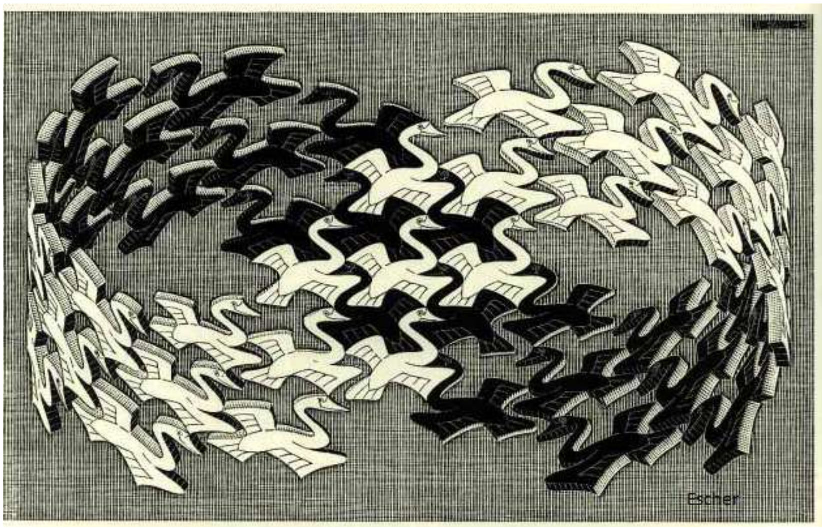
Colegio Nacional de Buenos Aires

# MATEMÁTICA DE 4to AÑO

## Guía de Trabajos Prácticos




2026

ÍNDICE

## PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA CUARTO AÑO. 2026

Unidad 1: ***Funciones exponenciales y logarítmicas***

- ◊ Función exponencial. Definición. Características. Representación gráfica.
- ◊ Logaritmo: definición. Propiedades. Cambio de base.
- ◊ Función logarítmica. Definición. Características Representación gráfica.
- ◊ Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Unidad 2:***Trigonometría***
***Primera parte***

- ◊ Sistemas de medición angular: sistema sexagesimal y radial.
- ◊ Definición de las funciones trigonométricas. Teorema del seno y del coseno. Aplicaciones.
- ◊ Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Signo de las funciones en los cuatro cuadrantes.
- ◊ Funciones de la suma y diferencia de dos ángulos. Funciones del ángulo duplo. Relaciones entre las funciones de los ángulos complementarios, suplementarios, que difieren en $\pi$ y opuestos. Identidades.

***Segunda parte***

- ◊ Ecuaciones trigonométricas.
- ◊ Representaciones gráficas de seno, coseno y tangente. Función armónica generalizada.

Unidad 3: ***Vectores en el plano y en el espacio***

- ◊ Concepto de vector. Versores fundamentales. Expresión canónica y cartesiana de un vector.
- ◊ Adición de vectores. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades.
- ◊ Ángulo entre dos vectores. Producto escalar de dos vectores: definición y propiedades Norma de un vector.
- ◊ Producto vectorial entre dos vectores: definición y propiedades. Cálculo.
- ◊ Paralelismo y perpendicularidad de vectores.

Unidad 4: ***Geometría lineal en $\mathbb{R}^3$. Sistemas de ecuaciones lineales.***
***Primera parte***

- ◊ Ecuación vectorial de una recta en$\mathbb{R}^3$. Intersección entre dos rectas. Rectas paralelas. Rectas alabeadas.
- ◊ Ecuación general de un plano. Obtención de la ecuación de un plano conocidos un punto y un vector normal; dados tres puntos no alineados; determinado por una recta y un punto exterior; determinado por dos rectas paralelas no coincidentes; determinado por dos rectas que se cortan.

***Segunda parte***

- ◊ Planos proyectantes de una recta.
- ◊ Intersecciones: recta –plano y plano-plano.
- ◊ Distancias: punto-punto; punto-recta; punto plano; recta - recta; recta – plano.
- ◊ Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad 5: ***Números complejos***

- ◊ Número complejo: definición. Parte real e imaginaria de un número complejo. Unidad imaginaria. Adición y multiplicación en $\mathbb{C}$. Forma cartesiana y binómica. Complejos conjugados. Propiedades. División de números complejos. Potencias de i.
- ◊ Argumento y módulo de un complejo. Propiedades del módulo. Forma trigonométrica y polar de un complejo. Multiplicación y división de complejos en forma polar y/o trigonométrica. Representación gráfica de números complejos.
- ◊ Potenciación de números complejos. Fórmula de De Moivre.

# - Colegio Nacional de Buenos Aires-
# Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

## TRABAJO PRÁCTICO 0

## REPASO

1. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $(-x+2)^3 = 1$ b) $x^3 = x$ c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

d) $(x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12 = 0$ e) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$ f) $x^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{18})x = -6$

g) $(x-1)^4 - 3(x-1)^2 = -2$ h) $(m^2-1)(m^2+3) = 2m^2$ i) $4a^2(1-a-a^2) = -a^4 + a^3$

j) $3(x^4-16)(x^3-2x^2+x) = 0$ k) $\frac{7}{5}\left(1-\frac{3}{10}y\right)\left(\frac{7}{3}+\frac{14}{9}y\right) = 0$

l) $(x^3-8)(x^3+8)(6x^2+7x+8)(1-x) = 0$ m) $9p^9 - 7p^7 = 6p^9 + 2p^7$

2. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ b) $\frac{x+11}{x} = 7 - \frac{9+4x}{x^2}$ c) $4x - \frac{2}{x} = 2x + \frac{35}{3}$

d) $x + \frac{1}{x-3} = 5$ e) $\left(x-5\sqrt{x}\right)^2 + \left(x-5\sqrt{x}\right) + 24 = 0$ f) $\frac{t+1}{t^2-1} = \frac{1}{t-1}$

3. Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones:

a) $\left(x+\frac{1}{5}\right)(-3x+9) \geq 0$ b) $(2x+1)(3x-2) < 0$ c) $3x^2 + 15x \geq 0$

d) $(x+10)^2 \geq -4$ e) $x^4 \leq -5$ f) $|x-2| \cdot (x^2-5) \geq 0$

g) $x^2 - x < 0$ h) $x^2 - \frac{1}{2} \leq 4 - x^2$ i) $(2x-3)^2 > 4(x+1)(x+2)$

j) $x^2 + 2x + 1 \leq 4$ k) $x^3 > x$

4. Encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de estas inecuaciones:

a) $\frac{25x^2-9}{3+\sqrt{x^2-5}} < 0$ b) $\frac{2}{x} < -\frac{3}{5}$ c) $-\frac{2}{x} > \frac{3}{5}$ d) $\frac{27-x^3}{|x+3|} < 0$

e) $\frac{|x-2|}{x^2-5} \leq 0$ f) $\frac{x^2-5}{|x-2|-2} \leq 0$ g) $\frac{x^2-5}{|x-2|+2} \leq 0$ h) $\frac{2x-4}{x^2-9} \geq 0$

i) $\frac{2}{x} - 3 < -1$ j) $\frac{1}{x} \geq \frac{6}{x}$ k) $\frac{3}{x+2} < -2$ l) $\frac{3x+2}{x+1} < 1$

5. Dadas las siguientes funciones definidas de su dominio $D$ en $\mathbb{R}$:

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ii) $f(x) = x^2 + 5x - 2$ iii) $f(x) = |x-3|$

iv) $f(x) = |x^2 - x|$ v) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ vi) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) Hallar dominio e imagen.

b) Clasificarlas de $D$ en $\mathbb{R}$ y hallar conjuntos mayorantes en los que sean biyectivas.

c) En dichos conjuntos, hallar la función inversa.

Conjunto mayorante: Máximo en sentido de inclusión.

6. Dada la recta $\boldsymbol{r}: y = -\frac{1}{2}x + 1$, obtener la ecuación de la recta $\boldsymbol{s}$ que cumple con la condición establecida en cada ítem:

a**)** **s** // **r** y contiene al origen de coordenadas; b) **s** $\perp$ **r** y tiene ordenada al origen -3;

c) **s** $\perp$ **r** e interseca al eje de abscisas en -3; d) **s** // **r** y contiene al punto (2/3; 9).

7. ¿Para qué valor de $m$, las rectas $\boldsymbol{r}: (5m-1)x - y + 2 = 0$ y $\boldsymbol{s}: 3x - 6y + 9 = 0$ son perpendiculares?

8. Un auto circula por la ruta 2 y la distancia (en km) que lo separa de Buenos Aires en función del tiempo (en hs) está dada por una función lineal. Se sabe que a las dos horas de haber partido de la ciudad de origen se encontraba en el km 150 y que media hora más tarde se encontraba a 100 km de Bs. As.

a) Encontrar la fórmula de la función lineal de la que habla el enunciado.

b) ¿Qué parámetro de la fórmula hallada en el ítem a) indica que el auto se acerca a Buenos Aires? ¿Por qué?

c) ¿A qué distancia de Bs. As. se encontraba el automóvil en el momento de partir? ¿A qué velocidad circula?

d) ¿En qué momento pasó por el km 225 de la ruta?

e) Graficar e indicar un dominio que dé cuenta de la situación.

9.Escribir la fórmula de una función cuadrática definida de ~ en ~ que verifique lo pedido en cada caso:

a) su vértice es el punto (-6; 0) y tiene concavidad positiva.

b) su vértice es el punto (–1; -3) y contiene al punto (1; –2).

c) sus raíces son 0 y -2 y tiene concavidad negativa.

d) sus raíces son 3 y -1 y contiene al punto (0; 1).

e) tiene un máximo en $x = -3$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

f) es creciente en $(-\infty; -3)$, $f(-3) = 6$ y $f(0) = 0$.

10. Se están haciendo pruebas desde un submarino lanzando misiles desde cierta profundidad y registrando su altura, medida en metros respecto del nivel del mar, en función del tiempo, medido en segundos.
Un misil fue lanzado desde una profundidad de 160 m, atravesó la superficie a los 2 seg. de haber sido lanzado y explotó contra el blanco que flotaba en el mar 6 seg. después.
    a) ¿Cuál es la variable independiente del problema? ¿Y la dependiente?
    b) Definir la función que permite calcular su altura en función del tiempo sabiendo que se trata de una función cuadrática. (**Nota**: Dar un dominio que sea coherente con la situación planteada.)
    c) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó el proyectil? ¿En qué momento sucedió?
    d) ¿A qué altura se encontraba 1 seg. después de haber sido lanzado? ¿Y a los 3 seg.?
    e) ¿En qué intervalo de tiempo estuvo por encima del nivel del mar? ¿Y por debajo?

11. Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 10 = 3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -3x(x+2) \\ y = 4(x-1)(x-3) \end{cases}$

**12.** Factorizar cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x$ b) $S(x) = \frac{1}{27}x^3 - 8$ c) $Q(x) = x^2 - 5$

d) $T(x) = (2x+1)^2 - 9$ e) $R(x) = x^4 - 12x^3 + 9x^2$ f) $U(x) = 25x^4 - 16$

g) $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$ h) $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$ i) $S(x) = -\frac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 + 2t$

j) $T(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ k) $M(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ l) $N(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

13. Indicar para que valores están definidas las siguientes expresiones y simplificarlas.

a) $\frac{x^4-16}{x^4-2x^2-8}$ b) $\frac{x^6-1}{x^2-1}$ c) $\frac{2t^3+2t^2+2t+2}{t^2+t}$

d) $\frac{x^4-2x^3-x^2+2x}{x^3-2x^2}$ e) $\frac{-x^3+3x^2-4}{x^3+x^2-6x}$ f) $\frac{3x^3-3x}{2x^3-2x^2}$

**Respuestas**

**1.** a) {1} b) {0; 1; -1} c) {1; -1; ½; -1/2} d) {3; 2; -2; -1} e) {1/2; -1/2} f) $\{-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

g) $\{2; 0; \sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1\}$ h) $\{\sqrt[4]{3}; -\sqrt[4]{3}\}$ i) $\left\{0; \frac{5+\sqrt{73}}{-6}; \frac{5-\sqrt{73}}{-6}\right\}$ j) {2; -2; 0; 1} k) {10/3; -3/2}

l) {2; -2; 1} m) $\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ $\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

**2.** a) {-10; 10} b) {3; -1/2} c) {6; -1/6} d) {4} e) {16; 1; 9; 4} f) **R** - {-1; 1}

**3.** a) [-1/5; 3] b) (-1/2; 2/3) c) $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ d) **R** e) $\varnothing$

f) $(-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty) \cup \{2\}$ g) (0; 1) h) [-3/2; 3/2] i) $(-\infty; 1/24)$ j) [-3; 1]

k) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

**4.** a) $\varnothing$ b) (-10/3; 0) c) (-10/3; 0) d) (3; +$\infty$) e) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ f) $[-\sqrt{5}; 0) \cup [\sqrt{5}; 4)$

g) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ h) (-3; 2] $\cup$ (3; + $\infty$) i) (- $\infty$; 0) $\cup$ (1; + $\infty$) j) (- $\infty$; 0) k) (-7/2; -2) l) (-1; -1/2)

**6.** a) y = - 0,5x b) y = 2x - 3 c) y = 2x + 6 d) y = -0,5x + 28/3

**7.** -1/5

**8.** a) y = -100 km/h x + 350 km c) 350 km; 100 km/h d) A las 1,25 h (1 h 15 min.) de haber partido.

**9.** a) Una respuesta posible es y = $(x+6)^2$ b) y = 1/4 $(x + 1)^2$ - 3 c) Una respuesta posible es y = - x (x + 2). d) y = -1/3 (x - 3) ( x + 1) e) y f) y = -2/3 $(x + 3)^2$ + 6

**10.** b) f(t) = –10 (t – 2) (t – 8); Dom(f) = [0; 8] c) 90m a los 5seg. d) A 70m bajo el mar. e) (2; 8) y [0; 2)

**11.** a) {(2; 4); (-1; 1)} b) {(2; - 4)} c) Ø

**12.** a) x (x - 1) (x + 1) b) 1/27 (x - 6) $(x^2 + 6x + 36)$ c) (x - $\sqrt{5}$) (x + $\sqrt{5}$)

d) 4 (x -1) (x + 2) e) 4 $x^2$ $(x - 3/2)^2$ f) 25 (x - 2$\sqrt{5}$/5) (x + 2$\sqrt{5}$/5) $(x^2 + 4/5)$ g) 8 (x + 1/2) (x + 1) (x - 3/4) h) 4 (x + 1) (x -1/2) (x - 2)

i) –1/2 t (t + 2) (t - $\sqrt{2}$) (t + $\sqrt{2}$) j) (x - 1) $(x + 3)^2$ k) $(x - 2)^2$ (x + 3)

l) (x -1) (x + 2) $(x^2 + 9)$

**13.** a) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \wedge x \neq 2\}$; $\frac{x^2+4}{x^2+2}$; b) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \wedge x \neq 1\}$; $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

c) $\{x \in \mathbb{R} / t \neq -1 \wedge t \neq 0\}$; $\frac{2(x^2+1)}{t}$ d) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \wedge x \neq 2\}$ {x∈ **R** / x ≠ 0 ∧ x ≠ 2}; $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$

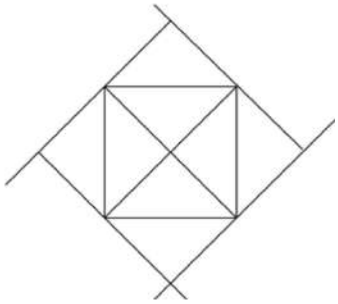
## TRABAJO PRÁCTICO 1

# Funciones Exponenciales y logarítmicas

**Los siguientes problemas son un extracto de los "Aportes para la enseñanza. Nivel Medio". Ministerio de Educación. CABA 2007.**

**PROBLEMA 1: LOS CUADRADOS SOMBREADOS**

Observen la siguiente figura:



"A partir de un cuadrado realizaremos una nueva construcción: se trazan las diagonales y por cada vértice se dibuja una paralela a la diagonal. A esta construcción que da origen a otra figura la denominaremos el paso."

a) Comparen el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.

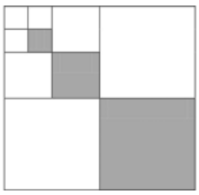
b) Si se repite el paso varias veces ¿podrían indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo respecto del cuadrado original?

c) Si llamamos A al área del cuadrado original, determinen qué área tendrá el cuadrado generado en el paso 17.

d) ¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado obtenido en el paso n? (también en este caso el cuadrado original tiene área A).

**PROBLEMA 2: LOS CUADRADOS SOMBREADOS**

Observen la siguiente figura:



A un cuadrado -el más grande, que llamaremos inicial - cuya área es 1, se le trazaron las medianas y se sombreó el cuadrado inferior derecho. En este caso se llama paso al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. Al cuadrado que queda determinado en la parte superior izquierda se le trazan sus medianas y se sombrea el cuadradito que queda en la parte inferior derecha. Y así se continúa.

a) ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el primer paso, en el segundo y en el cuarto?

b) ¿Habrá algún paso en el que se obtenga un cuadrado de área 1/60?

c) Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es 1/16384 ¿cuál será el área sombreada en el cuadrado que se obtenga en el siguiente paso? ¿ y en el anterior?

d) ¿Habrá una expresión general que me permita saber el área de los sucesivos cuadraditos sombreados según la cantidad de pasos que se hicieron?

e) ¿Podrían contestar la pregunta anterior si el área del cuadrado original fuera A en lugar de 1?

# - Colegio Nacional de Buenos Aires-
# Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

**1.** Se parte de una muestra de dos kilogramos de una sustancia que se reduce un 75% cada año.

a) ¿Cuánto tiempo habrá pasado para que quede una masa de $\frac{1}{32}\ kg$?

b) Definir y graficar una función que modelice el problema.

c) La masa, ¿puede desaparecer? Justificar la respuesta.

**2.** Sean $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 3^x$ | $f_4(x) = 3^{x-1}$ | $f_7(x) = -3^x$ |
| $f_2(x) = 2.3^x$ | $f_5(x) = 3^x + 1$ | $f_8(x) = -2.3^x$ |
| $f_3(x) = 3^{2x}$ | $f_6(x) = 3^{-2x}$ | $f_9(x) = -3^x + 1$ |

Para cada una de las funciones:

a) Obtener la ecuación de la asíntota horizontal y la intersección con el eje y.

b) Indicar intervalos de crecimiento o decrecimiento.

c) Representar gráficamente.

**3.** Hallar los números reales a y b tal que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2^{x+a} + b$ tenga asíntota horizontal en $y = 1$ y $f(2) = 3$

**4.** Hallar, si existe, el conjunto de ceros, la intersección con el eje de ordenadas, la ecuación de la asíntota y graficar aproximadamente las funciones exponenciales cuyas fórmulas están dadas por:

**a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

**b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = -2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + \frac{3}{2}$

**c)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x + \frac{1}{2}$

**5.** Hallar, si existe, la fórmula de una función exponencial $f$ creciente de la forma $f(x) = k \cdot a^x + b$ , con asíntota horizontal en $y = -3$ y tal que $f(0) = -2$. ¿Es única?

**6.** Dada la función exponencial dada por la fórmula $f(x) = a \cdot b^x + c$ *, se saben los siguientes datos:*

$C_0 = \{1\}; y = -\frac{3}{2}$ es asíntota horizontal; $P_0 = (2; 3)$ *pertenece al gráfico de "f".* Hallar los valores de los números reales "a, b y c".

**7.** Resolver las siguientes ecuaciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $7^{-x+4} = 1$ | b) $3^{-x+2} = 9$ | c) $25^{x-2} = 5^{-x}$ | d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = 4$ |
| e) $3^{\frac{x}{2}} = 27$ | f) $\sqrt[x]{2^{x+5}} = 4$ | g) $2^{x+1} + 4^x = 80$ | h) $17 \cdot 6^x - 12 \cdot 6^{-x} = 5$ |

**8.** Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cdot 3^x = 9 \cdot 27^{\frac{2}{x}}$ b) $\sqrt{4^{x-1}} = \sqrt[3]{8^{2x}}$ c) $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = 2^x$ d) $4^{2x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$

e) $(0{,}5)^{x+3} = 8\sqrt{2}$ f) $4 \cdot 3^{2x+1} + 17 \cdot 3^x - 7 = 0$ g) $8^x - 8^{-x} - \frac{3}{2} = 0$

**9.** A partir del gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ obtener los gráficos de:

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_1(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 3$ $\qquad$ $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_2(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$

$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_3(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ $\qquad$ $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_4(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} - 3$

$f_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_5(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|}$

En cada caso escribir el conjunto imagen, la ecuación de la asíntota horizontal, intersección con el eje “y” y el conjunto de ceros.

**10.** Calcular, utilizando la definición de logaritmo

a) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ $\qquad$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ $\qquad$ c) $\log_{\sqrt{3}} 81$ $\qquad$ d) $\log_a a$ ( con a>0, a ≠ 1)

e) $\ln(e^5)$ $\qquad$ f) $\ln^5 e$ $\qquad$ g) $\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $\qquad$ h) $\log_4\left(\frac{3}{5}\right) - \log_4\left(\frac{12}{5}\right)$

**11.** Definir funciones logarítmicas de la forma $f_i: A_i \to \mathbb{R} / f_i(x) = \log_a(x - b)$ que verifiquen las condiciones dadas y obtener el gráfico aproximado de cada una de ellas:

a) Tenga asíntota vertical en $x = -2$ y pasa por el punto $(2; 2)$.

a) El dominio es $(4; +\infty)$ y pasa por el punto $(6; -1)$.

b) $f^{-1}(0) = 6$ y $Im(f^{-1}) = (5; +\infty)$.

**12.** Graficar cada una de las siguientes funciones $f_i: A_i \to \mathbb{R}$, indicando: dominio, ecuación de la asíntota vertical, intersección con el eje y, ceros, conjunto de positividad y negatividad, crecimiento y /o decrecimiento.

a) $f_1(x) = \log_2 x$ $\qquad$ b) $f_2(x) = -\log_{\frac{1}{4}} x$ $\qquad$ c) $f_3(x) = 1 - \log_{\frac{1}{4}} x$ $\qquad$ d) $f_4(x) = 2 \cdot \log_2 x$

e) $f_5(x) = \ln(2x - 6)$ f) $f_6(x) = \log(2x + 3) + \log(4 - x) - 2$ $\qquad$ g) $f_7(x) = \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right|$ $\qquad$ h) $f_8(x) = \log_5|x + 5|$

**13.** Una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto es medir la actividad (A) de carbono 14 presente en el mismo. Esta actividad viene dada por: $A = 15{,}3 \cdot (0{,}866)^t$ donde $t$ es la antigüedad en miles de años y $A$ se mide en desintegraciones por minuto por gramo (dpm/g) de carbono 14.

Calcular la antigüedad aproximada de un objeto en el que $A = 7{,}65\ dpm/g$

**14.** La fórmula de Ehremberg $\ln P = \ln 2{,}4 + 1{,}84 \cdot A$ es una fórmula empírica que relaciona la altura $A$ (en metros) con el peso P ( en kg fuerza) para niños entre 5 y 13 años. Se pide:

a) Calcular el peso aproximado de un niño de 1,20m de altura.

b) Calcular la altura aproximada de un niño que pesa 40 kg.

**15.** Encontrar, si es posible, $x \in \mathbb{R} / \log_3\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right) = 1$.

**16.** Calcular:

a) $\log_{\sqrt{2}}(2^{-30})$ $\qquad$ b) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5^{-3}}$ $\qquad$ c) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}$ $\qquad$ d) $\log_{\sqrt{3}} 1$

**17.** Qué relación tiene que existir entre **a** y **b** para que se verifique que:

$$\log a + \log b = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})(a, b \in \mathbb{R})$$

**18.**

a) Calcular ***a*** sabiendo que $n = 2$ y $(64\,n) = 5$

b) Sabiendo que $a = 0{,}32$ y $b = 0{,}43$, calcular:

i. $(a \cdot b)$

ii. $(a^3)$

iii. $\left(\frac{a}{b^2}\right)$

iv. $a$

v. $x$

**19.** La intensidad "I" de un terremoto medida en la escala Richter está vinculada con la energía liberada (en Kwh) en el mismo mediante la fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \cdot log \frac{E}{E_0} \qquad Donde\ E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kwh.$$

Calcular:

a) La energía liberada en un terremoto de intensidad 8 en esta escala.

b) En cuánto aumenta la energía liberada si se aumenta en una unidad la intensidad del terremoto.

**20.** Resolver en $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt[3]{\log x} + \log x = 10$ (Pista: sustituir $\sqrt[3]{\log x}$ )

b) $\log(x^2) = (\log x)^2$

c) $\log_2(x^{-1}) + (\log_2 x)^{-1} = -\frac{3}{2}$

d) $\log_2(9-2^x) = 3-x$

e) $\ln(2x^2 + x + e) = 1$

f) $\left[\ln(2e) + \ln\left(\frac{1}{2}e\right)\right].\ln x = 12$

**21.** En cada caso, encontrar $k$, $a$ y $c$ para las funciones definidas por $f(x) = k \cdot a^x + c$:

a. Los puntos $P = (1; -5)$ y $Q = (2; -17)$ pertenecen a $f(x)$ y tiene AH en $y = 1$

b. Sabemos que $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ; $f^{-1}\left(-\frac{13}{5}\right) = 1$ y la ordenada al origen de $f(x)$ es el punto (0;-2)

c. El conjunto imagen de $f(x)$ es $(-\infty; 4)$; el $C^0 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ y $f^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) = 0$

**22.** Un grupo de científicos estudió la cantidad de árboles jóvenes existentes en un bosque, ya que notaron que la misma decrecía con el tiempo debido a la existencia en la zona de residuos industriales. Llegaron a la conclusión que, la ecuación que mide la cantidad *"q"* de árboles jóvenes a medida que transcurre el tiempo *"t"* medido en años es:

$$q = 200.e^{-0{,}025.t}$$

Si la investigación se realizó a comienzos de 2015 (*t=0*). Se pide:

a) Calcular aproximadamente la cantidad de árboles jóvenes presentes en ese instante.

b) Calcular cuántos árboles se espera que haya a comienzos del año 2030.

c) Estimar para qué año se espera que cantidad de árboles jóvenes se haya reducido a la mitad.

**23.** Encontrar el error del siguiente razonamiento:

$$(-1)^4 = 1^4 \Rightarrow \log_a(-1)^4 = \log_a 1^4 \Rightarrow 4\log_a(-1) = 4.\log_a 1$$ (por propiedad de logaritmo de una potencia)

Aplicando logaritmo a ambos miembros

$$\log_a(-1) = \log_a 1 \Rightarrow -1 = 1$$ , por ser log una función inyectiva

**24.** Resolver en $\mathbb{R}$:

a) $\log_3(x^2 - 12x + 20) = 2$

b) $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$

c) $\log_{35} x + \log_{35}(12 - x) = 1$

d) $x^{\log x} = 100x$

e) $\log_2\left[\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)\right] = 4$

f) $10^x . 100^{1/x} = 1000$

g. $\log_4 x + \log_2 x = 1$

**25.** Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k + \log_a(x + b)$.

a) Encontrar $a, k\ y\ b \in \mathbb{R}$, sabiendo que los puntos $(0; -3), (1; -4)$ y $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ pertenecen al gráfico de $f$.

b) Para los valores obtenidos, analizar la existencia de la función inversa y, si es posible, obtenerla. Si existen, encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

c) Graficar ambas funciones en forma aproximada e indique ecuaciones de las asíntotas.

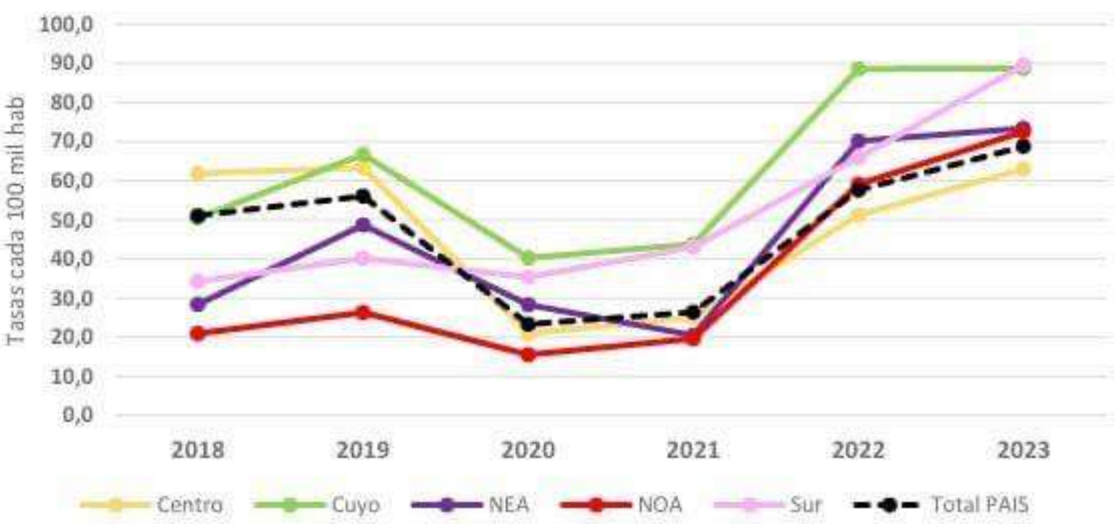
**26.** Para el siguiente grupo de funciones se pide:

$f(x) = 3^x - 1$ $\quad g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{x+1} - 3$ $\quad h(x) = (3x + 2)$ $\quad j(x) = ln\ ln\ (x + 1) - 1$

a) Asíntotas, intersecciones con los ejes y conjuntos dominio e imagen.
b) Expresión de la inversa.
c) Representación de ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

**27.** La siguiente información fue tomada del diario Los Andes del 3 de septiembre del 2024:
Los **casos de sífilis** en la Argentina registraron un pico histórico, según informó el Ministerio de Salud, tras observar una tendencia creciente de la misma y convirtiéndose así en la **infección de transmisión sexual (ITS)** que más cantidad de casos en aumento reporta. De esta manera, **con 32.293 casos en 2023**, el organismo registró la mayor cantidad de contagios de las últimas tres décadas y advirtió que **"continúa siendo un importante y creciente problema de salud pública".**
Respecto a los grupos etarios más afectados, se detectaron **mayor cantidad de contagios en las edades de 20 a 24 años**, seguido por los 25 a 29 años y 30 a 35 años, con una tasa de incidencia de 219, 185 y 126 casos cada 100 mil habitantes respectivamente. En cuanto al sexo, **se aprecia un predominio femenino (55,4%)**, especialmente entre los 15 y 39 años, siendo que a partir de los 50 la mayor cantidad de contagios corresponde al sexo masculino.

**Gráfico 2: Evolución de las tasas de sífilis en población general por región en ambos sexos. ARGENTINA. Periodo 2018 - 2023. (n= 129.620)**




La función que modeliza de forma aproximada la evolución de la tasa de sífilis en el total de nuestro país a partir del 2020 es: $S(x) = \frac{1}{10} \cdot e^{0,5x+0,6}$.

a) ¿Cuál podría ser la tasa aproximada de sífilis en el 2025 según estos registros?
b) Investiga formas de prevención y tratamiento de la infección.

**Respuestas**

1. a) 3; c) No.
2.

| A.H | Ordenada |
|---|---|
| y=0 | y=1 |
| y=0 | y=2 |
| y=0 | y=1 |
| y=0 | y=1/3 |
| y=1 | y=2 |
| y=0 | y=1 |
| y=0 | y=-1 |
| y=0 | y=-1 |
| y=1 | y=0 |

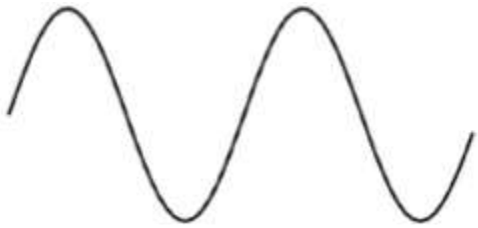
3. a= -1 y b= 1
5. k=1; $a \in \mathbb{R}^+_{\neq 1} a \in \mathbb{R}^+_{\neq 1}$, b=-3.
6. A=1/2; B=3 y C=-3/2
7. a) x=4; b) x=0; c) x=4/3; d) x=-7; e) x=6; f) x=5; g) x=3; h)x=0.
8. a)x= 0,5; b)x=-1 ; c)x=0,75; d)x=-1; e)x= -6,5; f)x=-1; g) x= 1/3
9.
10. a) -2; b) -1/2; c=8; d=1; e=5; f) 1; g)0; h)-1
11. a) $f_1$: $(-2,+\infty) \to \sim / f_1(x) = \log_2(x+2)$ , b) $f_2$: $(4,+\infty) \to \sim / f_2(x) = \log_{1/2}(x-4)$
    c) $a \epsilon R^+_{\neq 1};\ b = 5$
13. 4.818 años.
14. a) 21,8kg; b) 1,52m.
15. x= 6/5
16. a) –60; b) 3/2; c) –6; d)0.
17. a.b= 1
18. a=4; n=16.
19. $7.10^{-9}$
20. a)S= $\{10^8\}$ ;b) S={1,100} ; c) S= $\left\{4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ d)S={0,3} ; e)S={0,-1/2}; f)S={$e^6$}
21. a) k = -2, a= 3 y c=1 b) k=1; a= 2/5 y c= -3 c) k= -1/2; a= 4 y c= 4
22. a) 200; b) aproximadamente 137; c) aproximadamente 28 años.
23.
24. a) S ={1,11}; b) S={100, 1/10}; c)S={7,5}; d) S={100, 1/10}; e) S= {$2^{128}$} ; f) S={1,2} g) $2^{2/3}$;
25. a) a= ½; b=1; k=-3.

# - Colegio Nacional de Buenos Aires-
# Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

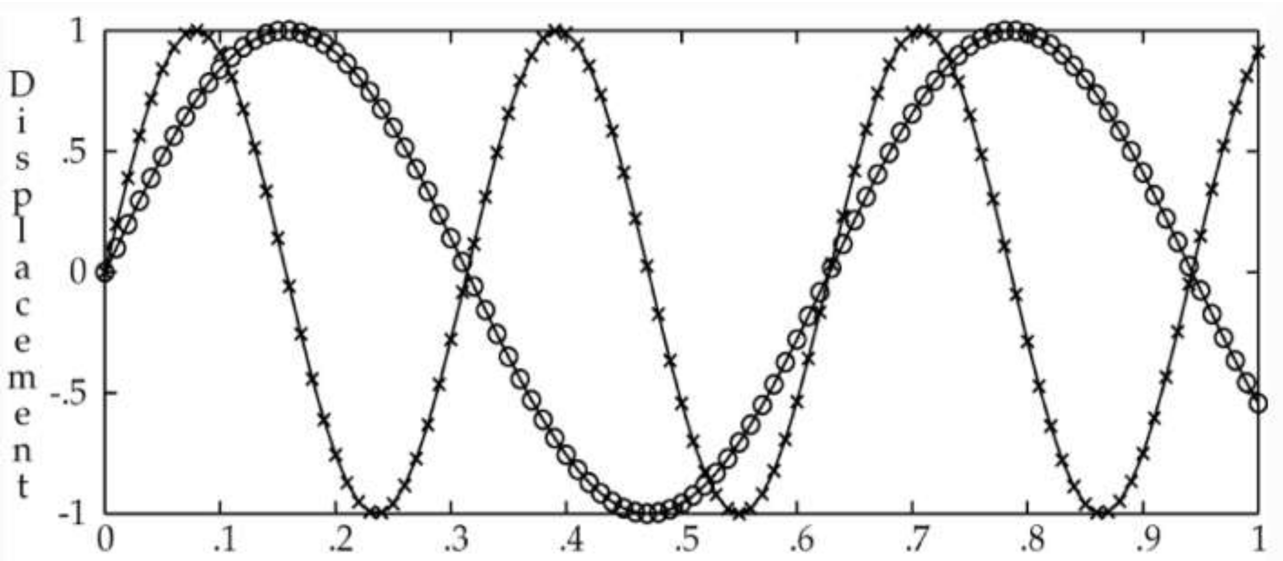
### Trabajo Práctico 2

## Funciones Trigonométricas

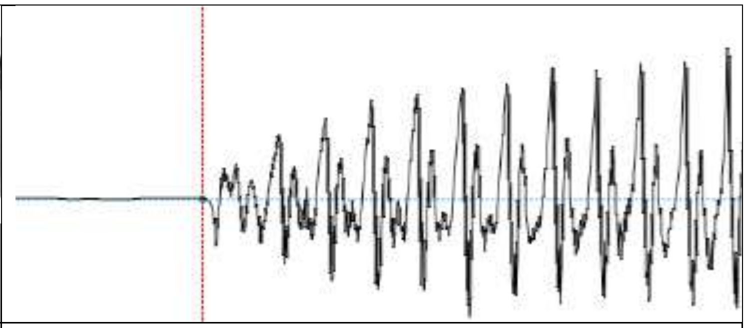
Si bien las cuerdas vocales no son cuerdas, su vibración puede entenderse como una cuerda fija sostenida por los extremos (tal como las cuerdas de una guitarra) y la vibración de esta se representa por una onda sinusoidal:



En 2023, el Prof. Harry Howard de Tulane University dictó un curso de fonética y fonología españolas donde explica que "un fenómeno periódico como la vibración de una cuerda o la subida y bajada de la presión del aire se mide por el número de veces que ocurre por unidad de tiempo, conocido como su frecuencia. En el Sistema Internacional de Unidades, la medida es el hercio (Hz), que indica veces por segundo."
En la siguiente figura, el profesor compara dos frecuencias de voces distintas:




Cuando grabamos un sonido en la pantalla vemos la *forma de onda* pero no siempre es fácil describir el ciclo de la misma. En algunos casos, alcanza con amplificar la imagen (como se muestra en la siguiente imagen) pero no siempre esto es posible.

| | |
|---|---|
|   |  |
| Forma de onda sin amplificar | Forma de onda amplificada |

Por su parte, Ailyn Echavarria y Sara Palacio de la Universidad de Antioquia comparan la variación de frecuencia de las voces de hombre y mujeres:

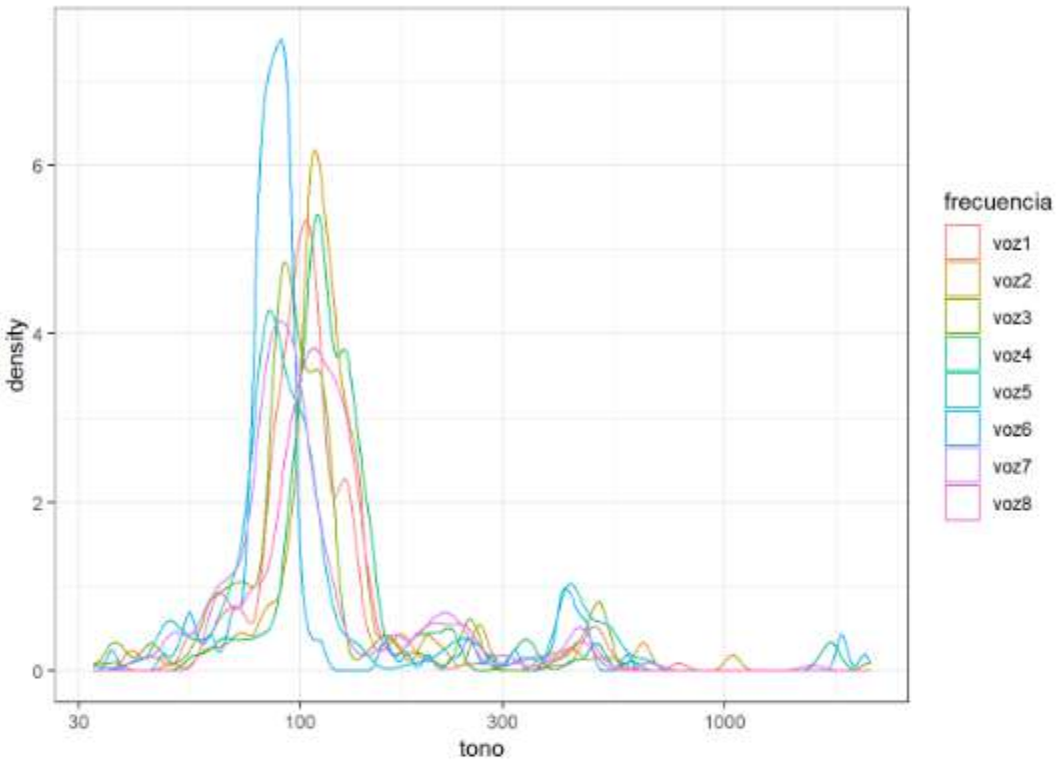



Figure 1: Distribucion tono hombre

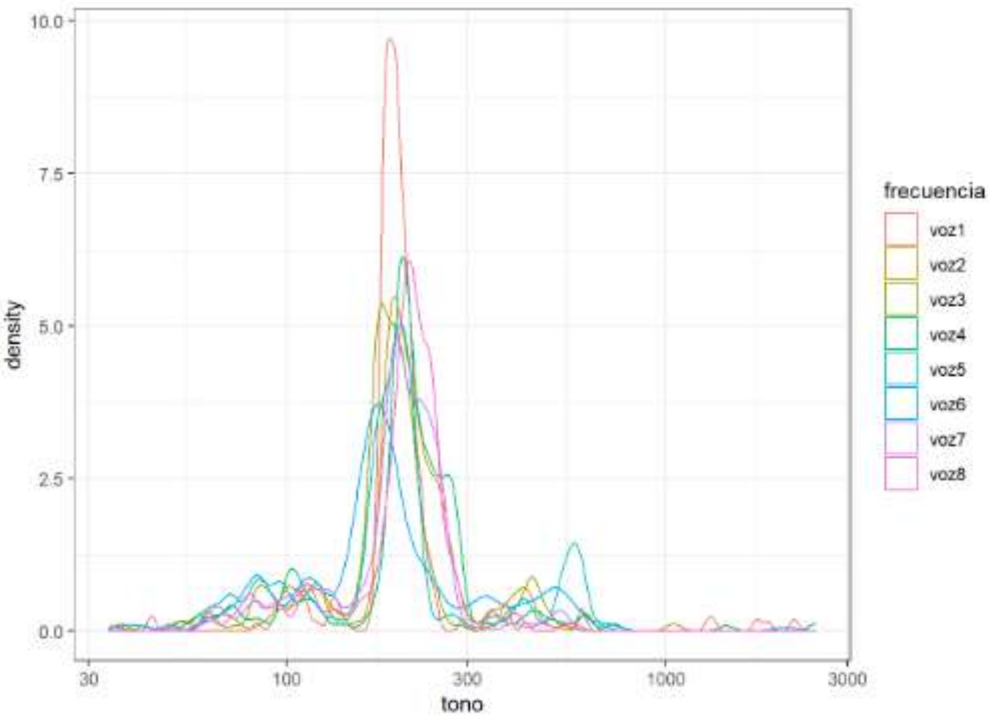



Figure 2: Distribucion tono mujer

Esta comparación les permite arribar a dos conclusiones fundamentales:

- El tono de los hombres y de las mujeres presentan una significativa diferencia, esto lo podemos observar a través del coeficiente de variación y los gráficos comparativos, también podemos recalcar que los promedios obtenidos se encuentran dentro de los rangos establecidos de frecuencia para hombre y mujeres adultos.
- Las personas tienden a asociar al tono de voz con un tipo de persona.

Al respecto de esta última conclusión, les proponemos leer el artículo de Sara Carreno en su blog *Club del lenguaje no verbal* donde presenta un análisis de cómo las personas modulamos nuestra voz en entornos profesionales y cómo esto afecta a las evaluaciones de los oyentes sobre la competencia y autoridad de los oradores. En particular, hace un interesante análisis de las voces femeninas y masculinas en estos contextos.

Para terminar, les proponemos reflexionar sobre el artículo de Andy Falconaro "La voz con perspectiva de género" donde la autora nos propone repensar las clasificaciones vocales que actualmente se dividen categóricamente en femeninas o masculinas sin atenden a diversidades que actualmente existen producto de construcciones sociales que tienen injerencias en los tonos vocales, por ejemplo, por el consumo de hormonas.

Si te interesa leer un poco más de información sobre lo que acá resumimos, te compartimos los links de acceso a la información de origen:
- https://www2.tulane.edu/~h0Ward/FonFonEsp/visualizacion.html
- https://rpubs.com/Aylincristina2007/978518

## Problemas

**1)** Completar las tablas estableciendo las equivalencias entre el sistema sexagesimal y el circular

**a)**

| **sexagesimal** | 360° | 330° | 300° | 270° | | | | 150° | | 120° | 90° | 60° | | 30° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **circular** | $2\pi$ | | | | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | | | $\frac{\pi}{4}$ | |

**b)**

| **sexagesimal** | 1° | 300°30´ | -1250° | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **circular** | | | | 3 | $\frac{\pi}{12}$ |

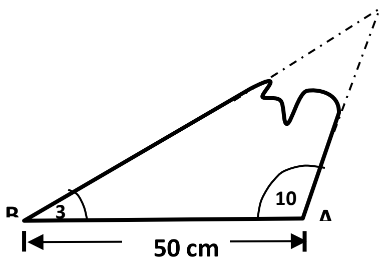
**2)** Mediante el uso de las identidades trigonométricas fundamentales, calcular el valor de todas las funciones trigonométricas restantes, en cada uno de los siguientes casos:

**a)** $sen\alpha = -\frac{12}{13} \quad si\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ **b)** $tg\alpha = 2 \quad si\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

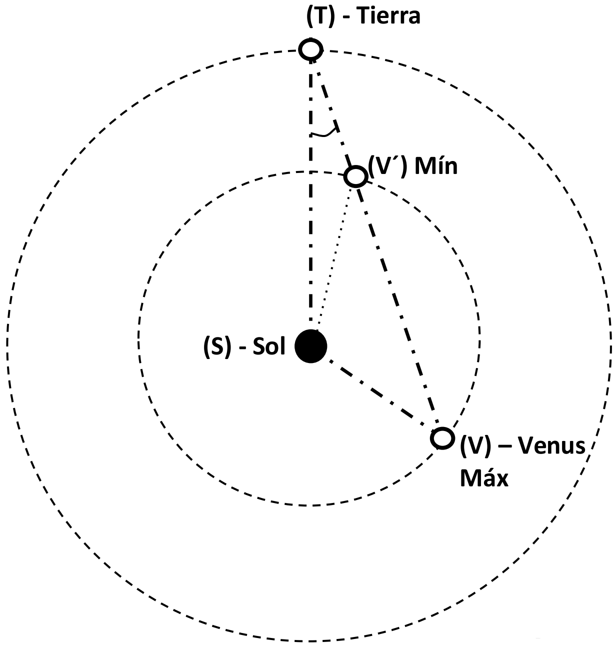
**c)** $\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ si $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

**3)** Demostrar que $tg\alpha = a \quad \Rightarrow \quad |sen\alpha . \cos\alpha| = \frac{|a|}{a^2+1}$.

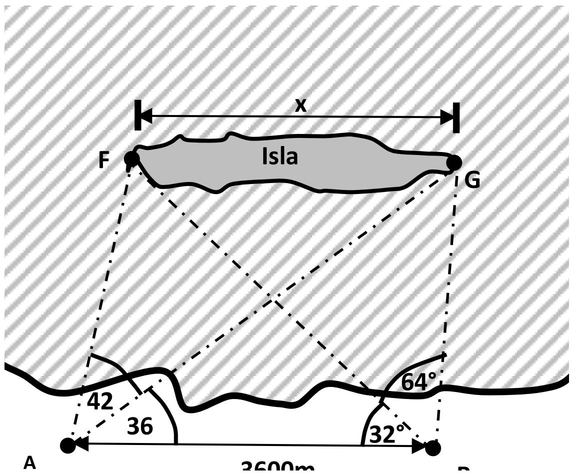
**4)** Se quiere reconstruir un triángulo del que sólo se conserva el fragmento que indica la figura. ¿Cuál es la longitud de los lados faltantes?



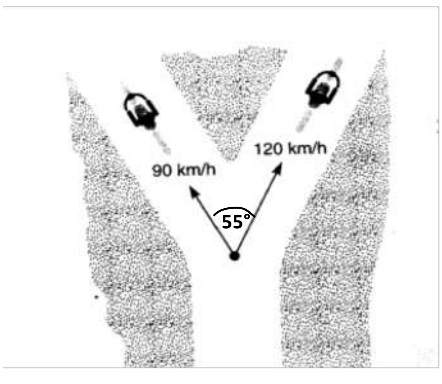

*** 5)** Suponiendo que las órbitas de la Tierra y de Venus al girar en torno al Sol son circulares y que sus radios respectivos tienen una longitud de 150.000.000 km y de 109.000.000 km respectivamente. ¿A qué distancia máxima y mínima, se encuentra Venus de la Tierra cuando el ángulo de observación Sol-Tierra-Venus ($\hat{\alpha}$ en la figura) es de 22°? Expresar el resultado con 3 cifras significativas.




**6)** Desde dos puntos A y B situados sobre la costa y distantes 3600m, en un terreno plano, se divisa una isla cercana. Con los datos de la figura, calcular la longitud "x" de la isla.




**7)** Dos motociclistas parten del punto en que se bifurcan dos carreteras rectas que forman un ángulo de 55°. Si viajan con una rapidez constante de 90 km/h y 120 km/h respectivamente ¿A qué distancia se encuentran uno de otro al cabo de 3 minutos?



*** 8)** Verificar las siguientes identidades. Determinar, en cada caso, el conjunto en el que son válidas

**a)** $\dfrac{\cos\alpha}{\text{cotg}\,\alpha}=\text{sen}\,\alpha$

**b)** $\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=1-2\,\text{sen}^2\alpha$

**c)** $(\text{tg}\,\alpha-1)^2=\sec^2\alpha-2\,\text{tg}\,\alpha$

**d)** $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}=1-\dfrac{1}{\text{cosec}^2\alpha}$

**e)** $\sec\alpha-\cos\alpha=\text{sen}\,\alpha\,.\,\text{tg}\,\alpha$

**f)** $\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}=(1-\text{sen}\,\alpha)(1+\text{sen}\,\alpha)$

**g)** $\dfrac{\text{cotg}\,\alpha-1}{1-\text{tg}\,\alpha}=\dfrac{\text{cosec}\,\alpha}{\sec\alpha}$

**h)** $\dfrac{1+\sec\alpha}{\text{cosec}\,\alpha}=\text{sen}\,\alpha+\text{tg}\,\alpha$

**i)** $\text{cotg}^2\alpha-\cos^4\alpha\,.\,\text{cosec}^2\alpha=\cos^2\alpha$

**j)** $\sec^4\alpha-\text{tg}^4\alpha=1+2\,\text{tg}^2\alpha$

**k)** $\sec\alpha\,.\,\text{sen}\,\alpha+1=\dfrac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

**l)** $\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha=\sec\alpha\,.\,\text{cosec}\,\alpha$

**m)** $(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2=2\,\text{tg}\,\alpha\,.\cos^2\alpha+1$

**n)** $\dfrac{\sec\alpha+1}{\text{tg}\,\alpha}=\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\sec\alpha-1}$

*** 9)** Reducir cada una de las siguientes expresiones

**a)** $x=\dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

**b)** $x=\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}(2\alpha)}{2\,\text{sen}\,\alpha+\text{sen}(2\alpha)}$

**10)** Verificar las siguientes identidades. Determinar, en cada caso, el conjunto en el que son válidas

**a)** $\text{sen}\,\beta=\dfrac{2\,\text{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$

**b)** $\cos\alpha=\dfrac{1-\text{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

**c)** $\text{tg}(2\beta)=\dfrac{2\,\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}^2\beta}$

**d)** $2+\text{tg}(2\beta)\,.\,\text{tg}\,\beta=\dfrac{\text{tg}(2\beta)}{\text{tg}\,\beta}$

**11)** Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0;2\pi)$

**a)** $2\ \ .\cos(2x)-1=0$

**b)** $\cos^2x-\text{sen}^2x=1$

**c)** $2\,.\,\text{sen}\,x-\sec\,x=0$

**d)** $\text{sen}(2x)\,.\cos x-2\cos^3x=0$

**12)** Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

**a)** $-2+\sqrt{3}\operatorname{cosec} x=0$

**b)** $\cos^2 x=\cos x$

**c)** $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

**d)** $\frac{1}{2}\sec x-\operatorname{tg}^2 x=1$

**e)** $\cos^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}=0$

**f)** $\sec x+\operatorname{tg} x=1$

**g)** $\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x=0$

**h)** $\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(4x)=0$

**i)** $\operatorname{sen}^2 x+\cos x=\frac{5}{4}$

**j)** $\cos x-2\operatorname{sen}^2 x+2=0$

**k)** $4\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x=7$

**l)** $\cos(2x)=1-\operatorname{sen} x$

**m)** $4\operatorname{sen}^2 x-8\operatorname{sen} x+3=0$

**n)** $2\operatorname{sen}(t).\cos^2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)$

**o)** $\operatorname{tg}^4\varphi-2\sec^2\varphi+3=0$

**p)** $\operatorname{sen} x+\sqrt{\operatorname{sen} x}=0$

**13)** Verificar las siguientes identidades, presuponiendo válidas las operaciones algebraicas que se realizan.

**a)** $\dfrac{\cos^3 x+\operatorname{sen}^3 x}{\cos x+\operatorname{sen} x}=1-\operatorname{sen} x.\cos x$ (Ayuda: Recordar cómo se factoriza $a^3+b^3$)

**b)** $\dfrac{\cos(-x)}{1+\operatorname{tg}(-x)}-\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{1+\operatorname{cotg}(-x)}=\operatorname{sen} x+\cos x$

**c)** $\operatorname{cosec}^4 x-\operatorname{cosec}^2 x=\operatorname{cotg}^4 x+\operatorname{cotg}^2 x$

**d)** $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos(2\alpha)$

**14)** **<u>Ejercicios para trabajar con un software de apoyo – (Se sugiere Geogebra)</u>**

Dadas las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

**a)** $y=\operatorname{sen}(2x)$

**b)** $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

**c)** $y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

**d)** $y=2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

**e)** $y=5.\operatorname{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

**f)** $y=-4.\operatorname{sen}\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

Se pide, calcular:

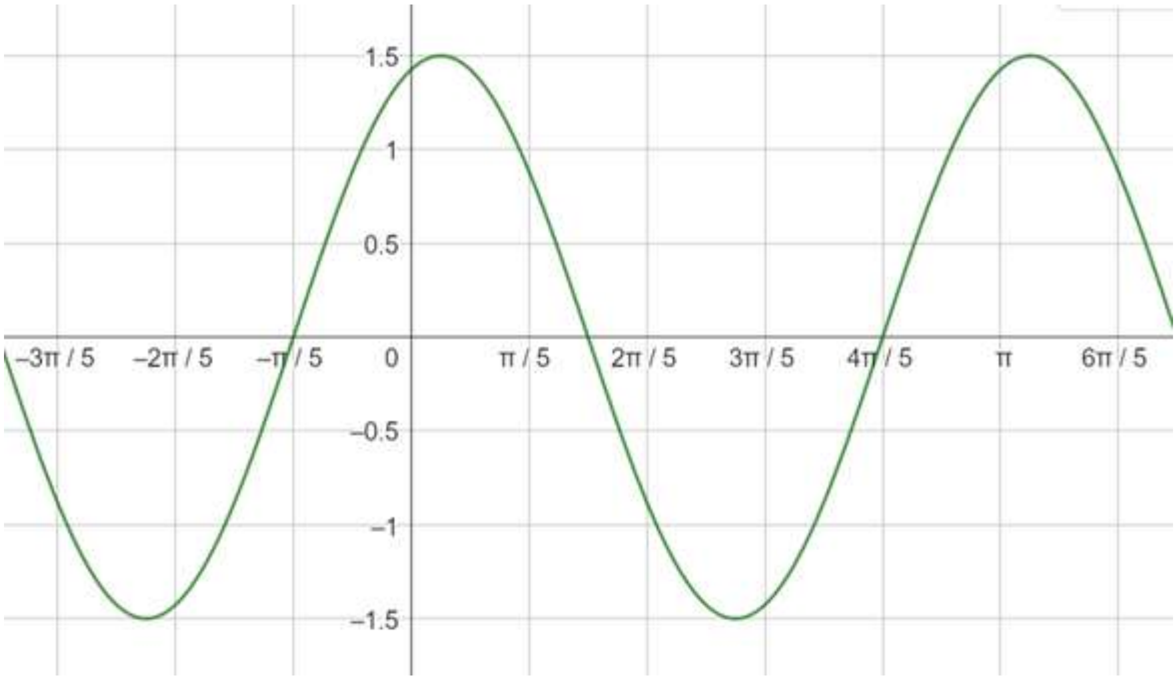
**i)** Amplitud, pulsación, ángulo de desfasaje y período.

**ii)** Representación gráfica aproximada

**iii)** Máximos y mínimos

**iv)** $C^0, C^+, C^-$.

**15)** El gráfico siguiente, corresponde a una función de la forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = A sen(bx + c)$




**a)** Encontrar $A$, $b$ y $c$.

**b)** ¿Son únicos los valores determinados en el ítem a?

**16)** **a)** Representar graficamente $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2 sen\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)$

**b)** Determinar amplitud, pulsación, período y desfasaje.

**c)** Encuentre una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga la misma gráfica que f , pero que responda a una fórmula del tipo $g(x) = A cos\ (ax + b)$ . Justificar la respuesta.

**17)** Una boya en un canal se balancea hacia arriba y hacia abajo con el movimiento de las olas describiendo una trayectoria sinusoidal. La boya se desplaza un total de 60 cm desde su punto más alto hasta su punto más bajo y regresa a su punto más alto cada 10 segundos. Sabiendo que en t=0 la boya se encuentra en su punto más alto, escribir una ecuación que describa su movimiento. Realizar un gráfico aproximado.

**18)** El número de predadores y el número de presas, en un sistema predador - presa tiende a variar periódicamente. En una cierta región con halcones como predadores y roedores como presas, la población de roedores R varía de acuerdo con la ecuación $R = 1200 + 300\ sen\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ y la población de halcones varía con la ecuación $H = 250 + 25\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, con t medido en años desde el 1° de enero de 2010.

**a)** ¿Cuál era la población aproximada de roedores y cuál la de halcones el 1° de enero de 2010?

**b)** ¿Cuáles son las poblaciones máximas de roedores y halcones? Estos máximos, ¿ocurren alguna vez al mismo tiempo?

**c)** ¿En qué fecha se alcanzó la primera población máxima de roedores?

**d)** ¿Cuál es la mínima población de halcones? ¿En qué fecha se alcanzó por primera vez?

**19)** Resolver en $\mathbb{R}$:

**a)** $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

**b)** $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

**c)** $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

**d)** $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \text{tg}(3x)$

**20)** Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = -2\left(bx + \frac{\pi}{3}\right)$ con $b \in \mathbb{R}^+$

**a)** Obtener b sabiendo que la distancia entre dos ceros consecutivos es $\frac{2\pi}{3}$.

**b)** Encontrar el conjunto de ceros, el conjunto de valores de x para los cuales "f" presenta máximos y mínimos.

**c)** Realizar un gráfico aproximado.

**21)** A partir del gráfico de la función $f(x) = cos\,(x)$, indicar lo pedido en cada caso:

a) ¿Cuál es la imagen de la función $f(x) = 2cos\,(x + \pi)$?

b) ¿Cuál es el período de la función $f(x) = -2cos\,(4x)$?

c) ¿Cuál es la imagen y el período de $f(x) = 3\,cos\,cos\,(2x + \pi)\, - 1$?

**22)** Para las siguientes funciones, se pide: calcular la imagen de $f$, los ceros, en qué puntos alcanza el máximo valor y en dónde alcanza el mínimo valor. Trazar el gráfico de cada función y dar intervalos de crecimiento, $C^+$ y $C^-$

a) $f(x) = -4sen(x) + 2$ en $[\pi; 3\pi)$

b) $f(x) = -3cos(x) + 3$ en $[-\pi; \frac{3}{2}\pi)$

c) $f(x) = -sen(x) + 1$ en $[-\pi; \pi]$

d) $f(x) = -4cos\left(\frac{2}{3}x\right) + 2$ en $[-\pi; \pi]$

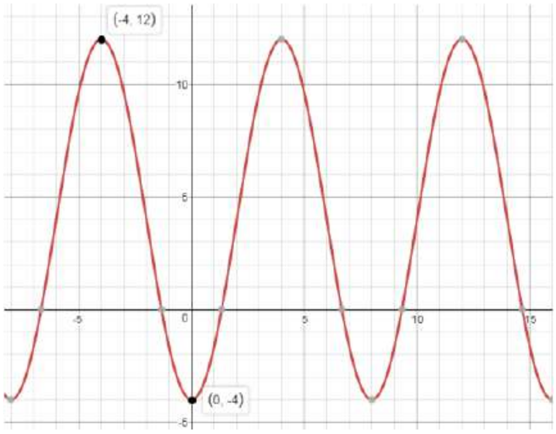
**23)** Considerar la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \cdot sen(bx)$, con *a* y *b* números reales:

a) Determinar los valores de *a* y *b* para que $f(x)$ tenga un máximo en el punto $\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$.

b) Decidir si los valores de *a* y *b* hallados en el punto anterior son los únicos posibles que cumplen la condición pedida.

c) Para los valores de *a* y *b* hallados en (a), determinar el período de $f(x)$.

**24)** Dado el gráfico de la siguiente función trigonométrica:




Sabiendo que la función es de la forma: $f(x) = Acos(Bx) + C$

Hallar los valores de *A*, *B* y *C.* Calcular los ceros de la función visibles en el gráfico. Luego, con los valores de *A*, *B* y *C* hallados, graficar la función $g(x) = Asen(Bx) + C$

## Respuestas

**1)**

**a)**

| **sexagesimal** | 360° | 330° | 300° | 270° | 240° | 210° | 180\| | 150° | 135° | 120° | 90° | 60° | 45° | 30° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **circular** | $2\pi$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

**b)**

| **sexagesimal** | 1° | 300°30´ | -1250° | 171°53´14,4" | 15° |
|---|---|---|---|---|---|
| **circular** | $\frac{\pi}{180} \cong 0{,}017$ | $\frac{601}{360}\pi \cong 5{,}245$ | $-\frac{125}{18}\pi \cong -21{,}817$ | 3 | $\frac{\pi}{12}$ |

**2)**

| | **sen** | **cos** | **tg** | **cosec** | **sec** | **cotg** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | $-\frac{12}{13}$ | $-\frac{5}{13}$ | $\frac{12}{5}$ | $-\frac{13}{12}$ | $-\frac{13}{5}$ | $\frac{5}{12}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **b)** | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | $2$ | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $\sqrt{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **c)** | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-2$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{3}$ |

**4)** 32,64 cm y 64,28 cm aprox **5)** $4,57.10^{7}$ km y $2,32.10^{8}$ km **6)** aprox. 3570m **7)** 5,03 km aprox

**9)** **a)** $\cot g\ \beta$ **b)** $tg^{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

**11)** **a)** $\left\{\frac{5\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right\}$ **b)** $\{0\ ;\ \pi\}$ **c)** $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ **d)** $\left\{\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\right\}$

**12)** ***Nota: En todas aquellas respuestas en que el resultado depende de un parámetro "k", el mismo debe ser un número entero.***

**a)** $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **b)** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ \vee\ x=2k\pi$ **c)** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ ;

**d)** $\varnothing$ **e)** $x=\frac{\pi}{2}\ \vee\ x=-\frac{\pi}{6}\ \vee\ x=\frac{7\pi}{6}$ **f)** $x=2k\pi$ **g)** $x=k\pi$

**h)** $x=\frac{k\pi}{2}\ \vee\ x=\frac{\pi}{3}\vee\ x=\frac{2\pi}{3}$ **i)** $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **j)** $x=\frac{\pi}{2}\ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{4\pi}{3}$

**k)** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ **l)** $x=k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

**m)** $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ **n)** $t=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \vee\ t=-\frac{\pi}{6}+k\pi\ \vee\ t=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

**o)** $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ **p)** $x=k\pi$ **;**

**15)** **a)** $A=\frac{3}{2};\ b=2\ ;\ \alpha=\frac{\pi}{9}$ **17)** $x=30\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)\ \vee\ x=30\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}t+\frac{\pi}{2}\right)$

**18)** **a)** 1200 y 232 **b)** 1500, 275, no **c)** 1/1/2011 **d)** 225, 1/7/2013

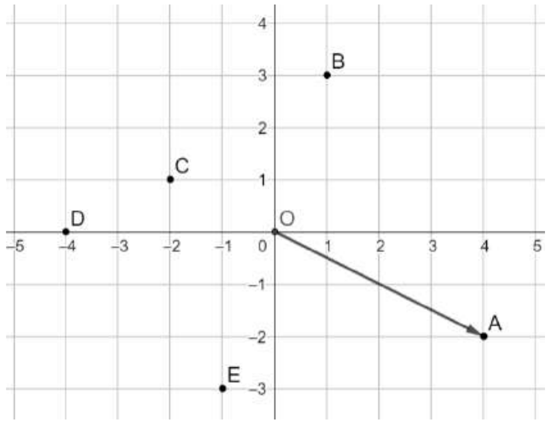
**19)** **a)** $\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi, 2k\pi\right\}$ **b)** $\left\{\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}+2k\pi\right\}$ **c)** $\left\{-\frac{\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi, -\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}$ **d)** $\left\{\frac{\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}\pi\right\}$

**20)** **a)** $b=\frac{3}{2}$ **b)** $C_0=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=-\frac{2}{9}\pi+\frac{2k}{3}\pi\right\}$ ; Cmáx= $C_{MÁX}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=-\frac{5}{9}\pi+\frac{4k}{3}\pi\right\}$ ; Cmín= $C_{MÍN}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{1}{9}\pi+\frac{4k}{3}\pi\right\}$

# - Colegio Nacional de Buenos Aires-
# Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

**Trabajo Práctico 3**

## Vectores en el plano y en el espacio




1. a) Escribir las componentes cartesianas de $\overrightarrow{CB}$.

b) Expresar en forma canónica $\overrightarrow{EC}$.

c) Ubicar en el gráfico los puntos P = (-3; -5) y Q = (1; -2), graficar el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector $\vec{v}$ equipolente con $\overrightarrow{PQ}$ con origen en O = (0; 0).

2. Dados P = (-3; 2) y Q = (3; 0) obtener:

a) Las componentes de $\overrightarrow{PQ}$ y expresar dicho vector en forma canónica.

b) $\|\overrightarrow{PQ}\|$ y $\|\overrightarrow{QP}\|$.

c) El versor asociado a $\overrightarrow{PQ}$.

d) Un vector de módulo 3, con la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$, pero de sentido contrario.

3. Si ABCD es un paralelogramo y O es el punto de intersección de las diagonales, realizar en forma gráfica las siguientes operaciones:

a) $2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ b) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CO}$ d) $2 \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

4. Sean los vectores $\vec{u} = 3 \cdot \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ y $\vec{v} = (-2; 5)$. Hallar, en forma analítica:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $3 \cdot \vec{u} - \vec{v}$ c) $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{2} \cdot \vec{v}$

5. Dados A = (2; -1), B = (3; -1), C = (1-k; 3) y D = (5; 2k+9), ¿cuál es el valor de k para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes?

6. Dados $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ y $\vec{v} = \vec{\imath} - 3 \cdot \vec{\jmath}$

a) Obtener $\vec{u} + \vec{v}$.

b) Comparar $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ con $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

c) ¿En qué caso se verifica la igualdad $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$?

7. Calcular, en cada caso, la amplitud del ángulo determinado por los vectores indicados:

a) $\vec{a} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ y $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. b) $\vec{a} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ y $\vec{b} = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$.

8. Dados los vectores $\vec{u} = (2; k)$ y $\vec{v} = (3; -2)$ calcular el valor de k tal que:

a) Los vectores sean paralelos.

b) Los vectores sean perpendiculares.

9. a) Averiguar si están alineados los puntos A = (-2; -3), B = (1; 0) y C = (6; 5).

b) Calcular el valor de **a** para que los puntos A = (2; 1), B = (4; 2), C = (6; a) estén alineados.

10. Sean en el plano, los puntos A = (1; 1); B = (2; 3); C = (5; x) y D = (y; 1)

a) Hallar los valores de “x” e “y” para los cuales la figura ABCD es un paralelogramo.

b) Con los valores calculados anteriormente, calcular:

i. el perímetro del mismo. ii. hallar la amplitud de $A\hat{B}C$.

11. Dados los puntos del plano: A = (3; -1); B = (7; 0); C = (6; 4) y D = (2; 3)

a) Demostrar analíticamente que la figura ABCD es un cuadrado.

b) Verificar analíticamente la perpendicularidad entre sus diagonales.

12. Demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

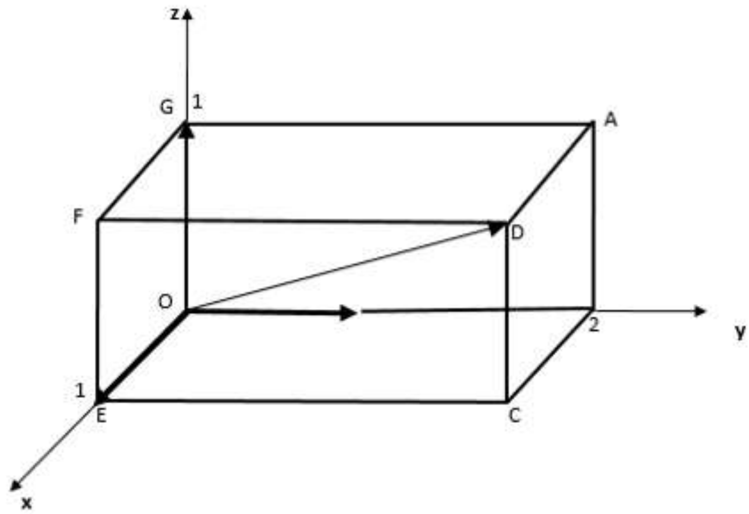
13. Dados los puntos A = (2; 0; 0); B = (0; 1; 0) y C = (0; 0; 5), se pide:

a) Verificar vectorialmente que no están alineados y clasificar el tipo de triángulo que forman según sus lados.

b) Representar gráficamente el triángulo ABC y calcular aproximadamente su perímetro.

14. Dados $\vec{u} = (k^2 + 1;\ k^2;\ k^2)$, $\vec{v} = (5;\ -a; k)$ y $\vec{w} = (0;\ -a + 3; 3)$, hallar, de ser posible, los valores de $a$ y $k$ tales que $\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{w}$.

15. La figura muestra un prisma de base rectangular apoyado sobre los planos coordenados, de tal forma que el vértice oculto es el origen de coordenadas (O).




a) Si B = (0; 2; 0), E = (1; 0; 0) y G = (0; 0; 1), calcular la amplitud de los ángulos que forma $\overrightarrow{OD}$ con los versores $\breve{\imath}$, $\breve{\jmath}$ y $\breve{k}$ respectivamente.

b) Encontrar un vector de módulo 4 que tenga la dirección y sentido de $\overrightarrow{OD}$.

16. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 60°. Si $\|\vec{u}\| = 3$ y $\|\vec{v}\| = 4$. Calcular:

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ b) $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$

17. El ángulo que forman dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene una amplitud de 60° y además $\|\vec{u}\| = 3$. Determinar cuánto debe valer $\|\vec{v}\|$ para que $\vec{u} - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{v}$.

18. Sean dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u} + \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, ¿qué relación debe existir entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

19. Dados en $R^2$ los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ de los cuales se sabe que:

- $\vec{w}$ es unitario - El coseno del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{w}$ vale -2/3.
- $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares - $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) = 8$ - $\|\vec{u}\| = 3$ $y$ $\|\vec{v}\| = \frac{4}{3}$

¿Cuál es el ángulo formado entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

20. Sean los puntos $A = (-k + 1; k; -2)$, $B = (-3; k; 0)$, $C = (-5; -1; k - 1)$ y $D = (1; k^2 - 5; -5)$:

a) hallar todos los $k \in R$ que verifiquen que $\overrightarrow{BA}$ sea paralelo a $\overrightarrow{CD}$ y $\|\overrightarrow{BA}\| \neq \|\overrightarrow{CD}\|$.

b) si $k = 1$, hallar la medida del ángulo $A\hat{B}C$.

21. Sean $\vec{u} = (-2; 4;\ k^2 + 1)$ y $\vec{v} = (-3k; 5k + 2; 15)$, hallar analíticamente todos los valores de $k$, si existen, para que:

a) los vectores resulten paralelos e indicar si son de igual o distinto sentido.

b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{229}$

22. Determinar todos los vectores $\vec{a} \in R^3$ tales que $\vec{a} \cdot (1; 1; 0) = 0,\ \vec{a} \cdot k = 7$ y verifiquen que $\|\vec{a}\| = 9$.

23. El vector $\vec{w} = (a; b; 3)$ es ortogonal simultáneamente a los vectores $\vec{u} = (1;\ -1; 2)$ y $\vec{v} = (2;\ 1; 1)$. Calcular $\|\vec{w}\|$.

24. Hallar los vectores cuyo módulo sea igual a $\sqrt{35}$ y que además sean ortogonales simultáneamente a los vectores $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

25. Sean los vectores $\vec{a} = (-2; 1; 1)$ y $\vec{b} = (-1; 1; 3)$. Obtener todos los $\vec{c}$ de manera tal que dicho vector sea ortogonal a $\vec{a}$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{5}$ y se verifique la relación $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, con $\alpha \epsilon R$ y $\beta \epsilon R$.

26. Dados los puntos P = (-3; -1; 0), Q = (-2; 0; -3) y R = (0; -2; 1), hallar el área y el perímetro del triángulo PQR.

27. Clasificar el triángulo ABC por sus lados y sus ángulos, siendo $A = (-5; -1; 0),\ B = (-3; -3; 1)$ y $C = (-6; 1; -2)$.

28. Dados los puntos: A = (3; 1; 1); B = (2; 1; 2); C = (-1; 0; $x^2$) y D = (3; 2; 0), hallar el o los valores de x que hacen que los mismos sean coplanares.

29. Dados los vectores $\vec{a} = (1;\ -2; x),\ \vec{b} = (1;\ 2; y)$ y $\vec{c} = (2; 2;\ 3)$, hallar los valores de $x$ e $y$, de forma que verifiquen simultáneamente que:

- $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} x \vec{c}) = 0$

30. Dados los vectores $\vec{u} = (2; -1; 0)$, $\vec{v} = (k; 0; 2)$ y $\vec{w} = (k; 2; -k)$.

Hallar todos los valores reales de $k$ para que el área del paralelogramo engendrado por $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sea $\sqrt{56}$ y simultáneamente el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sea 16.

**Respuestas**

1. a) $\overrightarrow{CB} = (3; 2)$ b) $\overrightarrow{EC} = -\breve{\imath} - 3\breve{\jmath}$

2. a) $6\breve{\imath} - 2\breve{\jmath}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $\frac{3}{10}\sqrt{10}\breve{\imath} - \frac{1}{10}\sqrt{10}\breve{\jmath}$ d) $-\frac{9}{10}\sqrt{10}\breve{\imath} + \frac{3}{10}\sqrt{10}\breve{\jmath}$

3. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) 2 . $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AD}$

4. a) (1; 6) b) (11; -2) c) (9/2; -7)

5. – 3

6. a) (3; -4) b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

7. a) $\alpha = 45°$ b) $\alpha = 180°$

8. a) -4/3 b) 3

9. a) Están alineados. b) a = 3

10. a) x = 3; y = 4 b) i. $6 + 2\sqrt{5}$ ii. 116° 33´ 54´´

13. a) No alineados. b) Aprox 12,72.

14. k = 3 y a = -2

15. a) $\alpha_1 = \alpha_3 \cong 65°\ 54´$; $\alpha_2 \cong 35°\ 16´$ b) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}; \frac{4}{3}\sqrt{6}; \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$

16. a) $\sqrt{37}$ b) $6\sqrt{3}$

17. 1,5 18. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ 19. 120°

20. a) i. k = 2 b) Aprox. 129° 13´ 53´´

21. a) $k = 2$ b) $k = 0$ $o$ $k = -10/17$

22. $\overrightarrow{a_1} = (4; -4; 7)$ $o$ $\overrightarrow{a_2} = (-4; 4; 7)$

23. $3\sqrt{3}$ 24. $\vec{v} = (\pm 5; \pm 3; \pm 1)$ 25. $\vec{c} = (\pm 1; 0; \pm 2)$

26. Área = $\sqrt{30}$ Perímetro = $2\sqrt{6} + 2\sqrt{11}$

27. Isósceles obtusángulo 28. $x = \pm\sqrt{6}$ 29. x = 3; y = 1

30. $k = 2$

**Trabajo Práctico 4**

# Rectas y planos en el espacio

1. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P_0 = (-3; 0; 2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = 2\breve{\imath} - \breve{\jmath} + 3\breve{k}$. Calcular aproximadamente el ángulo que forma, el vector director de dicha recta, con cada uno de los ejes coordenados.

2. Hallar, en cada caso, las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta $r$:

a) P = (3; 0; 2) pertenece a $r$ y $r$ es paralela al vector $\vec{v} = 2\breve{\imath} - \breve{\jmath} + 3\breve{k}$.

b) Los puntos A = (-1; 2; 3) y B = (1; 0; -1) pertenecen a $r$.

3. Dada la recta $s: (x; y; z) = (-1; 2; 3) + \lambda \cdot (1; 2; 3)$ se pide:

a) Escribir las coordenadas de tres puntos que pertenezcan a “s”.

b) Decidir si los puntos A = (-4; -4; -7) y B = (-2; 0; 0) pertenecen a $s$. Justificar la respuesta.

c) Hallar los posibles valores de “a” y “b” para que el punto C = (a; b; 0) pertenezca a “s”.

d) Encontrar las coordenadas de todos los puntos pertenecientes a la recta $s$ cuya distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{52}$.

4. Hallar lo indicado en cada caso:

a) Dados los puntos A = (-1; 2; 1) y B = (-2; 1; -1), escribir una ecuación simétrica de la recta paralela a AB en la que el origen de coordenadas pertenece a ella.

b) Hallar las ecuaciones, que sean posible, de la recta que pasa por el punto R = (-1; 1; 1) y es paralela al eje z.

c) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A = (-1; 3; 2) y es paralela a la recta

$$r: \frac{-2x+3}{4} = -y = z - 2$$

5. Determinar la posición relativa de las siguientes rectas. Hallar $r \cap s$.

a) $r: \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases}$ y $s: \frac{x-17}{3} = y - 4 = \frac{z+8}{-1}$

b) $r$: recta que pasa por P = (1; 1; 1) y Q = (-1; 2; -1) y $s: (x; y; z) = \beta \cdot (1; 2; 1) + (0; 3; 2)$

c) $r: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{4z-12}{8}$ y $s: \{x = -10 - 8\alpha\ y = 2 + 2\alpha\ z = -3 - 4\alpha$

d) $r: \{x = 3 - 2\alpha\ y = \alpha - 2\ z = -3\alpha$ y $s: (x; y; z) = \beta \cdot (6;\ -3;\ 9) + (-1;\ 0;\ -5)$

6. Calcular lo indicado en cada caso:

a) Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P_0 = (-1; 1; 3)$ y es normal al vector $\vec{n} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

b) Dados los puntos $P_0 = (3; 2; 1)$ y $P_1 = (-3;\ -2;\ -1)$ hallar una ecuación cartesiana del plano que es perpendicular al vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ en el punto $P_1$.

c) Hallar la ecuación cartesiana del plano determinado por los vectores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, si el mismo contiene al punto $P_0 = (2;\ -3; 5)$.

7. Representar en $R^3$ cada uno de los siguientes planos:

a) $z = 2$ c) $y = 1$ e) $z - 2y = 4$ g) $2y + z = 6$

b) $x = 5$ d) $x + 2y = 4$ f) $2x - z = 4$ h) $2x + y + 4z = 4$

8. Hallar la ecuación del plano pedido en cada caso:

a) pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano $\pi: 2x - 5y + 4z = 1$.

b) es paralelo al plano $2x - 2y + z = 2$ y pasa por el punto $A = (1;\ -1; 1)$.

c) pasa por los puntos $A = (-1; 2; 3)$ y $B = (2; 1; 1)$ y es perpendicular al plano: $\pi_1: 2x - y + 3z = 10$.

9. Hallar la ecuación de la recta pedida en cada caso:

a) 4. pasa por el punto Q = (-2; 1; 6) y que sea perpendicular al plano xz.

b) 10. indicar la ecuación vectorial de la recta perpendicular al plano $x + 2z = 3y$ que pasa por el punto

$P = (2; 1; 0)$.

10. Hallar, si es posible, la ecuación del plano $\pi$ que cumple con las condiciones dadas:

a) contiene al punto $A = (2; -1; 1)$, $B = (4; 0; 2)$ y $C = (-3; 1; -2)$.

b) contiene a los puntos $A = (2;\ 3;\ -4)$, $B = (-1; 4; -2)$ y $C = (8; 1; -8)$

11. Analizar si los puntos $P_0 = (1; 1;\ -11), P_1 = (5; 0;\ 9),\ \ P_2 = (5; -5;\ 25)$ y $P_3 = (0; 0;\ -12)$ son coplanares. En caso afirmativo hallar la ecuación del plano que los contiene.

12. Hallar la ecuación del plano $\pi$ que contiene al punto $A = (1; -3; 2)$ y a la recta $r: \frac{3x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+5}{2}$.

13. En los casos que sea posible, hallar el plano $\pi$ que contiene a las rectas r y s del punto 5.

14. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta determinada por la intersección entre los planos $\{\pi_1: 2x + 3y - 3z = 4\ \pi_2: x - 3y + 5z = 2$

15. Demostrar que las rectas $r_1: \{\pi_1: 2x + y + z = 0\ \pi_2: x - 4y + 2z = -12$ y $r_2: \frac{x+7}{2} = \frac{3y+4}{-3} = \frac{9-z}{3}$ son paralelas.

16. Demostrar que las rectas $r_1: \{\pi_1: 2x + y - 2z = -10\ \pi_2: y + 2z = 4$ y $r_2: \frac{4-x}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{x+11}{2}$ son perpendiculares.

17. Hallar la intersección de los siguientes planos:

a) $\pi_1: x + y - z + 3 = 0$ y $\pi_2: x + 2y + 3z - 9 = 0$.

b) $\pi_1: 3x - 5y + z + 4 = 0$ y $\pi_2: -6x + 10y - 2z + 3 = 0$.

18. Hallar, si existe, $r \cap \pi$:

a) $\pi: 5x - 3y - z - 6 = 0$ y $r: (x; y; z) = (3; 2; 3) + \delta(2; 3; 1)$

b) $\pi: 5x - 3y - z - 6 = 0$ y $r: \frac{x-2}{3} = -y + 1 = \frac{2z-8}{12}$

c) $\pi: 5x - 3y - z - 6 = 0$ y $r: x + 2 = \frac{z-1}{5};\ y = 2$

19. Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas definida por los planos $r_1: \{\pi_1: x + 3y - z = -7\ \pi_2: x - y + z = 1$ y $r_2$ determinada por los puntos $A = (2; 1; 0)$ y $B = (-2;\ -3; 0)$.

20. Dados los planos: $\{\alpha_1: x + 2y - 2z - 5 = 0 \ \alpha_2: 3x - 6y + 3z - 2 = 0 \ \ \alpha_3: 2x + y + 2z + 1 = 0 \ \alpha_4: x - 2y + z - 7 = 0$ se pide:

a) Probar que dos de ellosson paralelos y los otros dos son perpendiculares.

b) Calcular la distancia entre aquellos que son paralelos.

c) Calcular la amplitud del ángulo que forman $\alpha_2 \wedge \alpha_3$.

21. Dado el plano $\alpha: x + 2y + 2z - 4 = 0$ se pide:

a) Calcular la distancia entre el mismo y el origen de coordenadas.

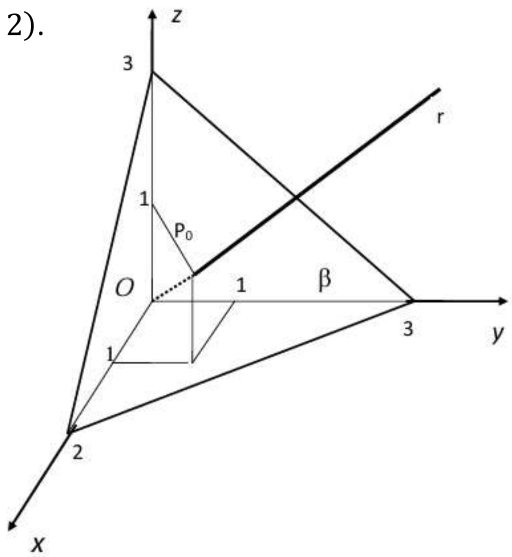
b) Calcular la distancia entre el mismo y el punto $A = (2;\ -3; 2)$.

22. Dado el siguiente gráfico, se pide:

a) Hallar la ecuacipin de $\beta$.

b) Hallar la ecuación de la recta $r$.

c) Calcular la amplitud del ángulo que ellos determinan.




23. Calcular la distancia del punto $A = (1; 0;\ -3)$ a la recta $r: \frac{2x-3}{2} = \frac{-y+2}{3} = \frac{z-1}{4}$.

24. Calcular la amplitud del ángulo definido por la recta intersección entre los planos $r_1: \{\pi_1: x + 3y - z = -7 \ \pi_2: x - y + 2z = 1$ y el plano $\pi_3: x - 2y + z = 2$

25. Dadas las rectas $r: \{x = -1 + \lambda \ y = 3 - 3\lambda \ z = 1 + 2\lambda$, $\ s: \{3x - 2y - z = 0 \ 4x + y + 3z - 1 = 0$ y el plano $\pi: 4x + y + z - 3 = 0$

Calcula el ángulo que forman:

a) $r$ y $s$ b) $s$ y $\pi$

26. Considerando los planos $\alpha: 2x + ay + 4z - 1 = 0$ y $\beta = ax + 2y + 4z - 3 = 0$

a) Calcular el ángulo que forman dichos planos, cuando $a = 1$.

b) Hallar el valor de $a$ para que los planos sean paralelos.

c) Hallar el valor de $a$ para que los planos sean perpendiculares.

**Respuestas**

1. Forma vectorial $r: (x; y; z) = (-3; 0; 2) + \lambda \cdot (2; -1; 3)$

Forma paramétrica $r: \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$

Forma simétrica $r: \frac{x+3}{2} = -y = \frac{z-2}{3}$

$\begin{cases} \hat{\alpha} = 57° \ 41' \\ \hat{\beta} = 105° \ 30' \\ \hat{\gamma} = 36° \ 41' \end{cases}$

2. a) $r: (x; y; z) = (3; 0; 2) + \lambda(2; -1; 3)$

b) $r: (x; y; z) = (1; 0; -1) + \lambda(2; -2; -4)$

3. b) $A \notin s \quad B \in s$ c) $a = -2 \wedge b = 0$ d) $P = (0; 4; 6)$ $y$ $Q = \left(-\frac{26}{7}; -\frac{24}{7}; -\frac{36}{7}\right)$

4. a) $x = y = \frac{1}{2}z$

b) Vectorial: $r: (x; y; z) = (-1; 1; 1) + \alpha \cdot (0; 0; 1)$

Paramétrica cartesiana: $r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

Simétrica: No es posible

c) Vectorial: $r: (x; y; z) = (-1; 3; 2) + \alpha \cdot (-2; -1; 1)$

Paramétrica cartesiana: $r: \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$

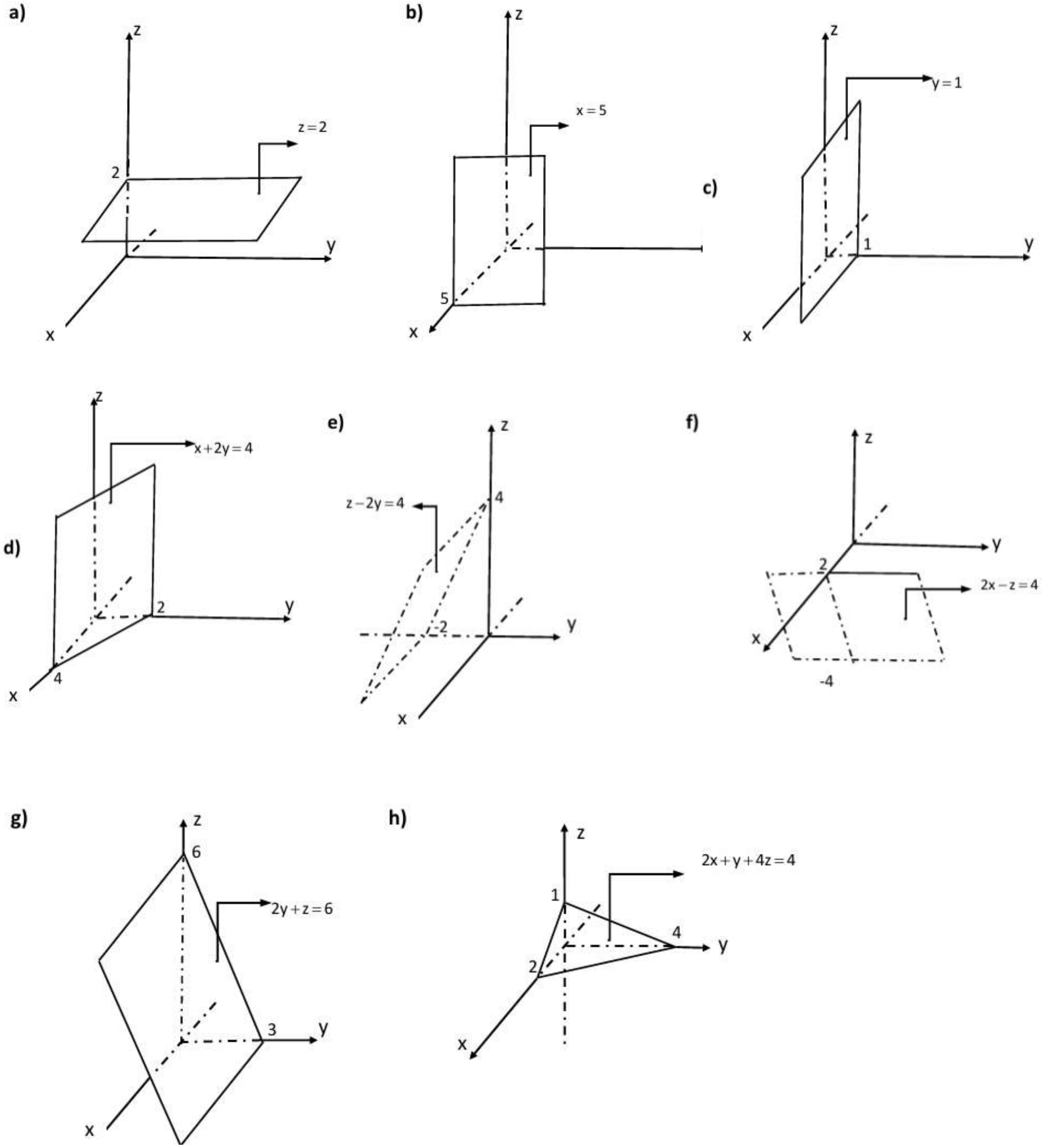
Simétrica: $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{-1} = z - 2$

5. a) $r \cap s = \{(2; -1; -3)\}$ Son perpendiculares b) Rectas alabeadas. $r \cap s = \emptyset$

c) Paralelas coincidentes. $r \cap s = r$ d) Paralelas no coincidentes. $r \cap s = \emptyset$

6. a) $-x + 2y - z = 0$ b) $3x + 2y + z + 14 = 0$ c) $x + y + 7z - 28 = 0$

7.




8. a) $\pi: 2x - 5y + 4z = 0$  b) $\pi: 2x - 2y + z - 5 = 0$

c) $\pi: 5x + 13y + z - 24 = 0$

9. a) Vectorial: $r: (x; y; z) = (-2; 1; 6) + \alpha \cdot (0; 1; 0)$

Paramétrica cartesiana: $r: \{x = -2\ y = 1 + \alpha\ z = 6$

Simétrica: No es posible

b) $r: (x; y; z) = (2; 1; 0) + \lambda \cdot (1; -3; 2)$

10. a) $\pi: -5x + y + 9z + 2 = 0$

b) Los puntos están alineados, existen infinitos planos que contienen a esos tres puntos.

11. $\pi: 21x - 16y - 5z = 60$

12. $\pi: -33x - 10y - 4z + 11 = 0$

13. a) $\pi: -x + 7y + 4z + 21 = 0$ b) No existe. c) Existen infinitos planos.

d) $\pi: x + 2y + 1 = 0$

14. $\frac{x-2}{-2/3} = \frac{y}{13/9} = z$

17. a) $\pi_1 \cap \pi_2 = r: (x; y; z) = (0; 0; 3) + \beta(5;\ -4; 1)$ b) $\pi_1 // \pi_2\ y\ \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

18. a) $r \cap \pi = r$ b) $r \cap \pi = \left\{\left(\frac{11}{4}; \frac{3}{4}; \frac{11}{2}\right)\right\}$ c) $r \cap \pi = \emptyset$

19. $r_1 \cap r_2 = \{(-1;\ -2; 0)\}$

20. b) $\frac{19}{18}\sqrt{6}$ b) Aprox. 74°12’-

21. a) 4/3 b) 4/3

22. a) $x + 2y + 2z - 6 = 0$ b) $x = y = z$ c) 79° 58´

23. $d = \frac{1}{2}\sqrt{1665}$

24. 23° 50´

25. a) 32° 30´ 45´´ b) 16° 59´ 16´´

26. a) 17° 45´ 10´´ b) $a = 2$ c) $a = -4$

# - Colegio Nacional de Buenos Aires-
# Matemática - 4º Año – Guía de Trabajos Prácticos

### Trabajo Práctico 5

## Sistemas de ecuaciones lineales

**1) Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales**

a) $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x-2y=\frac{13}{2} \\ 3x+2y-2z=-\frac{9}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+6z=3 \\ x-y+4z=1 \\ 3x+2y-2z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y+4z=2 \\ 3x+2y-2z=3 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+4y-3z=0 \\ 2z+3x=-2 \\ 2x+3y+5x=3 \\ -2x+6y-z=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-6x_3=0 \\ 3x_1-11x_2+12x_3=0 \end{cases}$

**2) Plantear y resolver cada uno de los problemas dados a continuación.**

**a)** En una fábrica hay tres máquinas de confección A, B y C. Cuando las tres están funcionando producen 222 trajes al día. Si “A” y “B” trabajan, pero “C” no lo está, se producen 159 trajes. Si, en cambio, trabajan “B” y “C”, pero no “A”, la producción es de 147 trajes. ¿Cuál es la producción diaria de cada máquina?

**b)** Encontrar un número entero positivo de tres cifras tal que la suma de los tres dígitos sea 14, el dígito de las decenas sea dos más que el de las unidades y si los dígitos se invierten el número no se altera.

**c)** Un cierto número se representa con tres dígitos. Si los dígitos de las unidades y las decenas se intercambian, el número aumenta en 18. Si los dígitos de las centenas y las decenas se intercambian, el número disminuye en 90. Si la suma de todos los dígitos es 12 encontrar el número que cumple con esto.

**d)** La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180º. El ángulo de mayor amplitud, tiene una medida cinco veces mayor que la del más pequeño e igual a la suma entre ellos. Hallar las medidas de los tres ángulos.

**e)** Un almacenero le vendió a un cliente 5 paquetes de arroz, 2 de garbanzos y 3 de maíz por $6,60; a otro cliente le vendió 2 de arroz, 3 de garbanzos y 5 de maíz, por $5,80; a un tercer cliente le vendió 3 de arroz, 5 de garbanzos y 2 de maíz por $5,60. Si a todos les cobró el mismo precio unitario. ¿Cuánto vale un paquete de cada artículo?

**f)** Luis está haciendo en su casa un trabajo de carpintería para lo cual fue a la ferretería y compró un kilogramo de cada una de las tres variedades de clavos existentes: Chicos, medianos y grandes. Luego de un rato de trabajo, observa que había subestimado la cantidad de clavos pequeños y grandes que necesitaba así es que compra la misma cantidad de clavos pequeños y el doble de grandes. Después de un rato más de construcción, se da cuenta de que aún le faltan clavos y compra un Kg. de clavos pequeños y otro de medianos. Cuando vio los tickets de la ferretería observó que le habían cobrado la primera vez \$6, la segunda \$6,5 y la tercera \$3,5. Los precios de los clavos varían según su tamaño pero en los tickets no figura el detalle. ¿Podrías averiguar los precios?

**g)** Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: Sillas; mecedoras y sillones. Cada uno de ellos requiere de madera, plástico y aluminio como se muestra en la tabla que aparece enseguida. La compañía tiene en stock 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Cuando finaliza la temporada decide agotar todas las existencias. Para lograrlo ¿Cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

| | **Madera** | **Plástico** | **Aluminio** |
|---|---|---|---|
| Silla | 1 unidad | 1 unidad | 2 unidades |
| Mecedora | 1 unidad | 1 unidad | 3 unidades |
| Sillón | 1 unidad | 2 unidades | 5 unidades |

**h)** Una fábrica paga 8\$/hora a sus trabajadores calificados del departamento de ensamble y 4\$/hora a los semicalificados del mismo departamento. A los empleados del departamento de envíos y cargas se les paga 5\$/hora. Debido a un aumento en los pedidos necesita tener un total de 70 trabajadores entre ambos departamentos y pagará un total de 370\$/hora. Debido a una cláusula laboral debe haber el doble de trabajadores semicalificados que calificados. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría se deben contratar?

**i)** Una compañía de artículos para jardín cuenta con tres clases de fertilizantes que contienen productos químicos A, B y C en diferentes porcentajes, según se muestra en la siguiente tabla:

| | **Tipo de fertilizante** | | |
|---|---|---|---|
| **Producto químico.** | **1º** | **2º** | **3º** |
| A | 6% | 8% | 12% |
| B | 6% | 12% | 8% |
| C | 8% | 4% | 12% |

¿En qué proporción deben mezclarse los tres tipos de fertilizantes para que contengan 8% de cada uno de los tres productos químicos?

**j)** Se dispone de tres aleaciones de plata, cobre y oro con la siguiente composición:

| | **Plataº** | **Cobre** | **Oro** |
|---|---|---|---|
| 1ª | 5% | 15% | 80% |
| 2ª | 10% | 25% | 65% |
| 3ª | 15% | 30% | 55% |

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una de ellas para obtener una nueva aleación que contenga 12% de plata, 26% de cobre y 62% de oro?
Si la aleación lograda debe tener 20gr ¿Cuántos deben ser de cada una de ellas?

**k)** En la tabla dada a continuación figuran las 40 notas obtenidas por el alumnado correspondiente a un examen de Inglés:

| Nota | Cant. de alumnos |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | ….. |
| 5 | 6 |
| 6 | 7 |
| 7 | ….. |
| 8 | 4 |
| 9 | 2 |
| 10 | ….. |

Si se sabe que el promedio del curso fue 5,70 y que los que la cantidad de alumnos que obtuvo 4 puntos sumado al doble de los que lograron 10 puntos da como resultado aquellos que su nota fue 7 puntos. ¿Calcular cuántos fueron los alumnos que obtuvieron: 4puntos., 7 puntos y 10 puntos?

**l)** La edad de Tomás es la suma de las edades de Carmen y Daniel. La edad de Carmen es dos años más que la suma de las edades de Daniel y Marcos. La edad de Daniel es cuatro veces la edad de Marcos. Si la suma de las cuatro edades es 42 años. ¿Qué edad tiene Tomás?

**m)** Recordemos que una función cuadrática escrita en forma polinómica responde a la fórmula $f(x)=ax^2+bx+c$. Hallar la fórmula de la misma si se sabe que pasa por los puntos $A=(-1\ ;\ 1)$ ; $B=(2\ ;\ 1)$ ; $C=(3\ ;\ -3)$

**n)** Analizar, mediante un sistema de ecuaciones lineales, si existe un único plano que contiene a los puntos:

**a)** $A=(1\ ;1;3)$ ; $B=(2\ ;1;2)$ ; $C=(1\ ;3;1)$ ; $D=(3\ ;1;1)$

**b)** $A=(1\ ;1;3)$ ; $B=(2\ ;1;2)$ ; $C=(1\ ;3;1)$ ; $D=(1\ ;1;1)$

**3)** Analizar los sistemas de ecuaciones siguientes para los distintos valores del parámetro “k”.

a) $\begin{cases} x+y-kz=0 \\ x-y+z=1 \\ -x+ky+z=k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+kz=6 \\ kx-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+ky-z=4 \\ -4x+5y+kz=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ kx-y+z=3 \\ -x+2y-kz=-3 \end{cases}$

**4)** Analizar los sistemas de ecuaciones siguientes para los distintos valores del parámetro “k”.

a) $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} kx+y=1 \\ 3x+2y=0 \\ x+ky=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ky+z=2 \\ 2x+y+kz=k \end{cases}$

d) $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=k \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-y+z+w=1 \\ x+2y-z+4w=2 \\ x+7y-4z+11w=k \end{cases}$

**5)** Analizar las condiciones que deben cumplir los parámetros a, b, c para que el sistema admita solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

a) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+4z=a \\ 2x+3y-z=b \\ 3x-y+2z=c \end{cases}$

## Respuestas

**Nota: Dado que las respuestas, en caso de compatibilidad, son verificables y además dependen de las variables utilizadas, no todas estarán expuestas y quedan a cargo del alumno.**

**1)** a) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-3;0\right)\right\}$; b) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right\}$; c) $S=\left\{(1;1;1)\right\}$; d) $S=\varnothing$;

e) $S=\left\{\left(1;2x_3;x_3;-3x_5;x_5\right)/\,x_3\in\Re\wedge x_5\in\Re\right\}$; f) $S=\left\{\left(\frac{2}{5}x_3;\frac{6}{5}x_3;x_3\right)/\,x_3\in\Re\right\}$;

**2)** a) A: 75 trajes, B: 84 trajes y C: 63 trajes. g) 100 sillas; 100 mecedoras y 200 sillones

h) 40 semicalificados; 20 calificados y 10 empleados de envíos y cargas.

j) 4gr. de la 1ª; 4gr. de la 2ª y 12 gr. de la 3ª

**3)** a) Para todo "k" es S.C.D b) Rta.:S.C.D. si $k\neq 1$; S.C.I. Nunca; S.I. si $k=1$

c) S.C.D. si $k\neq -1 \wedge k\neq -7$. S.C.I. si $k=-7$. S.I. si $k=-1$

d) S.C.D. si $k\neq -1 \wedge k\neq 2$ S.C.I. si $k=2$ S.I. si $k=-1$

**4)** a) $k=3$ SCI; $k\neq 3$ SCD b) $k=1$ SCD; $k\neq 1$ SI c) $k=1$ $k=2$ SI; $k\neq 1$ $k\neq 2$ SCD

d) $k=1$ SCI; $k=-2$ SI; $k\neq 1$ $k\neq -2$ SCD e) $k=1$ $k=0$ SCI; $k\neq 1$ $k\neq 0$ SI

**5)** a) $-5a+2b+c\neq 0$ SI; $-5a+2b+c=0$ SCI b) Siempre tiene solución única

## Trabajo Práctico 6

# Números complejos

**1.** Dados $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + 3i$, y $z_3 = 1 - i$, calcular:

a) $(z_1 + z_2)^2$ b) $\frac{z_1}{z_2 . z_3}$ c) $2z_1 - \left(z_2^2 - z_1\right) - \frac{z_3}{z_2}$

d) $|z_1|^2 + \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{-1}$ e) $\frac{z_2^2 + |z_3|^2}{\overline{z_1}}$ f) $i^{43} z_1 + \frac{i^{37}}{z_2} - i^{122}\overline{z_3}$

**2.** Hallar x e y reales tales que:

a) y – 3i +xi = 2 –y +5i **b)** (1+2i).x + (3 – 5i) y = 1–3i

**c)** x + 2 – ( x –y).i = 3y + 2i **d)** (1+i).(x+2y) – (3-2i) ).(x-y) = 8 + 3i

**3.** a) Encontrar x para que z = ( 3+ 2i).(x + 6i) sea imaginario puro.
b) Encontrar x para que z = $\frac{x + 3i}{2 - 5i}$ sea un complejo real.

**4.** Hallar los valores de $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ para que (p+q)+ (p-q) i sea igual a 2- i .

**5.** Establecer las condiciones para que el producto de dos números complejos sea:

a) imaginario puro b) complejo real

**6.** Encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que :

a) i.z = 1 b) (3 –i).z = i

c) $(1 - i)^2 = \frac{i}{z}$ d) $z.i + z = 2\sqrt{3} - 2i$

e) $\frac{z - 1}{z + 1} = 2 + i$ f) $\frac{2i}{z + i} = 1 + 2i$

g) $\frac{-1 + (z - 1)i}{i^{16}} = \frac{i^{27}}{-1 - i}$ h) $\frac{-i^{19} + \left(1 - \overline{z}\right).i}{i^5} = (2 - i).i^{17}$

**7.** Demostrar que:

a) $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{-z} = -\overline{z}$

b) $\forall z \in \mathbb{C} : z.\overline{z} = |z|^2$

c) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

d) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

e) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} - \{(0,0)\} : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

**8.** Representar en el plano el conjunto solución de:

a) $\mathrm{Re}(z) = 5$ b) $-1 \leq \mathrm{Im}(z) < 3$ **1.** $|z+1| > 2$

d) $-1 < \mathrm{Re}(z) < 3$ e) $|z - 1 + i| = 2$ f) $|z+i| = |z+2i|$

g) $|z|^2 = z + \bar{z}$ h) $\mathrm{Re}\left(z + z^{-1}\right) = 0$ i) $z - \bar{z} = i$

**9.** Dados los números complejos:

$z_1 = \sqrt{3} + i$ , $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = -2i$ , y $z_5 = 1 - \sqrt{3}\,i$

a) Representarlos y escribirlos en forma polar y trigonométrica.

b) Resolver utilizando la forma polar. Expresar el resultado en forma binómica.

i. $z_1^6$ ii. $(z_3.z_5)^4$

iii. $\dfrac{\overline{z_5}}{z_3}.\dfrac{z_1}{z_2}$ iv. $(z_1)^{-5}$

**10.** Resolver las siguientes operaciones:

a) $(2-2i)^6$ b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^4$ c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{12}$

**11.** Sean P(x) = $a.x^2 + bx + c$ con a, b y c reales y $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bar{z}\right) = 0$$

**12.** Factorizar en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$:

a) $x^4 - 1$ b) $x^4 + 1$ c) $x^3 - 1$

d) $x^3 + 1$ e) $x^4 - 3x^2 - 4$ f) $x^5 - x^4 + 16x - 16$

**13.** Obtener en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $-3x^2 = 2(x-2)^2 - 3$ c) $x^3 + x^2 + x = 0$

d) $2z^2 - 3z + 4 = 0$ e) $5z^2 - 3z = 0$ f) $\dfrac{3}{2}z^2 + 2z + \dfrac{4}{3} = 0$

**14.** (*) Determinar el conjunto de números complejos que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |z| = 2 \\ 2.\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z^2) \end{cases}$$

**15.** (*) Escribir la factorización en $\mathbb{R}$ de un polinomio p(x) con coeficientes reales de **grado mínimo** tal que tenga a $z_1 = 5$ , y a $z_2 = 2i$ como raíces dobles.

(*) Ejercicios optativos

Rtas:

1): a) –4; b) $-\frac{3}{26}-\frac{11}{26}i$ ; c) $\frac{148}{13}+\frac{40}{13}i$ ;d) $\frac{60}{13}-\frac{1}{13}i$ ; e) $-\frac{18}{5}-\frac{21}{5}i$ ; f) $\frac{3}{13}-\frac{15}{13}i$

2) a) x=8, y=1 ; b) x= -4/11, y=5/11 ; c) x= -2 ; y = 0 ; d) x=1,y = 2

3) a) x=4; b) x=-6/5 ; 4) $p=\frac{1}{2}; q=\frac{3}{2}$; 6) a) z= -I; b) – 0,1+ 0,3.i ; c) z= - 0,5 ; d)z= $\left(-1+\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i$ ;

e) z= -2 + i ; f)z= $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ ; g)z= $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$ ; h)z= 1+2i

9) b) i. –64 ; ii. $32-32\sqrt{3}\,i$ ; iii. 0,683-0,183 i ; iv. $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; 11) a) 512i ; b) $-8-8\sqrt{3}i$; c)1

12) a) En $\mathbb{R}$: (x+1).(x-1). $(x^2+1)$; en $\mathbb{C}$: (x+1).(x-1)(x+i).(x- i) ;

b) En $\mathbb{R}$: $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$; en $\mathbb{C}$: $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

c) En $\mathbb{R}$:(x – 1)$(x^2$ +x +1); en $\mathbb{C}$ : $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

d) En $\mathbb{R}$ :(x –+1)$(x^2$ - x +1); en $\mathbb{C}$: $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

e) En $\mathbb{R}$ : (x+2)(x-2)$(x^2+1)$; en $\mathbb{C}$: (x+2)(x-2)(x + i)(x – i)

f) En $\mathbb{R}$: $(x-1).\left(x^2-2\sqrt{2}x+4\right).\left(x^2+2\sqrt{2}x+4\right)$; en $\mathbb{C}$ : $(x-1)\left(x-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\left(x-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)$

13): a) $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$, $S_{\mathbb{C}}=\{2i,-2i\}$ b) $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i,\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right\}$

c) $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ d) $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i,\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i\right\}$

e) $S_{\mathbb{R}}=S_{\mathbb{C}}=\left\{0;\frac{3}{5}\right\}$ f) $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i,-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\right\}$

14) S= $\left\{2i;-2i;\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\right\}$

15) Una solución posible es p(x)= $(x-5)^2\left(x^2+4\right)^2$