejercicio Nº6

Representar, determinar el conjunto imagen y clasificar en $\Re$. En el caso de no ser biyectiva, buscar una restricción que lo sea y hallar la inversa.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\geq 1\\ x & \text{si} \quad x<1\end{cases}$$

Ejercicio Nº7

Graficar:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x)=\left|\dfrac{1}{x-2}+3\right|$

c) $f(x)=\left|\dfrac{-2}{x-2}+3\right|$

d) $f(x)=\left|\dfrac{-2}{x-2}\right|+3$

e) $f(x)=\dfrac{1}{|x|-2}$

Ejercicio Nº8

Hacia un tanque de agua que contiene agua pura fluye agua salada de modo tal que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t)=\dfrac{t}{10t+100}(t>0)$

Graficar c y discutir el comportamiento de la función cuando $t\to\infty$. Interpretar

Ejercicio Nº9

La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar la dosis de medicamentos para adultos (representada por "a" y medida en mg) a fin de que sirvan para niños:

$f(t)=\dfrac{at}{t+12}$ t>0 a en mg

Hasta qué edad un niño debe consumir menos de la mitad de la dosis máxima. Suponiendo a=2 mg. ¿Cuál es el gráfico que permite visualizar la variación de la dosis con el tiempo?

Ejercicio Nº10

Sea $f:A\to B\,/\,f(x)=\dfrac{2x(x+1)}{x^2-1}$

Hallar A y B máximos para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

Operatoria con expresiones racionales

Ejercicio Nº11

Reducir a su mínima expresión haciendo las restricciones necesarias:

a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^3+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^3}{8}-1}{\dfrac{x^2}{4}-1}:(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)$

c) $\left(x+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+2x}\right)$

d) $\left(\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x+3}\right).\dfrac{x^2-x+3(x-1)}{25x^2-81}$

e) $\dfrac{x^2-21x-7}{7-x}:\left(\dfrac{4x+1}{7+x}+\dfrac{2x+1}{7-x}\right)$

f) $\dfrac{\left(-\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1-x}\right).\left(\dfrac{2(1-x)^2}{x^2+4x+4}+\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}\right)}{\dfrac{x}{4-x^2}}$

Ejercicio Nº12

Efectuar: $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Ejercicio Nº13

Hallar A y B para que:

a) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{3x-1}{x^2+x-2}$

b) $\frac{2A}{2x-1}-\frac{B}{x+3}=\frac{2x+13}{2x^2+5x-3}$

Ejercicio Nº14

(Optativo) Descomponer en fracciones simples:

a) $\frac{x}{x^2-1}$

b) $\frac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}$

c) $\frac{x^4}{x^2-1}$

d) $\frac{x^5-1}{x^2+x}$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con expresiones racionales

Ejercicio Nº15

Resolver las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta en cada caso el dominio de definición.

a) $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}$

b) $\frac{x}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-3}$

c) $\frac{x-6}{x+4}+\frac{x-3}{x+2}=\frac{13x-48}{x^2+6x+8}$

Ejercicio Nº16

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones analítica y gráficamente:

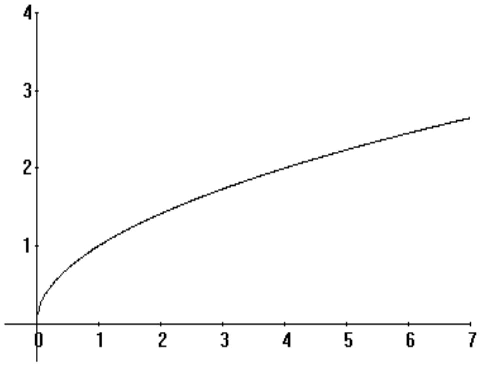
a) $\begin{cases} y=\frac{x+3}{x-1} \\ y=x-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=\frac{2x+4}{x+3} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=\frac{1}{x+1} \\ y=-1 \end{cases}$

Funciones cuyas fórmulas contienen expresiones irracionales

a) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, f(x)=\sqrt{x}$, $I_f=\mathbb{R}_0^+$ ceros: x=0. Es estrictamente creciente.



Ejercicio Nº17

Teniendo en cuenta la gráfica de $f:A\to\mathbb{R}(A\subset\mathbb{R})\,/$ f(x)= $\sqrt{x}$ y mediante simetrías y/o desplazamientos.

Graficar:

a) $f(x)=-\sqrt{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x-1}$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$

En todos los casos obtener: dominio máximo, ceros, conjunto imagen. Analizar si son biyectivas y obtener las funciones inversas (si es necesario restringir).

Ejercicio Nº18

Dada $f:A\to\mathbb{R}(A\subset\mathbb{R})\,/\,f(x)=\sqrt{1-x^2}$ se pide: a) Dominio máximo, b) Conjunto imagen, c) Ceros, d) Gráfica, e) Clasifique, f) Buscar una restricción biyectiva, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

Ejercicio Nº19

Sea $f:A\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=\sqrt{|x|+1}$ se pide:

a) Dominio máximo, b) conjunto imagen, c) ceros, d) gráfico, e) clasificación, f) intervalo en que la función es positiva y creciente simultáneamente, g) si no es biyectiva buscar una restricción que lo sea, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

Ejercicio Nº20

Sea $f:\Re\to\Re\,/\,f(x)=\sqrt[3]{x-1}$. Clasificar. Hallar la inversa (si es necesario restringir). Graficar ambas.

Ejercicio Nº21

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & \text{si} \quad x\geq 2\\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{si} \quad x<2\end{cases}$$

Se pide: representar, conjunto imagen, ceros, clasificar, inversa (si es necesario buscar una restricción).

Ejercicio Nº22

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, teniendo en cuenta las restricciones:

a) $\sqrt{1-x}=\sqrt{x^2-5}$

b) $x+2=13-\sqrt{x-5}$

c) $\sqrt{x^2-5}+7=x^2$

d) $x^2+\sqrt{x^2+9}=21$

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{8x+1}=0$

Unidad 6: Álgebra de funciones

IGUALDAD

Dos funciones f:Df → B y Dg → C son iguales cuando:
Df = Dg ; B = C y para todo x: f(x) = g(x)
Por ejemplo:

Las funciones $f: R-\{2\} \to R \,/\, f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y g: R→R/ g (x) = x+2

no son iguales ya que $D_f \neq D_g$, sin embargo, notemos que para todo x≠2, f(x) = g(x). Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo g(2) = 4

Si definimos una función h: R→R/ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 4 & si\ x = 2 \end{cases}$, resulta h = g

SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

f+g(x) = f(x)+g(x) para todo x , siendo D(f+g) = Df ∩ Dg

f.g(x) = f(x).g(x) para todo x , siendo D(f.g) = Df ∩ Dg

$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para todo x, siendo $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \neq 0\}$

Ejemplo :

Sean f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ D_f = R-{1} y g(x)= $\sqrt{x}$ D_g= $\mathbb{R}_0^+$ entonces,

$(f+g)(x) = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ $\quad D_{f+g} = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$

$(f.g)(x) = \dfrac{1}{x-1}.\sqrt{x}$ $\quad D_{f.g} = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$

$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{1}{(x-1).\sqrt{x}}$ $\quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

COMPOSICION DE FUNCIONES

Analicemos la siguiente situación:
Cuando una piedra cae al agua se generan círculos que van creciendo en función del tiempo en forma concéntrica.
El área del círculo depende del radio. A su vez el radio aumenta al transcurrir el tiempo, supongamos que lo hace según la función

$$r(t) = 3t, \text{ resulta:}$$
$$A(r) = \pi.r^2 \quad \text{con } r(t)=3t$$

El área del círculo, depende entonces del tiempo a través de la función $A(r(t))= \pi.(3t)^2$

Definición:
Dadas dos funciones $f:Df \to If$ y $g:Dg \to Ig$ y tales que $If \subset Dg$, llamamos función compuesta g sobre f, a $gof:Df \to Ig$ / para todo x , $gof(x) = g[f(x)]$

Observaciones:

* La imagen de f debe estar incluída en el dominio de g para que todos los elementos de Df tengan imagen a través de la función compuesta gof.

* La imagen de g es, en general, el codominio (conjunto de llegada) de la compuesta y no su conjunto imagen, ya que puede haber elementos en el dominio de g que no sean imagen de ningún elemento de Df (si la inclusión es estricta)

* Si la inclusión pedida en la definición no se verifica, pueden hacerse las restricciones necesarias para la composición.

Veamos un ejemplo para aclarar estos puntos:

Sean

$$f(x) = 2x+1 \quad \text{y } g(x)= \frac{1}{x-1}$$

Df=R If=R

Dg=R-{1} Ig=R-{0}

Para realizar la composición gof debemos verificar que la imagen de la primer función a aplicar (f) esté incluída en el dominio de la segunda función a aplicar (g) .

Esto no se verifica, entonces realizamos la siguiente restricción:

Como necesitamos que 1 no pertenezca a If, para eliminarlo, restringimos Df.
Vemos que 2x+1=1 cuando x=0. Bastará entonces tomar como Df * =R-{0}, luego la
Imagen correspondiente será If=R-{1} que coincide (y por lo tanto está incluída) en Dg.

A pesar de que, hechas las restricciones las funciones no son las mismas, usaremos por comodidad las mismas letras para nombrarlas.

Ahora; gof:R-{0} → R-{0} / gof(x) = g[f(x)] = g[2x+1]= $\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$

Para hallar fog, debemos analizar si el Ig está incluída en el Df.
Como R-{0} $\subset$ R, podemos realizar la composición:

fog:R-{1}→ R / fog(x) = f[g(x)]= $f\left(\frac{1}{x-1}\right)=2.\frac{1}{x-1}+1=\frac{1+x}{x-1}$

Notemos que como la inclusión es estricta, el conjunto R es el codominio (conjunto de llegada) y no la imagen de la función compuesta fog

Como vemos, fog ≠ gof. La composición de funciones *no es una operación conmutativa*.
Puede demostrarse que la composición de funciones *es asociativa*.

<u>Composición de funciones inversas</u>:

Sean las funciones biyectivas f:A → B y f^{-1}:B → A
a través de f a cada x de A le corresponde un y de B
a través de f^{-1} a cada y de B le corresponde un x de A
O sea f^{-1} (f(x))= x que se denomina función identidad y está definida de A en A

Análogamente, si aplicamos primero f^{-1}, diremos:
a través de f^{-1} a cada x de B le corresponde un y de A
a través de f a cada y de A le corresponde un x de B

Entonces; $f(f^{-1}(x))$ = x que es la identidad, pero ahora definida de B en B.

Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto de la recta y=x
(gráfica de la función identidad).

<u>Ejercicio Nº1</u>
Dados los siguientes pares de funciones f y g indicar para cada una, dominio mayorante e imagen y hallar f+g, f.g y f/g indicando el dominio mayorante de cada una.

a) f(x)= x^2 g(x)= 2x-1
b) f(x) = x^2 g(x) = $\sqrt{x}$
c) f(x) = $\frac{1}{x-2}$ g(x) = 3x+2

<u>Ejercicio Nº2</u>
Dadas f(x)= $\sqrt{x}$ y g(x)= $x^2 - 1$, hallar:
a) f(g(1)) b) g(f(1)) c)g(f(2)) d) f(g(2)) e) fog f) gof

Ejercicio Nº3
Dados los pares de funciones del ejercicio 1, hallar fog y gof haciendo restricciones a los conjuntos si fuese necesario

Ejercicio Nº4
Dada fog: $R \to R$ / fog(x)= $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.
Hallar g, siendo f: $R \to R$/ f(x)= 2x-1.

Ejercicio Nº5
Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo.
a) Escribir la función de medida del radio respecto del tiempo.
b) Sabiendo que la función de medida del volumen respecto del radio para la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi.r^3$, hallar la función de medida del volumen respecto del tiempo. Calcular el volumen para t=3

Ejercicio Nº6
Dadas las siguientes funciones, indicar dominio e imagen, buscar su inversa (restringiendo si es necesario para la biyectividad) y componer para obtener la identidad. Indicar en todos los casos, dominios e imágenes.
a) $f(x) = x^2+2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

Ejercicio Nº7
(Optativo) Indicar si es V o F, expresando un argumento que justifique la respuesta.
a) La composición de funciones inyectivas, es inyectiva.
b) La composición de funciones sobreyectivas, es sobreyectiva.

RESPUESTAS

Unidad 1.

EJERCICIO Nº 1

a) Es función porque para todo elemento x ϵ [a;b] se verifican las dos condiciones: de existencia y de unicidad.

b) No es función pues para los x ϵ [c;d) no hay imagen (falla la existencia).

c) No es función pues para los x ϵ (c;b) no hay imagen (falla la existencia).

d) No es función pues falla la existencia para los x ϵ [a,c) y la unicidad para x=c y para algunos valores en las proximidades de c, mayores que él.

EJERCICIO Nº 2

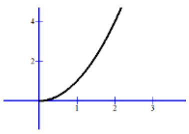
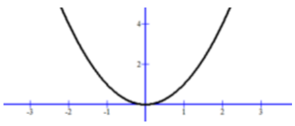
a) Sí. b) No es función pues para los x<0 no hay imagen (falla la existencia).

c) No es función pues para los x mayores que cero no hay imagen (falla la existencia). El único elemento de la relación es el par (0;0). d) Sí. e) Sí. f) Sí.

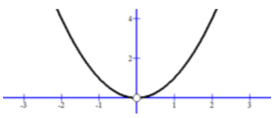
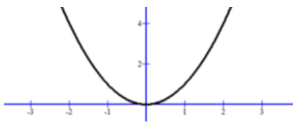
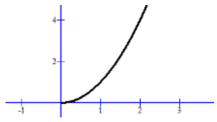
EJERCICIO Nº 3

1) $y = x^2$

a) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$. Sí. b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$. Sí. c) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^- / f(x) = x^2$. No.

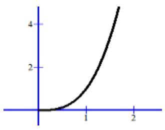
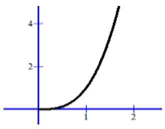
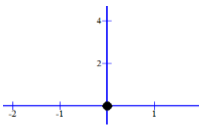

d) $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$. Sí. e) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$. Sí. f) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$. Sí.

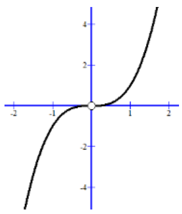
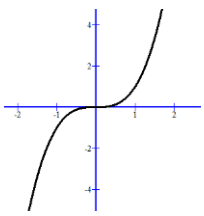
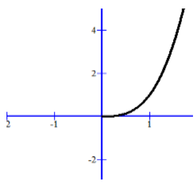
2) $y = x^3$

a) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} / f(x) = x^3$. Sí. b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^3$. No. c) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^- / f(x) = x^3$. No.

Los $x < 0$ no tienen imagen. Los x>0 no tienen imagen.

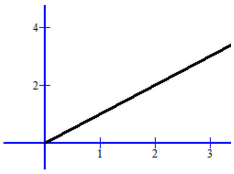
d) $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / f(x) = x^3$. Sí. e) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^3$. Sí. f) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^3$. Sí.

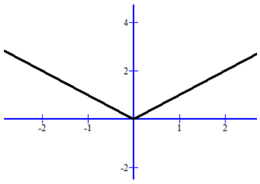




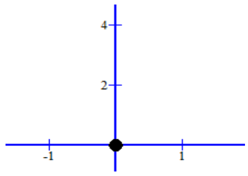
3) $y = |x|$

a) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x|$. Sí. b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \,/\, f(x) = |x|$. Sí. c) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^- \,/\, f(x) = |x|$. No.

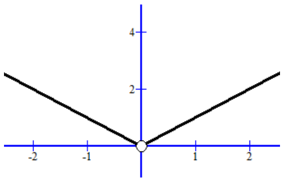
Los x>0 no tienen imagen

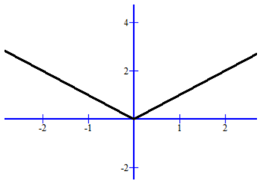


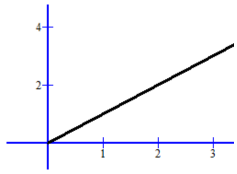




d) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x|$. Sí. e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x|$. Sí. f) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,/\, f(x) = |x|$. Sí.



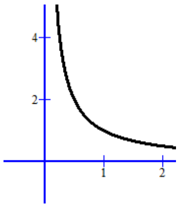


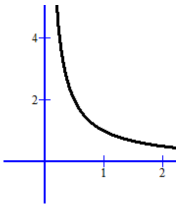


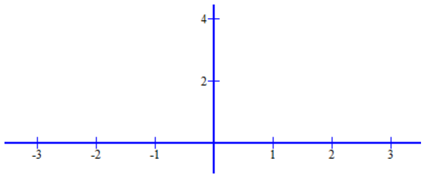
4) $y = \frac{1}{x}$

a) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$. No. b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$. No. c) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^- \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$. No.

El cero no tiene imagen. Los $x \leq 0$ no tienen imagen. Los $x \geq 0$ no tienen imagen.

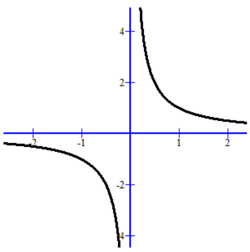


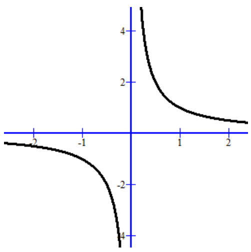


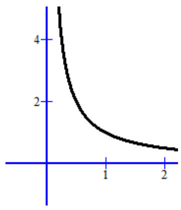


d) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$. Sí. e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$. No. f) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$. No.

El cero no tiene imagen. El cero no tiene imagen.





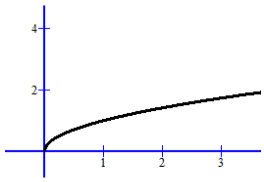


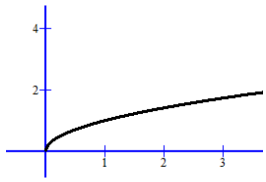
5) y = $\sqrt{x}$

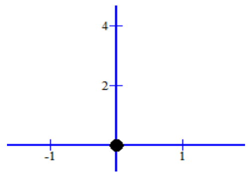
a) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ / f(x) = $\sqrt{x}$. Sí.

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ / f(x) = $\sqrt{x}$. No. Los $x < 0$ no tienen imagen.

c) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$ / f(x) = $\sqrt{x}$. No. Los $x > 0$ no tienen imagen.



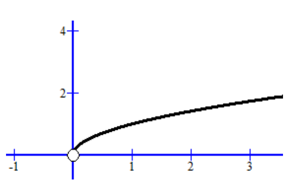


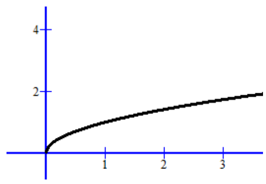


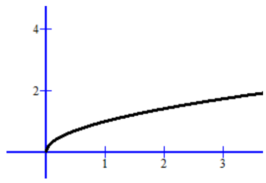
d) $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ / f(x) = $\sqrt{x}$. Sí.

e) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f(x) = $\sqrt{x}$. No. Los $x < 0$ no tienen imagen.

f) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ / f(x) = $\sqrt{x}$. Sí.





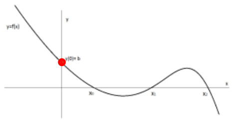


EJERCICIO Nº 4

a) $[-3;3)$ b) $\mathbb{R}-\{-3;-1;3\}$ c) $\left[-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$

d) $(1;+\infty)$ e) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[4;+\infty)$ f) $(-\infty;1]$

EJERCICIO Nº 5

a) 

b) No, no sería función

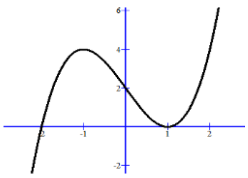
(falla la condición de unicidad, existen dos imágenes para el cero).

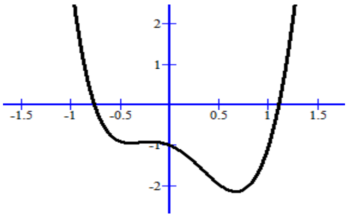
c) 1), 2), 3) y 5)

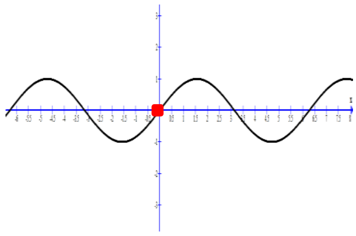
a), b), c), e) y f) la ordenada al origen es b=0; d) no existe ordenada al origen

4) no existe ordenada al origen porque x=0 no pertenece al dominio

d) (Estos son algunos ejemplos, hay cantidad de otros también válidos)

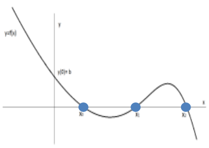




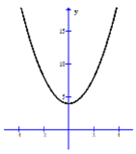


EJERCICIO Nº 6

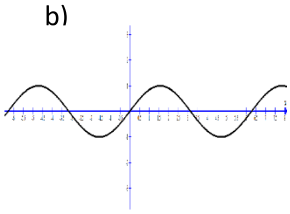
i)



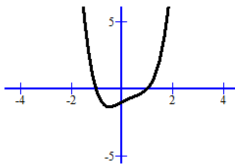
ii) a)



b)



c)



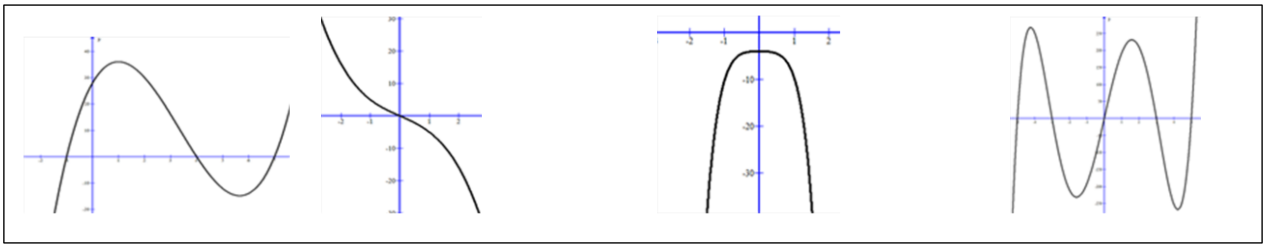
iii) 1), 2), 3) y 5)

a), b), c), e) y f) la abscisa al origen es $x_0=0$; d) no existe abscisa al origen

4) no existe abscisa al origen porque no hay preimagen del cero.

iv) (Estos son algunos ejemplos, hay cantidad de otros también válidos)

a) b) c) d)



EJERCICIO Nº 7

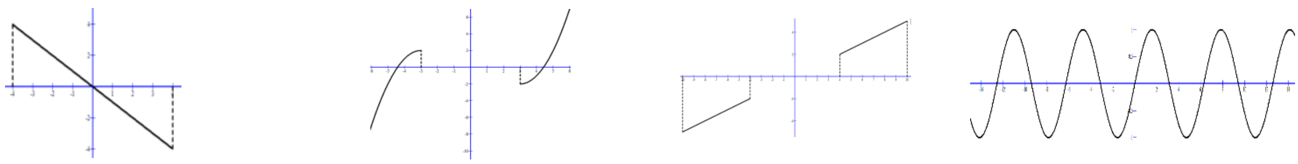
a) [2;7] b) [0;+∞) c) (-∞;4] d) [0;+∞) e) [0;2] f) $\mathbb{R}-\{0\}$ g) [0;+∞)

EJERCICIO Nº 8

a) Es par. $\forall x \in D: f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$
b) No es par pues f(1)=3 y f(-1)=-1
c) Es par. $\forall x \in D: f(-x) = |-x| = |-1|\,|x| = |x| = f(x)$
d) Es par. $\forall x \in D: f(-x) = 4 - (-x)^2 = 4-(-1)^2\left(x\right)^2 = f(x)$

EJERCICIO Nº 9 (Estos son algunos ejemplos, hay cantidad de otros también válidos)

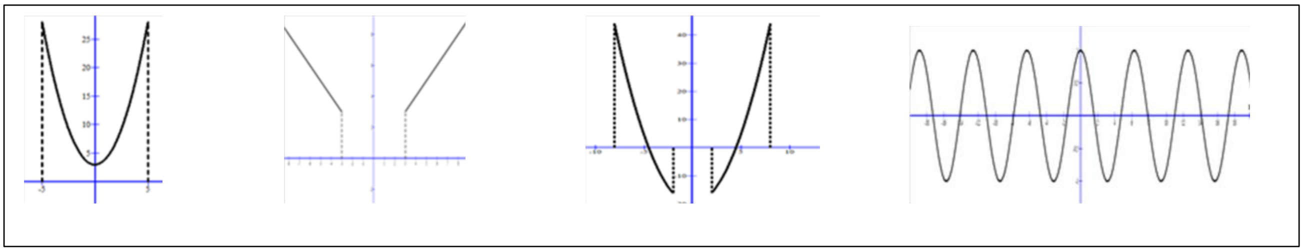
a) b) c) d)



EJERCICIO Nº 10

a) Es impar. $\forall x \in D: -f(-x) = -(-x)^3 = -(-1)^3 x^3 = x^3 = f(x)$
b) No es impar pues f(1)=0 y -f(-1)=-2.
c) Es impar. $\forall x \in D: -f(-x) = -\left(-x\right) = x = f(x)$
d) Es impar. $\forall x \in D: -f(-x) = -\sqrt[3]{-x} = -\left(-\sqrt[3]{x}\right) = f(x)$

EJERCICIO Nº 11 (Estos son algunos ejemplos, hay cantidad de otros también válidos)



EJERCICIO Nº 12

La función nula es par e impar. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f(x) = 0

Es par: $\forall x \in D$: f(-x) = 0 = f(x)

Es par: $\forall x \in D$: -f(-x) = -0 = 0 = f(x)

Es la única:

¿qué funciones verifican que f(-x)=-f(-x)?

$$f(-x) = -f(-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(-x) + f(-x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2f(-x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(-x) = 0/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(-x) = 0$$

Como x es cualquiera podemos escribir f(x)=0.

Luego <u>la única función par e impar simultáneamente es la función nula</u>.

Unidad 2

1) a) La recta forma un ángulo de 45° con el semieje positivo de las x.

b) Las tangentes son 2 y 2/3 respectivamente. Coinciden con el coeficiente m o sea con la pendiente de la recta.

c) – 3 y -1/2 respectivamente.

2) a) y = -2 x b) y = $\frac{1}{2}$ x c) y = $\frac{2}{3}$ x

4) a) sí; b) m>0; m<0.

9) $b) A = [-\frac{2}{5}; +\infty)$ $c) B = [-\frac{12}{5}; \frac{13}{5})$

d) $D = (\frac{7}{5}; +\infty)$ $e) E = (\frac{2}{5}; \frac{19}{10}]$

10) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{33}{7}$

11) a) y = x + 7 b) y = -$\sqrt{3}$x + 7

12) a) y = x – 10 b) y = 1/3x – 28/3 c) y = -11 x +2 d) y = -9x

13) f(x) = $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ o f(x) = $-\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$ con $1 \leq x \leq 3$

14) No, las rectas paralelas al eje Y no representan funciones.

15) a) Están alineados. b) (6 ; -2)

16) El punto de intersección es respectivamente: a) {(-1; 2)} b) $\varnothing$

c) y = $\frac{3}{4}x + \frac{10}{3}$; x$\in$R o en forma equivalente $S = \left\{ (x, y) / y = \frac{3}{4}x + \frac{10}{3} \right\}$

17) $y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{2}$

18) y = -3 x –1

19) y = –3x –1

20) a) Falso; b) verdadero; c) Falso

21) 49 /4

22) a) k = -3/10 $h \in \Re$ b) k = 5/6 $h \neq 1$ c) k = 5/6 h = 1

23) a) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$

24) Diagonales: x = 0 ; y = 0

Lados: y = -3/2 x +3; y = 3/2 x –3 ; y = 3/2 x +3 ; y = - 3/2 x – 3

25)

a)

	Forma implícita	F. explícita	F.segmentaria
r1	-3/2x-y+3=0	y=-3/2x+3	X/2+y/3=1
r2	3y-2x-9=0	y=2/3x+3	$\frac{x}{-9/2}+\frac{y}{3}=1$
r3	y+3/2=0	y=-3/2	
r4	x-3=0		
r5	2y+3x-19=0	y=-3/2x+19/2	$\frac{x}{19/3}+\frac{y}{19/2}=1$

26) k =$\pm\sqrt{3/2}$

27) a) 12m b) y = 3/2 x

28) a) L = 3/35 P + 43/7 b) L = 43/7 c) Por cada 10g 20/35

Por cada 5g 10/35

Por cada 1g 2/35

29) a) 8 m^3 b) V = $8-\frac{1}{8}t$

Unidad 3

1) 1.1) x=3;   eje de simetría x=3 intersección con el eje y (0;9)

1.2) x $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; eje de simetría x=0 intersección con el eje y (0;-2)

1.3) x = -2 $\pm\sqrt{3}$; eje de simetría x= -2 intersección con el eje y (0;1)

1.4) x_1=4 x_2=0; eje de simetría x=2 intersección con el eje y (0;0)

1.5) ∅; eje de simetría x=1 intersección con el eje y (0;-2)

1.6) x_1=1 x_2=3; eje de simetría x=2 intersección con el eje y (0;12)

1.7) ∅; eje de simetría x=-2 intersección con el eje y (0;5)

1.8) x_1=1 x_2=0 de simetría x=0.5 intersección con el eje y (0;0)

3) a) b) c) d) e)

	Ecuación canónica	vértice	Eje de simetría	Imagen	{x/f(x) ≥0}
1	$y = (x-3)^2$	(3,0)	x = 3	$[0, +\infty)$	R
2	$y= 3x^2-2$	(0,-2)	x = 0	$[-2, +\infty)$	$(-\infty,-\sqrt{2/3}\,] \cup [\sqrt{2/3},+\infty)$
3	$y= (x+2)^2 - 3$	(-2,-3)	x = -2	$[-3, +\infty)$	$(-\infty,-2-\sqrt{3}\,] \cup [-2+\sqrt{3},+\infty)$
4	$y= 3(x-2)^2 -12$	(2, -12)	x = 2	$[-12, +\infty)$	$(-\infty,0] \cup [4,+\infty)$
5	$y= -(x-1)^2 -1$	(1,-1)	x = 1	$(-\infty,-1]$	∅
6	$y= 4(x-2)^2 - 4$	(2,4)	x = 2	$[4, +\infty)$	$(-\infty,1] \cup [3,+\infty)$
7	$y =(x+2)^2+1$	(-2,1)	x = -2	$[1, +\infty)$	R

	crece	decrece
1	$(3,+\infty)$	$(-\infty,3)$
2	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$
3	$(-2,+\infty)$	$(-\infty,-2)$
4	$(2,+\infty)$	$(-\infty,2)$
5	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
6	$(2,+\infty)$	$(-\infty,2)$
7	$(-2,+\infty)$	$(-\infty,-2)$
8	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2,+\infty)$

4) a) p1: $y = \frac{1}{4}(x-2)^2+4$ p2: $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

b) p1: $y = (x+1)^2+4$ p2: $y = -x^2-1$

5) a) p2: $y = \frac{5}{4}(x-2)^2$ $a_1 = \frac{5}{8}$

b) $y = -2x^2 + 4x+6$ V= (1 , 8) Ceros: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ Im f = $(-\infty, 8]$

Positiva y decreciente: (1 , 3) Negativa y creciente: $(-\infty, -1)$

6) x = 2, y = 2

7) x = 18, y = 18

8) x = 150

9) a) t = 3 y t = 18 b) sí, cuando t=25

10) $x \approx 1{,}68$; $y \approx 1{,}68$

11) a) $e = f(t) = 6 - 3t + t^2$ $v= g(t) = -3 +2t$ $a = h(t) = 2$

c) En t = 1,5 velocidad cero En [0; 1,5) retardado y en (1,5; 5] acelerado d) 2

e) $e = t +2$ tangente a la parábola.

La pendiente de la recta tangente en to es la velocidad en to.

f) pendiente cero => velocidad cero.

12) b) t = 5

13) a) asciende (0 , 600/49) desciende (600/49; 1200/49)

b) altura máxima : 734,7 m cuando t= 600/49 = 12,24 seg

c) 1200/40 = 24,49 seg

d) t_1= 0,424 seg t_2=24,065 seg

14) V, V, F, V, V

15) $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

16) $x^2 +2x - 35 = 0$

17) a) 2(x -2)(x – 8) b) -1/2(x -1+ $\sqrt{3}$)(x –1- $\sqrt{3}$)

18) a) m= 1/32 b) m = 1 c) m = 12

19) a) a = 3 o a = -1 b) a = 3 + 2 $\sqrt{2}$ o a = 3 -2 $\sqrt{2}$

20) a) k = 1 b) k = 1

21) a) k = 1/4 b) k =1

22) k = 12

23) a) y = 2 (x - 2)(x + 1/2) b) y = (x - 5)(x + 9) c) y = 4 (x - $\sqrt{3}$ /2)(x + $\sqrt{3}$ /2)

d) y = 3 (x +1)(x - 1/3) e) y = -2 (x - 10)(x + 9)

25) a) $x_1=\sqrt{3}$; $x_2= -\sqrt{3}$; x_3=1/2; x_4= -1/2

b) x_1=2; x_2= -2; x_3=1/2; x_4= -1/2

c) x_1=3; x_2= -3; x_3=1/2; x_4= -1/2

d) x_1=1; x_2= -1; x_3=1/2; x_4= -1/2

e) $x_1=\sqrt{2}$; $x_2= -\sqrt{2}$; x_3=2; x_4= -2

26) a) A = (4,-5) B = (1,4)

b) A = (6, -42) B = (-1,0)

27) y = -3 x + 5

28) m = 0 o m = -4

29) Todo valor real de m≠1

30) a) k = $\pm\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

31) a) y = 5x – 12 b) y = 4x -9

32) k = -2

__**Unidad 4**__

1. Son polinomios: a) d) e) g) h) i)

2.

a) $x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$ grado 4

b) $x - 1$ grado 1

c) -3 grado 0

d) 0 carece de grado

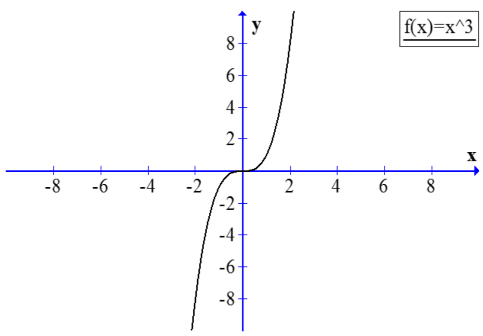
e) $-\frac{3}{4}x^5$ grado 5

f) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}$ grado 2

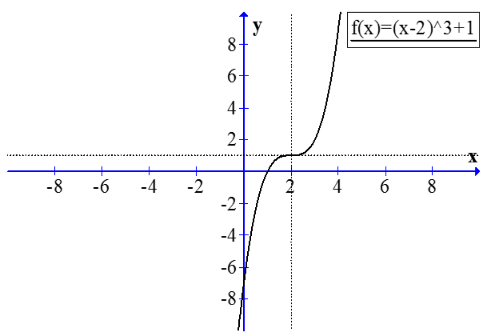
g) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}$ grado 2

h) $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}$ grado 2

3. a)



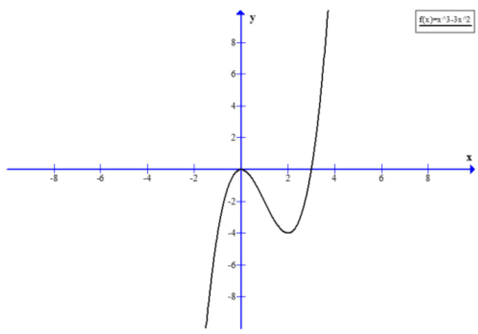
b)



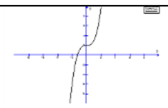
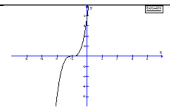
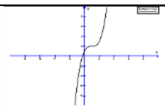
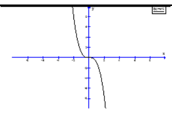
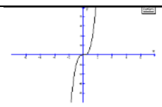
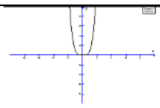
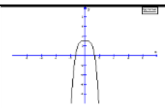
4. a) F b) F c) V d) V

5. En x=-2 la función tiene un cero de orden impar y en x=3 de orden par.

6. $C^0 = \{0(doble);3(simple)\}$; $C^+ = (3;+\infty)$; $C^- = (-\infty;3) - \{0\}$



7. Sea f definida en R.

	C^0	C^+	C^-	gráfico	par	impar	imagen
a	$\{-\sqrt[3]{2}\}$	$(-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
b	$\{-2\}$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;-2)$		No	No	R
c	$\{1-\sqrt[3]{2}\}$	$(1-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;1-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
d	$\{0\}$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$		No	Si	R
e	$\{0\}$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$		No	Si	R
f	$\{0\}$	$R-\{0\}$	ϕ		Si	No	[0;+oo)
g	$\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\}$	$(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3})$	$(-\infty;-\sqrt[4]{3})\cup(\sqrt[4]{3};+\infty)$		Si	No	(-oo;3]

8. b) Las funciones son respectivamente:
No inyectiva, no sobreyectiva, Inyectiva, no sobreyectiva, No es función
c) Los conjuntos A y B no son únicos, una posibilidad es: A = R_0^+ B = [-4; +∞)

9. Son funciones i) ii) iv) v) . i) y iv) son sobreyectivas pero no inyectivas; ii) es biyectiva; v) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

10. a) a.1) por ejemplo f (1) = 3 ; f (2) = 3; f (3) = 7

a.2) imposible.

b) No, porque no puede definirse una función inyectiva.

c) Ambos conjuntos deben tener la misma cantidad de elementos.

11. Biyectiva. $f^{-1}:[2,+\infty)\to\Re_0^+ / f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

12) Biyectiva. $f^{-1}:\Re\to\Re / f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

14. a) a=-1 b=-1 c=0

b) a=15/4 b=2 c=3/4

15.a) $-2x^4+4x^2+x-2$

b) $2x^4-3$

c) $-2\sqrt{3}$

d) $p(0)=1/2$ $p(\sqrt{2})=1/2$ $|s(0)|=3$ $t(-1)=3/4$ $q(-1)+p(-2)=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{17}{2}$

16. $C^0=\{1;-1\}$

17. x^2+1

18. a) $C(x)=-2x^2+1; R(x)=2x^2-x+3$

b) $C(x)=2x^2+2/3x-1/9; R(x)=1/9x+1$

c) $C(x)=x^2-cx+c^2; R(x)=0$

d) $C(x)=x^2-2cx+4c^2; R(x)=-9c^3$

e) $C(x)=x^2-c^2; R(x)=0$

f) $C(x)=-1/3x^3-1/3x^2-1/3x+1/3; R(x)=-1/3x$

g) $C(x)=x^2-x; R(x)=1$

h) $C(x)=-cx^2-x+c;$ $R(x)=c^2-1$

19. a) $C(x)=x^4+2x^3+6x^2+10x+20; R=41$

b) $C(x)=-1/2x^2+x-1; R=1$

c) $C(x)=x^2-2x+4; R=m^3-8$

d) $C(x)=16x^3-16x^2+16x-16; R=17$

e) $C(x) = x^4 + 1/2x^3 + 1/4x^2 - 7/8x - 23/16; R = 41/32$

f) $C(x) = mx^3 + m^2x^2 + m^3x + m^4; R = 0$

g) $C(x) = x - 9; R = 16$

h) $C(x) = x^3 + m^2x^2 + m^4x + m^6; R = m^8 - m^2$

20.-Aplicar el teorema del resto (ver las respuestas del anterior)

21. a) m=2 **b)** m=-3/2

22. a) SI **b)** SI **c)** SI **d)** SI **e)** SI **f)** NO

Conclusiones:

- La suma (resta) de potencias de igual grado, con grado par o impar, es divisible por la suma (resta) de sus bases
- La resta de potencias de igual grado par es divisible por la resta de sus bases
- La suma de potencias de igual grado par no es divisible por la resta de sus bases, ni tampoco por la suma (PROBARLO)

23. k=3 ó k=-3/2

24. $m_1 = \sqrt{2}/2 \quad m_2 = -\sqrt{2}/2$

Para armar a(x) reemplazar m por cada uno de los valores, hay dos posibilidades.

25. m=1 t=1

26. a) a=0 **b)** a= -12

27. $2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 6$

28. k=-1

29. **a)** a(x-2)(x+1)(x-1/2), a real distinto de cero

b) Hay varias posibilidades

$$a(x+1)^3(x-2); a \in R; a \neq 0$$

$$a(x+1)(x-2)^3; a \in R; a \neq 0$$

$$a(x+1)^2(x-2)^2; a \in R; a \neq 0$$

c) Hay infinitas posibilidades: a(x+1)(x-2)(x-h)(x-k) con h y k reales, a real no nulo

30. $a(x+1)^3 x^5; a \in R; a \neq 0$

31. Aplicar Ruffini 3 veces consecutivas y obtener resto cero (las tres veces)

La otra raíz se halla igualando a cero el último cociente: x=-4

32. $-3/16(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$, hay infinitas posibilidades porque el último factor, si bien tiene que ser un polinomio sin raices reales, puede elegirse en forma diversa.

33. **a)** $2(x^2+2)$

b) $(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$

c) $-4(x-\sqrt{6}/2)^2(x+\sqrt{6}/2)^2$

d) $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x^2+8)$

e) $(x+1)^2(x-1)^4$

f) $8x(x-1/2)(x^2+1/2x+1/4)$

g) $(x-3)(x+3)(x-1)^2$

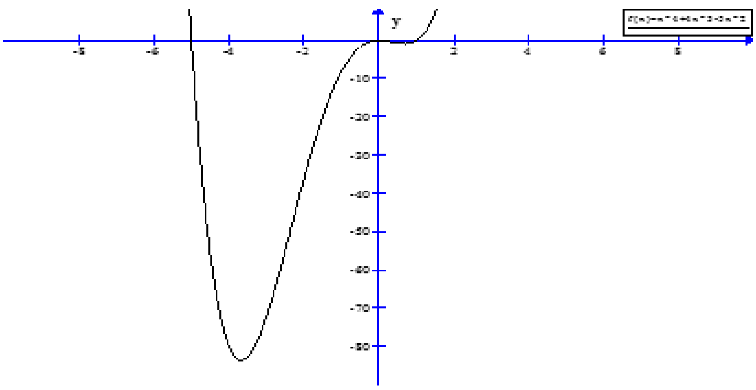
h) $(x^4+3)(x-2)$

i) $2/3(x+1/2)(x+1/4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

34. **a)** 2;-2;1/3

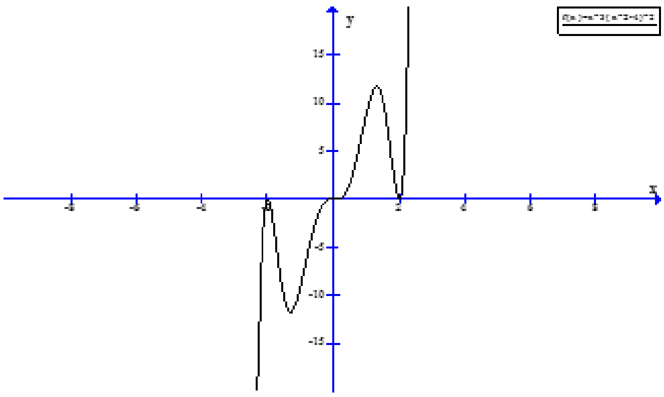
b) 2;-2; 1

35. **a) Ceros:** 0: raíz doble 1 y -5 raíces simples



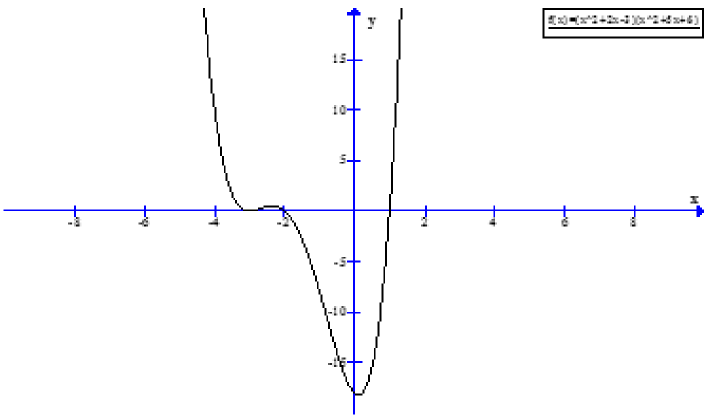
La gráfica “rebota” en 0 y “atraviesa” el eje x en -5 y 1

b) Ceros: 0: raíz triple   2 y -2 raíces dobles



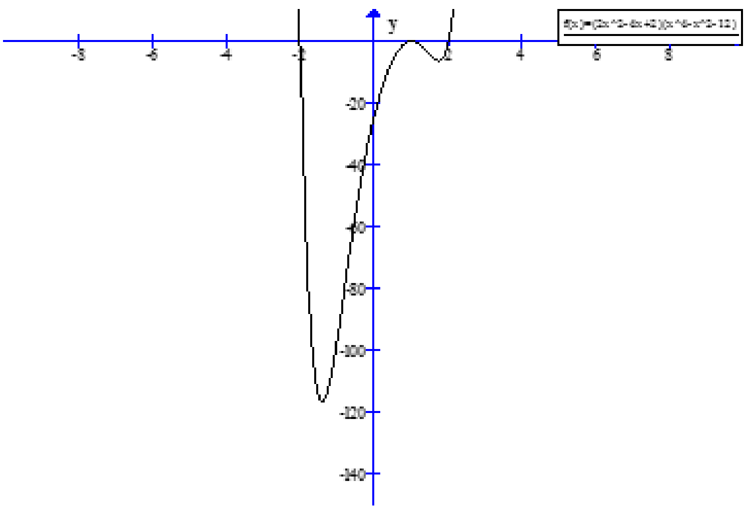
La gráfica “rebota” en -2 y 2 y “atraviesa” el eje x en 0

c) Ceros: -3: raíz doble   1 y -2 raíces simples



La gráfica “rebota” en -3 y “atraviesa” el eje x en -2 y 1

d) Ceros: 1: raíz doble   2 y -2 raíces simples   y hay dos raíces no reales.



La gráfica “rebota” en 1 y “atraviesa” el eje x en -2 y 2

Unidad 5

1. a) R – { 1}, no tiene ceros

   b) R – {-3, 3} , no tiene ceros

   c) R – {-2, 1/3, 2} , no tiene ceros

2.

	Dominio	Imagen	Ceros	F. Canónica	Asíntotas
a)	R –{-3/2}	R-{2}	1/4	$y = \dfrac{-\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}} + 2$	AV: x= -3/2 AH: y=2
b)	R-{2}	{1/5}	No tiene		
c)	R-{-2,2}	R-{0, ¼}	No tiene	y= $\dfrac{1}{x+2}\ \forall x \neq 2, x \neq -2$	AV: x= -2 AH: y=0
d)	R-{10}	R-{1/2}	-8	y=$\dfrac{-1}{x+10} + \dfrac{1}{2}$	AV: x= -10 AH: y=1/2
e)	R-{0}	R-{2}	-13/2	$y = \dfrac{13}{x} + 2$	AV: x= 0 AH: y=2
f)	R-{1}	R-{2}	-1		
g)	R-{1}	R	No tiene		

3.

	Ceros	F. Canónica	Asíntotas	Int de Posit.	Creciente
a)	1/4	$y = \frac{-\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}} + 2$	AV: x= -3/2 AH: y=2	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	R-{-3/2}
b)	-3/2	$y = -2 - \frac{5}{x-1}$	AV: x= 1 AH: y=-2	$\left(-\frac{3}{2},1\right)$	R-{1}

4.

a) (3;7/2)

$b)\quad (-\infty,2) \cup (3;+\infty)$

$c)\quad (-\infty,2) \cup \left(\frac{7}{2};+\infty\right)$

5. A: R –{ 1} B: R –{2}, $f(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$ $f^{-1}; R - \{2\} \to R - \{1\} / f^{-1}(x) = \frac{2}{x-2} + 1$

6. $D_F : R$ $I_f : (-\infty,1]$ No sobreyectiva, no inyectiva

8. Al trascurrir el tiempo tendiendo a infinito la concentración tiende a 0,10, aunque nunca alcanza ese valor.
9. 12 años

10. A: R-{-1, 1} B: R-{1, 2}

$f^{-1} : \Re - \{1,2\} \to \Re - \{1,-1\} / f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$

11 a) 0 x ≠ –1 d) $\frac{1}{5x+9}$ x ≠1; -3; 9/5; -9/5

b) $\frac{2}{x+2}$ $x \neq 2$ $x \neq -2$ e) -1/2 (7+x) x≠ 7, -7; $\frac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$

c) $\frac{x-1}{x}$ $x \neq 1$ f) -3x+2+x^2 x≠ -2; -1; 0; 1; 2

12.Rta: $0 \quad x \neq 0 \;\; x \neq -1$; 1

13.a) A=2/3 B=7/3 b) A= 2 y B=1

14. a) $\frac{0.5}{x-1}+\frac{0.5}{x+1}$ b) $2+\frac{5}{x-2}$

c) $x^2-1+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}$ d) $x^3-x^2+x-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

15.

$a) S=\{-3;18\}$
$b) S=\{-2\}$
$c) S=\{2,6\}$

16. a) $S=\{(0,-3)\;(5;2)\}$ b) $S=\{(-1,1)\;(-5;3)\}$ c) $S=\{(-2,-1)\}$

17.

a) Dominio máximo reales positivos con el cero, cero : x= 0. Conjunto Imagen; reales negativos con el cero, no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^- \rightarrow \Re_0^+ / f^{-1}(x)=x^2$

b) Dominio máximo reales mayores o iguales que 1, cero: x= 1. Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^+ \rightarrow [1,+\infty) / f^{-1}(x)=x^2+1$

c) Dominio máximo reales mayores o iguales que -1, cero: x= -1,0 Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^+ \rightarrow [-1,+\infty) / f^{-1}(x)=x^2-1$

18.

Dominio maximo: [-1:1]; Imagen [0;1], No es biyectiva restricción para que lo sea Dom:[0;1],Im:[0;1]

$f^{-1}:[0;1] \rightarrow [0;1] / f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$

19. Dominio máximo: R

Imagen $[1,+\infty)$, no tiene ceros. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom:$\mathbb{R}_0^+$ e Im: $[1,+\infty)$

$f^{-1}:[1,+\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ $/ f^{-1}(x) = x^2 - 1$

La f es creciente y positiva en todo su dominio

20.Es biyectiva. $f^{-1}: R \to R / f^{-1}(x) = x^3 + 1$

21. Cero: x=2,

Imagen $[0,+\infty)$. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom: $[2,+\infty)$ Imagen $[0,+\infty)$.

$f^{-1}: \Re_0^+ \to [2,+\infty)$ $/ f^{-1}(x) = x^2 + 2$

22.

$a)\ S = \{-3\}$

$b) S = \{9\}$

$c) S = \{-3,3\}$

$d) S = \{4,-4\}$

$e) S = \{3\}$

Unidad 6

1) a) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R_0^+$ $\quad Domg = R; \operatorname{Im} g = R$

- $f + g(x) = x^2 + 2x - 1; Dom = R; \operatorname{Im} = [-2; +\infty)$
- $f \cdot g(x) = 2x^3 - x^2; Dom = R; \operatorname{Im} = R$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{2x-1}; Dom = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}; \operatorname{Im} = R$

b) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R_0^+$ $\quad Domg = R_0^+; \operatorname{Im} g = R_0^+$

- $f + g(x) = x^2 + \sqrt{x}; Dom = R_0^+; \operatorname{Im} = R_0^+$
- $f \cdot g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}; Dom = R_0^+; \operatorname{Im} = R_0^+$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}; Dom = R^+; \operatorname{Im} = R^+$

c) $Domf = R - \{2\}; \operatorname{Im} f = R - \{0\}$ $\quad Domg = R; \operatorname{Im} g = R$

- $f + g(x) = \frac{3x^2 - 4x - 3}{x-2}; Dom = R - \{2\}; \operatorname{Im} = R$
- $f \cdot g(x) = \frac{8}{x-2} + 3; Dom = R - \{2\}; \operatorname{Im} = R - \{3\}$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{(x-2)(3x+2)}; Dom = R - \left\{2; -\frac{2}{3}\right\}; \operatorname{Im} = R - \{0\}$

2) a) 0 b) 0 c) -1 d) no existe e) $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ f) $g \circ f(x) = x - 1$

3) a) $f \circ g(x) = (2x-1)^2; Dom = R; \operatorname{Im} = R_0^+$

Para $g \circ f$ debemos restringir $Domg = R_0^+$

$g \circ f(x) = 2x^2 - 1; Dom = R; \operatorname{Im} = [-1; +\infty)$

b) Para $f \circ g$ debemos restringir $Domf = R_0^+$

$f \circ g(x) = x; Dom = R_0^+; \operatorname{Im} = R_0^+$ $\quad g \circ f(x) = |x|; Dom = R; \operatorname{Im} = R_0^+$

c) $f \circ g(x) = \frac{1}{3x}; Dom = R - \{0\}; \operatorname{Im} = R - \{0\}$

$g \circ f(x) = \frac{3}{x-2} + 2; Dom = R - \{2\}; \operatorname{Im} = R - \{2\}$

4) g:R→R/ g(x)= $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

5) a) $f:R_0^+ \to R_0^+ / f(t)=1+\frac{1}{10}t$

b) $V:R_0^+ \to R_0^+ / V(t)=\frac{4}{3}\pi(1+\frac{1}{10}t)^3$ $\qquad V(3)=\frac{13^3}{750}\pi$

6) a) $Domf = R; \operatorname{Im} f = [2;+\infty); f^{-1}:[2;+\infty) \to [0;+\infty) / f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

$f \circ f^{-1}:[2;+\infty) \to [2;+\infty)$ $\qquad f^{-1} \circ f:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$

b) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R; f^{-1}:R \to R / f^{-1}(x)=x^3+3$

$f \circ f^{-1}:R \to R$ $\qquad f^{-1} \circ f:R \to R$

c) $Domf = R-\{3\}; \operatorname{Im} f = R-\{2\}; f^{-1}:R-\{2\} \to R-\{3\} / f^{-1}(x)=\frac{5}{x-2}+3$

$f \circ f^{-1}:R-\{2\} \to R-\{2\}$ $\qquad f^{-1} \circ f:R-\{3\} \to R-\{3\}$

7)a) VERDADERO

Para demostrar la inyectividad de $g \circ f$ partiendo de $g \circ f(x_1)=g \circ f(x_2)$ debemos inferir que $x_1 = x_2$

$g \circ f(x_1)=g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ por ser g inyectiva.

Como f es inyectiva se puede inferir la igualdad de las abscisas:

$$g \circ f(x_1)=g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo cual la composición de funciones inyectivas, es inyectiva.

b) FALSO

Para que la composición $g \circ f$ sea posible, se debe verificar que $\operatorname{Im} f \subset Domg$.

Si la inclusión es estricta existe al menos un elemento del dominio de g, que no pertenece a la imagen de f: $x_0 \in oDomg / x_0 \notin \operatorname{Im} f$, dicho de otro modo, x_0 nunca será alcanzado por f. Entonces $y_0 = g(x_0) \notin \operatorname{Im} f \circ g$.

Por lo tanto, aunque las dos funciones sean sobreyectivas, la composición no siempre lo es.

TRABAJO PRÁCTICO 0 (4to año)

1. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $(-x+2)^3 = 1$ b) $x^3 = x$ c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

d) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ e) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$ f) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{18})\, x = -6$

g) $(x-1)^4 - 3(x-1)^2 = -2$ h) $(m^2 - 1)(m^2 + 3) = 2m^2$

i) $4a^2(1 - a - a^2) = -a^4 + a^3$ j) $3(x^4 - 16)(x^3 - 2x^2 + x) = 0$

k) $\frac{7}{5}\left(1 - \frac{3}{10}y\right)\left(\frac{7}{3} + \frac{14}{9}y\right) = 0$ l) $(x^3 - 8)(x^3 + 8)(6x^2 + 7x + 8)(1 - x) = 0$

m) $9p^9 - 7p^7 = 6p^9 + 2p^7$

2. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ b) $\frac{x+11}{x} = 7 - \frac{9+4x}{x^2}$ c) $4x - \frac{2}{x} = 2x + \frac{35}{3}$

d) $x + \frac{1}{x-3} = 5$ e) $(x - 5\sqrt{x})^2 + 10(x - 5\sqrt{x}) + 24 = 0$ f) $\frac{t+1}{t^2-1} = \frac{1}{t-1}$

3. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a) $\left(x + \frac{1}{5}\right)(-3x + 9) \geq 0$ b) $(2x+1) \cdot (3x - 2) < 0$ c) $3x^2 + 15x \geq 0$

d) $(x + 10)^2 \geq -4$ e) $x^4 \leq -5$ f) $|x - 2| \cdot (x^2 - 5) \geq 0$

g) $x^2 - x < 0$ h) $x^2 - ½ \leq 4 - x^2$ i) $(2x-3)^2 > 4(x+1)(x+2)$

j) $x^2 + 2x + 1 \leq 4$ k) $x^3 > x$

4. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas inecuaciones:

a) $\dfrac{25x^2-9}{3+\sqrt{x^2-5}}<0$ b) $\dfrac{2}{x}<-\dfrac{3}{5}$ c) $-\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{27-x^3}{|x+3|}<0$

e) $\dfrac{|x-2|}{x^2-5}\leq 0$ f) $\dfrac{x^2-5}{|x-2|-2}\leq 0$ g) $\dfrac{x^2-5}{|x-2|+2}\leq 0$ h) $\dfrac{2x-4}{x^2-9}\geq 0$

i) $\dfrac{2}{x}-3<-1$ j) $\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{6}{x}$ k) $\dfrac{3}{x+2}<-2$

l) $\dfrac{3x+2}{x+1}<1$

5. Dadas las siguientes funciones definidas de su dominio D en R:

i) $f(x)=x^2-2x+1$ ii) $f(x)=x^2+5x-2$ iii) $f(x)=|x-3|$ iv) $f(x)=|x^2-x|$

v) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ vi) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

a) Hallar dominio e imagen

b) Clasificarlas de D en R y hallar conjuntos mayorantes en los que sean biyectivas

c) En dichos conjuntos, hallar la función inversa

Conjunto mayorante: Máximo en sentido de inclusión

6. Dada la recta **r**: y = $-\dfrac{1}{2}$ x + 1, obtener la ecuación de la recta **s** que cumple con la condición establecida en cada ítem:

a**)** **s** // **r** y contiene al origen de coordenadas; b) **s** $\perp$ **r** y tiene ordenada al origen -3;

c) **s** $\perp$ **r** e interseca al eje de abscisas en -3; d) **s** // **r** y contiene al punto (2/3; 9).

7. ¿Para qué valor de m, las rectas **r**: (5m - 1) x - y + 2 = 0 y **s**: 3 x – 6 y + 9 = 0 son perpendiculares?

8. Un auto circula por la ruta 2 y la distancia (en km) que lo separa de Buenos Aires en función del tiempo (en hs) está dada por una función lineal. Se sabe que a las dos horas de haber partido de la ciudad de origen se encontraba en el km 150 y que media hora más tarde se encontraba a 100 km de Bs. As.

a) Encontrar la fórmula de la función lineal de la que habla el enunciado.

b) ¿Qué parámetro de la fórmula hallada en el ítem a) indica que el auto se acerca a Buenos Aires? ¿Por qué?

c) ¿A qué distancia de Bs. As. se encontraba el automóvil en el momento de partir? ¿A qué velocidad circula?

d) ¿En qué momento pasó por el km 225 de la ruta?

e) Graficar e indicar un dominio que dé cuenta de la situación.

9. Escribir la fórmula de una función cuadrática definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que verifique lo pedido en cada caso:

a) su vértice es el punto (-6; 0) y tiene concavidad positiva.

b) su vértice es el punto (–1; -3) y contiene al punto (1; –2).

c) sus raíces son 0 y -2 y tiene concavidad negativa.

d) sus raíces son 3 y -1 y contiene al punto (0; 1).

e) tiene un máximo en $x = -3$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

f) es creciente en $(-\infty; -3)$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

10. Se están haciendo pruebas desde un submarino lanzando misiles desde cierta profundidad y registrando su altura, medida en metros respecto del nivel del mar, en función del tiempo, medido en segundos.

Un misil fue lanzado desde una profundidad de 160m, atravesó la superficie a los 2 seg. de haber sido lanzado y explotó contra el blanco que flotaba en el mar 6 seg. después.

a) ¿Cuál es la variable independiente del problema? ¿Y la dependiente?

b) Definir la función que permite calcular su altura en función del tiempo sabiendo que se trata de una función cuadrática.

(**Nota**: Dar un dominio que sea coherente con la situación planteada.)

c) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó el proyectil? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿A qué altura se encontraba 1 seg. después de haber sido lanzado? ¿Y a los 3 seg.?

e) ¿En qué intervalo de tiempo estuvo por encima del nivel del mar? ¿Y por debajo?

11. Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 10 = 3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -3x(x+2) \\ y = 4(x-1)(x-3) \end{cases}$

12. Factorizar cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x$ b) $S(x) = \frac{1}{27}x^3 - 8$ c) $Q(x) = x^2 - 5$

d) $T(x) = (2x+1)^2 - 9$ e) $R(x) = 4x^4 - 12x^3 + 9.x^2$ f) $U(x) = 25x^4 - 16$

g) $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$ h) $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

i) $S(t) = -\frac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 + 2t$ j) $T(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

k) $M(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ l) $N(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

13. Indicar para que valores están definidas las siguientes expresiones y simplificarlas.

a) $\dfrac{x^4 - 16}{x^4 - 2x^2 - 8}$ b) $\dfrac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$ c) $\dfrac{2t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{t^2 + t}$

d) $\dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2}$ e) $\dfrac{-x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 6x}$ f) $\dfrac{3x^2 - 3x}{2x^3 - 2x^2}$

Respuestas

1. a) {1} b) {0; 1; -1} c) {1; -1; ½; -1/2}

d) {3; 2; -2; -1} e) {1/2; -1/2} f) $\left\{-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$

g) {2; 0; $\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1$} h) $\left\{\sqrt[4]{3}; -\sqrt[4]{3}\right\}$ i) $\left\{0; \dfrac{5+\sqrt{73}}{-6}; \dfrac{5-\sqrt{73}}{-6}\right\}$

j) {2; -2; 0; 1} k) {10/3; -3/2} l) {2; -2; 1} m) $\left\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$

2. a){-10; 10} b){3; -1/2} c){6; -1/6} d) {4} e){16; 1; 9; 4} f) ℝ - {-1; 1}

3. a) [-1/5; 3] b) (-1/2; 2/3) c) $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ d) ℝ e) ∅

f) $\left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right) \cup \{2\}$ g) (0; 1) h) [-3/2; 3/2] i) $(-\infty; 1/24)$

j) [-3; 1] k) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

4. a) ∅ b)(-10/3; 0) c) (-10/3; 0) d) (3; +∞) e) $\left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$

f) $\left[-\sqrt{5}; 0\right) \cup \left[\sqrt{5}; 4\right)$ g) $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ h) (-3; 2] ∪ (3; + ∞)

i) (-∞; 0) ∪ (1; + ∞) j) (-∞; 0) k) (-7/2; -2) l) (-1; -1/2)

6. a) y = - 0,5x b) y = 2x - 3 c) y = 2x + 6 d) y = -0,5x + 28/3

7. -1/5

8. a) y = -100 km/h x + 350 km c) 350 km; 100 km/h

d) A las 1,25 h (1 h 15 min.) de haber partido.

9. a) Puede ser : $(x+6)^2$ b) $y = 1/4\ (x + 1)^2 - 3$ c) Puede ser: y = -x (x + 2). d) y = -1/3 (x - 3) (x + 1)

e) y f) $y = -2/3\ (x + 3)^2 + 6$

10. b) f(t) = –10 (t – 2) (t – 8); Dom(f) = [0; 8] c) 90m a los 5seg. d) A 70m bajo el mar. e) (2; 8) y [0; 2)

11. a) {(2; 4); (-1; 1)} b) {(2; - 4)} c) ∅

12. a) x (x - 1) (x + 1) b) 1/27 (x - 6) $(x^2 + 6x + 36)$ c) (x - $\sqrt{5}$) (x + $\sqrt{5}$)

d) 4 (x -1) (x + 2) e) $4x^2 (x - 3/2)^2$ f) 25 (x - 2 $\sqrt{5}$ /5) (x + 2 $\sqrt{5}$ /5) $(x^2 + 4/5)$

g) 8 (x + 1/2) (x + 1) (x - 3/4) h) 4 (x + 1) (x -1/2) (x - 2)

i) –1/2 t (t + 2) (t - $\sqrt{2}$) (t + $\sqrt{2}$) j) $(x - 1)(x + 3)^2$ k) $(x - 2)^2 (x + 3)$ l) (x -1) (x + 2) $(x^2 + 9)$

13. a) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$; $\dfrac{x^2+4}{x^2+2}$; b) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 1 \wedge x \neq -1\}$; $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

c) $\{t \in \mathbb{R}\ /\ t \neq 0 \wedge t \neq -1\}$; $\dfrac{2\left(t^2+1\right)}{t}$ d) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\}$; $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

e) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -3\}$; $\dfrac{-(x+1)(x-2)}{x(x+3)}$ f) $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$; $\dfrac{3}{2x}$

Problemas interesantes (Segundo nivel Olimpíadas)

1. ¿Cuántas formas hay de embaldosar un pasillo de 2x7 con baldosas de 2x1?

2. Dos bicicletas se encuentran en una ruta recta a 40 kilómetros de distancia. A partir de un momento ambas empiezan a andar en sentidos contrarios, acercándose. Cada bicicleta tiene a una velocidad constante de 20km/h. En el mismo instante de partida, una mosca sale de una de las bicicletas rumbo hacia la otra con una velocidad de 40km/h. Al encontrarse la mosca con la otra bicicleta, instantáneamente se da vuelta y comienza a volar para el otro lado hasta encontrarse con la primera bicicleta, momento en el cual se da vuelta nuevamente, y así sigue hasta que las bicicletas se juntan. ¿Qué distancia recorre la mosca?

3. Sean ABC y ABD dos triángulos unidos por su lado AB (C y D están en semiplanos distintos respecto de la recta AB). El triángulo ABC tiene BAC=90º y AB=2AC. El triángulo ABD tiene ADB=90º y AD=BD. El segmento CD corta al segmento AB en O. Calcular BO si se sabe que AC=4.

4. Con una pesa de 2 y una de 5, en una balanza de platillos podemos pesar los valores 2, 3, 5 y 7. Si queremos poder pesar todos los valores enteros entre 1 y 4, ¿cuál es la mínima cantidad de pesas necesarias? ¿y si necesitamos pesar todos los números del 1 al 13? ¿Por qué con esa misma cantidad de pesas no se pueden formar todos los números del 1 al 14?

5. La suma de dos números es 30 y su producto es 10, ¿cuánto vale la suma de los inversos multiplicativos de los dos números?

6. Los sucesión de Fibonacci se definen de la siguiente manera:
   $F_0=1$

   $F_1=1$ y para $n\geq 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

   Probar que la cantidad de formas de embaldosar un pasillo de 2xN con baldosas de 2x1 es F_N.

7. Sea ABCD un trapecio con AB paralela a CD. DAB=100º, ABC=130º, AD=10 y AB=15.
   ¿Cuánto mide CD?

8. Alberto se encuentra en el centro de una circunferencia de radio 20. Berenice está afuera. En cada paso, Alberto se desplaza un metro en línea recta. Él puede elegir, antes de cada paso, la recta por la que se va a mover pero Berenice decide en cuál de los dos sentidos ha de moverse. ¿Puede Alberto salir de la circunferencia?

9. Demostrar que hay infinitos enteros positivos impares n para los cuales el número 2^n+n es un número compuesto (es decir, tiene algún divisor distinto de 1 y de sí mismo).

10. En el espacio hay n planos de modo que cada uno de ellos interfecta a exactamente otros 19. Determinar todos los posibles valores de n.

11. Sea ABC un triángulo y r la recta paralela a BC que pasa por A. Sea P el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ABC. Sea Q el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ACB. AB mide 7 y AC mide 8. Hallar la medida de PQ.