# COLEGIO NACIONAL DE BUENOS AIRES

Guía de Trabajos Prácticos 5to año

2024

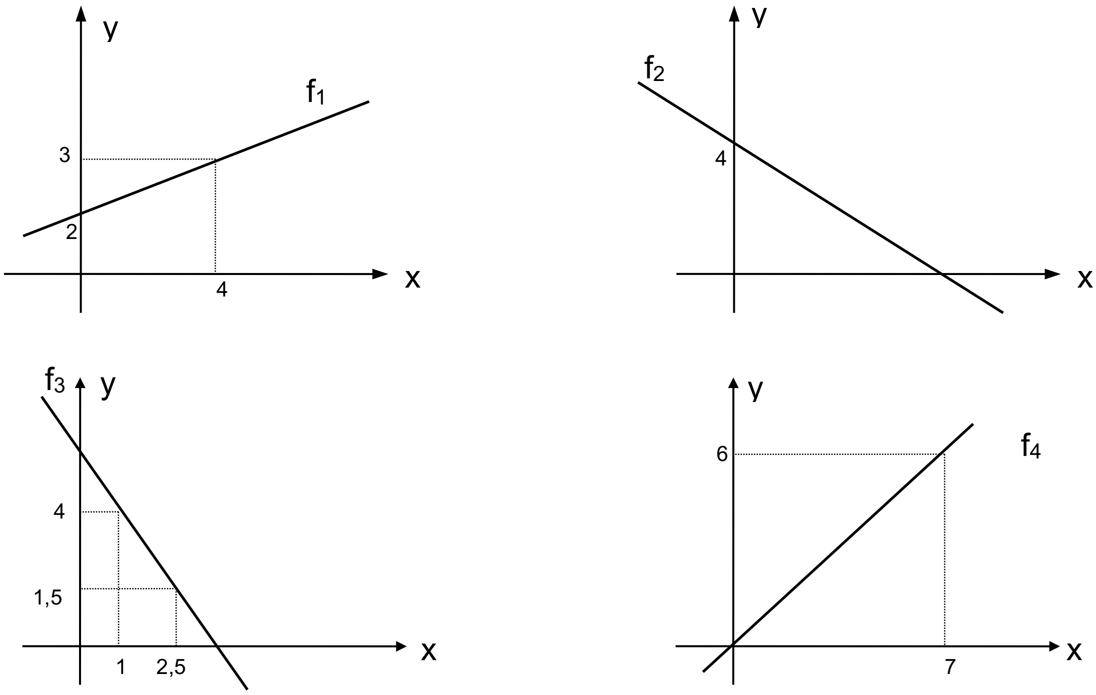
CNBA
Departamento de Matemática

# Colegio Nacional de Buenos Aires

**Guía de Trabajos Prácticos de Matemática**

# TRABAJO PRÁCTICO Nº0: FUNCIONES

1) Las siguientes, son cuatro gráficas correspondientes a funciones lineales de dominio real. Acorde con los datos indicados en cada caso. Hallar sus respectivas formas explícitas.




2) De una función lineal “f” se saben los siguientes datos: Pasa por los puntos $A=(8;-1)$ y $A=(10;-2)$. A partir de ello, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones resultan verdaderas:
   a) Su ordenada al origen es b=3 y su conjunto de ceros es $C_0=\{6\}$.
   b) El punto $P_0=(5;\frac{1}{2})$ pertenece a gráfica de la misma.
   c) La recta “r” de ecuación $y=2x+4$ es perpendicular a ella.
   d) La expresión de la función inversa es $f^{-1}(x)=-2x+6$.
   e) El conjunto de positividad de f es el intervalo $C^{+}=(6;+\infty)$.
   f) La función y su inversa se interceptan en el punto $M=(2;2)$.

3) Hallar la expresión de la función cuadrática de $\Re \to \Re$ que cumple en cada caso con los requisitos pedidos:
   a) $V=(1;3)$ y contiene al punto $P_0=(0;2)$
   b) $x_1=2$ ; $x_2=4$ y contiene al punto $P_0=(3;3)$.
   c) La suma de sus raíces es -2, su producto es -24 y pasa por $P_0=(0;12)$
   d) Pasa por los puntos $A=(2;3)$; $B=(-2;-9)$; $C=(0;5)$

e) Intercepta al eje y en el punto $A=(0;5)$; la $x_v$ = 2 y el coeficiente del término cuadrático y el lineal difieren en 1.

4) Dadas las funciones $\begin{cases} f(x)=x^2-3x-k \\ g(x)=x+2k \end{cases}$. Analizar, para qué valores de “k”, la recta resulta secante, tangente o exterior a la parábola.

5) Sea “f” la función lineal que tiene pendiente -2 y pasa por el punto $A=(4;2)$ y la parábola definida por $g(x)=(x-3).(x-5)$. Representar gráficamente ambas curvas y analizar en qué intervalo o unión de intervalos se verifica que $f(x)\geq g(x)$ .

6) Factorizar el polinomio $P(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}x+1$ y hallar sus intervalos de positividad y negatividad.

7) Hallar la expresión polinómica de grado 4 que cumple las siguientes condiciones: El conjunto de ceros es $C_0=\{\frac{1}{2};-1;1;3\}$ y además contiene al punto; $A=(-\frac{1}{2};-\frac{21}{4})$.

8) En el polinomio $A(x)=x^4-ax^3+bx^2$ dos de sus raíces son $x=3$ y $x=-1$. ¿Qué valores toman a y b? ¿Cuál es su expresión factorizada?

## ÁLGEBRA DE FUNCIONES

### IGUALDAD

Dos funciones f: Df → B y g: Dg → C son iguales cuando:
Df = Dg ; B = C y para todo x: f(x) = g(x)

<u>Por ejemplo</u>:

Las funciones $f:R-\{2\}\to R/f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y g: R→R/ g (x) = x+2

no son iguales ya que $D_f \neq$ Dg , sin embargo, notemos que para todo x≠2, f(x) = g(x). Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo g(2) = 4

Si definimos una función h: R→R/ $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$ , resulta h = g

SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x) \quad \forall\, x$, siendo $D(f+g) = Df \cap Dg$

$(f\,.\,g)_{(x)} = f(x).g(x) \quad \forall\, x$, siendo $D(f\,.\,g) = Df \cap Dg$

$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall\, x$, siendo $D\left(\frac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{x \in R \,/\, g(x) \neq 0\}$

<u>Ejemplo</u>:

Sean $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $D_f = R - \{1\}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ $D_g = R_0^+$ entonces,

$(f+g)_{(x)} = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x} \qquad D_{f+g} = R_0^+ - \{1\}$

$(f.g)_{(x)} = \frac{1}{x-1}.\sqrt{x} \qquad D_{f.g} = R_0^+ - \{1\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{1}{(x-1).\sqrt{x}} \qquad D_{\frac{f}{g}} = R^+ - \{1\}$

Ejercicios

9) Dados los siguientes pares de funciones f y g indicar para cada una dominio mayorante e imagen y hallar f+g, f.g y f/g indicando el dominio mayorante de cada una.

a) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\qquad g(x) = 3x + 2$

d) $f(x) = \ln(x-1)$ $\qquad g(x) = e^x$

e) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad g(x) = (x-1)^2$

10) Dadas las siguientes funciones, indicar dominio, imagen y conjunto de ceros

a) $f(x) = x^2+2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ d) $f(x) = \ln(x+1)$

11) Hallar el conjunto de ceros, conjunto positividad, negatividad y a partir de ello esbozar una gráfica de las siguientes funciones cuyas fórmulas se indican a continuación..

a) $f(x) = \left(x^2 + \frac{2}{3}\right)x$ b) $g(x) = \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ c) $h(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right).\left(x^2 + 1\right)$

12) Considere las funciones:

$$\mathbf{f(x)} = (\mathbf{x}-1)^2 + 1$$
$$\mathbf{g(x)} = -\mathbf{x} + 2$$
$$\mathbf{h(x)} = \sqrt{3-\mathbf{x}}$$

a) Representar gráficamente $\mathbf{j: R \to R \,/\, j(x)} = \begin{cases} \mathbf{h(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} \le 0 \\ \mathbf{f(x)} & \mathbf{si} \quad 0 < \mathbf{x} \le 2 \\ \dfrac{1}{\mathbf{g(x)}} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} > 2 \end{cases}$

b) Determinar:
   i) conjunto de ceros de j
   ii) si existen valores de $x \in \mathbf{R}$ /j(x)>0
   iii) conjunto de negatividad
   iv) punto de intersección con el eje y.

13) Dadas las siguientes funciones:

$\mathbf{f: A \to R \,/\, f(x)} = \boldsymbol{log_2(}\mathbf{x}+2\boldsymbol{)}$

$\mathbf{g: B \to R \,/\, g(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{5\mathbf{x}^2 - 10\mathbf{x}}}$

$\mathbf{h: R \to R \,/\, h(x)} = (\mathbf{x}+1)^2 + 1$

$\mathbf{n(x)}$ función lineal tal que n(0)=2 y n(-2)=0

a) Hallar:
   i. $\mathbf{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \,/\, \mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}\}$
   ii. $\mathbf{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \,/\, 1 < \mathbf{f(x)} < 4\}$

b) Se define $\mathbf{k: R \to R \,/\, k(x)} = \begin{cases} \mathbf{h(x)}-2 & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} \le -2 \\ \mathbf{n(x)} & \mathbf{si} \quad -2 < \mathbf{x} < 0 \\ \mathbf{f(x)}-1 & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} \ge 0 \end{cases}$.

i. Hallar conjunto de ceros, de positividad y negatividad
ii. Realizar un gráfico aproximado.
iii. A partir del gráfico obtenido definir conjunto imagen e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

14) a) Sean las funciones "f" y "g" definidas por las fórmulas dadas a continuación: $f(x) = \dfrac{5}{x+4}$ y $g(x) = \dfrac{3}{x-8}$. Se pide: Graficar ambas funciones en un mismo sistema cartesiano de ejes. Hallar gráfica y analíticamente los puntos donde se verifica la condición $f(x) = g(x)$.

b) Dadas las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación se pide: Definir "$f-g$" y hallar su conjunto de ceros. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+5}$ y $g(x)=\dfrac{2x5}{x+9}$

15) Dadas f y g hallar el conjunto de todos los $x/f(x)=g(x)$:

$a)$ $f(x)=x+2$ $y$ $g(x)=\sqrt{2x+7}$

$b)$ $f(x)=1+\sqrt{x+1}$ $y$ $g(x)=\sqrt{2x+3}$

16) Dadas las funciones indicadas a continuación hallar, en forma analítica y gráfica (cuando se indique, el conjunto $A\subset Df$ que satisface:

a) $f(x)\geq g(x)$ si $f(x)=3+2x$ y $g(x)=4x-5$

$b)$ $f(x)>4$ $si$ $f(x)=x^2-3x$

$c)$ $|f(x)|\geq|g(x)|$ $si$ $f(x)=3x$ $y$ $g(x)=6-3x$

17) Hallar, en el intervalo $[0;2\pi)$, los ceros de las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x-1$

b) $g(x)=2\,.\cos(2x)-1$

c) $h(x)=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x-1$

d) $t(x)=-2.\cos x-2$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

**Guía de Trabajos Prácticos de Matemática**

# TRABAJO PRÁCTICO Nº1: LÍMITES

## A) Límites determinados en un punto, finitos e infinitos

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2+4}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \ln(x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^2.(x+2)}{4.\cos x}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{x+1}{8x+1}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^{x-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-9}$
11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$
12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x+2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x}$

## B) Límites indeterminados $\dfrac{\to 0}{\to 0}$

### *Cociente de polinomios*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+3x^2}{x^3+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-10x+25}$
4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+2x^3+x^2+2}{x^3-3x^2-2x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{10x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3+2x-5}{x^4+x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-16}$
8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15}$
9. $\lim\limits_{x\to i} \dfrac{x^n-i^n}{x-i}$
10. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2).(x-3)}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^2-a^2}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)^{\frac{2x-2}{x-1}}$

### *Trigonométricos*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(3x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen(x-1)}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{tg(x^2-4)}{sen(x-2)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{tg(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(2x)}{3x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(3x)}{sen(5x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(4x)}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^3(2x)}{5x^3}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^4(x)\cdot 5x}{tg^2x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{sen(x)}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^3(3x)}{2x\cdot sen^2x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-cos(x)}}$

14. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{cos(2x)}{cos(x) - sen(x)}$

15. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

16. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - sen(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2(x) - 3cos(x) + 3}{cos(x) - 1}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2(x) - 3cos(x) + 3}{cos(x) - 1}$

### *Irracionales*

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{x} - 1}$

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+sen\ x} - \sqrt{1 - sen\ x}}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

6. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x-2}}$

7. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

10. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

11. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3} - 2}$

13. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x\sqrt{a} - a\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ $\quad a > 0$

### C) Límites laterales

Hallar los límites laterales en los puntos indicados. Indicar si existe el límite y graficar.

a) $y = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ en $x_1 = 0$

b) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & x \leq 1 \\ 2 + x^2 & x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = 1$

c) $y = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

d) $y = x.|x-2|$ en $x_1 = 0$ y en $x_2 = 2$

e) $y = \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|}$ en $x_1 = \mathbf{2}$

### D) Límites determinados de variable infinita

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{3}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x^3 + 1}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4}{x+1}\right)^5$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{x}}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{5x}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x+3}{3x+1}\right)^{-1}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^2$

**E) Límites indeterminados $\frac{\to\infty}{\to\infty}$**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{x+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x+x^2-5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x+1}\right)^{5/x}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{4x+1}\right)^{2x}$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\frac{2x}{x+2}}$ 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{3x+1}\right)^{-1}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{2}$

**F) Establecer si las siguientes funciones tienen asíntotas horizontales. Determinar su ecuación.**

1. $f(x)=\frac{3x^2-2}{x+x^2-5}$ 2. $f(x)=\frac{-3x^2-2}{x+x^3-5x^2}$ 3. $f(x)=\frac{5x^3-3x^2+2}{x-5x^2}$

**G) Hallar, si existen, las ecuaciones de las rectas asíntotas a las gráficas de las funciones definidas de su dominio mayorante en los reales:**

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{5x-1}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$

d) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$ e) $f(x)=1+\frac{1}{x}$ f) $f(x)=\frac{4x^2+1}{x-1}$

<u>Resolución de a)</u>

Como $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ está definida $\forall x,\ x\in\Re$ el dominio de la función es el conjunto de los números reales, lo que nos indica que la función no presenta asíntotas verticales.

Para saber si tiene asíntotas horizontales se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$.

En nuestro caso $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}}=0$. Luego y = 0 es A.H.

<u>Resolución de f)</u>

Como $f(x)=\frac{4x^2+1}{x-1}$ no está definida para x = 1 el dominio de la función es $D_f=\Re-\{1\}$ lo que nos indica que es una probable asíntota vertical. Para asegurarnos de que realmente lo sea hay que comprobar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\overbrace{4x^2+1}^{\to 5}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}=\infty$. Por lo tanto x = 1 es A.V.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overbrace{4x^2+1}^{\to\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to\infty}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}_{\to 0}} = \infty$ podemos asegurar que la función no presenta A.H.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Para ello hacemos lo siguiente:

Hacemos la división entre polinomios $(4x^2 + 1) \ / \ (x - 1)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
4x^2 & +\ 0x & +\ 1 & x-1 \\
\cline{4-4}
-\ 4x^2 & +\ 4x & & 4x+4 \\
\cline{1-2}
0 & +\ 4x & +\ 1 & \\
 & -\ 4x & +\ 4 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & +\ 5 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
D(x) & d(x) \\
\cline{2-2}
r(x) & C(x)
\end{array}
$$

Como $D(x) = C(x) \,.\, d(x) + r(x)$ entonces $\dfrac{D(x)}{d(x)} = \dfrac{C(x).d(x)}{d(x)} + \dfrac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow$

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow \frac{4x^2+1}{x-1} = (4x+4) + \frac{5}{x-1}$$

Por lo tanto: $y = 4x + 4$ es la A.O.

**Nota: Este procedimiento se puede aplicar solamente cuando se trata de funciones racionales, en cuyo caso aseguramos que si el cociente obtenido es una expresión del tipo "mx+b" y además el resto es *no nulo* entonces esa expresión lineal obtenida es la ecuación de la asíntota oblicua. Para que el cociente sea lineal es condición necesaria, que el grado del polinomio numerador exceda en una unidad al grado del polinomio denominador.**

# Colegio Nacional de Buenos Aires

**Guía de Trabajos Prácticos de Matemática**

# TRABAJO PRÁCTICO Nº2: CONTINUIDAD

1) Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Clasificar las discontinuidades y graficar las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & -2 < x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ x^2+1 & -1 < x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ en $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $x_1 = 1$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ en $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$

2) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan, clasificarlas y graficarlas.

$a)\ f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 2 \\ 2 & si\ x < 2 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} 3+x & si\ x \leq 1 \\ 3-x & si\ x > 1 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$

$d)\ f(x) = \begin{cases} -4 & si\ x < -2 \\ \dfrac{8}{x-2} & si -2 < x < 6 \\ 2x-10 & si\ x > 6 \end{cases}$

3) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan, clasificarlas:

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x-4}{(x+3).(x^2-16)}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-3x}$

e) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

4) ¿Es posible definir $f(1)$ para que $f(x) = \dfrac{x\,.(x-1)}{x^2-1}$ sea continua en $x = 1$?

5) Definir, si es posible, $f(2)$ para que $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ sea continua en $x = 2$.

6) Hallar $k$ para que la función $h$ sea continua en $x = 4$.

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2-5x+4\right)}{x-4} & x \neq 4 \\ k & x = 4 \end{cases}$$

7) Hallar $k$ para que la función $g$ sea continua en $x = k$.

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2+k & x > k \\ -x^2-3k-1 & x \leq k \end{cases}$$

8) Hallar $k$ para que la función $g$ sea continua en $x = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(kx)}{x} & si\ x \neq 0 \\ -k^2+2 & si\ x = 0 \end{cases}$$

9) Hallar $k$ para que la función "$f$" sea continua en $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{tg(x^3+2x-3)}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ k^2+4k & si\ x = 1 \end{cases}$$

10) ¿Qué valores de "$a$" y de "$b$" hacen que "$f$" sea continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 1 \\ ax+b & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ 3x & si\ x > 2 \end{cases}$$

11) Hallar, si existe, los valores de "$a$" y de "$b$" para que "$f$" sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & si\ x \leq -1 \\ \dfrac{4}{5-x^2} & si - 1 < x < 1 \\ -3ax+2b & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

12) Sea la función "$f$", definida por la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + a & si\ x \leq -1 \\ -x + b & si - 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{a}{x} - c & si\ x > 2 \end{cases}$$

Hallar los valores de $a$, $b$ y $c$ tal que $f$ resulte continua en todo el campo real y la recta $y = -3$ sea asíntota para $x \to +\infty$.

# Colegio Nacional de Buenos Aires

**Guía de Trabajos Prácticos de Matemática**

# TRABAJO PRÁCTICO Nº3: DERIVADAS

A) Hallar las derivadas en los puntos indicados aplicando la definición.

1) $y = x^3 - 2x + 3$ en $x_0 = 1$
2) $y = 2x^4 - x$ en $x_0 = -2$
3) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$
4) $y = \frac{1}{x}$ en $x_0 = -1$
5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $x_0 = 1$
6) $y = \frac{1}{x-2}$ en $x_0 = 2$

B) Hallar las funciones derivadas aplicando la definición de derivada.

1) $y = x^3 + x$
2) $y = 2x^2 + 3x - 4$
3) $y = \frac{1}{x}$
4) $y = \sqrt{x}$
5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

C) Hallar las funciones derivadas aplicando las reglas de derivación.

1) $y = x^5 - 3x^3 + 8$
2) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$
3) $y = \frac{x^4}{a} + \frac{x^2}{b} + x$
4) $y = ax^3 - \frac{x}{b} + c$
5) $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$
6) $y = x \cdot lnx$
7) $f(t) = (2t - 1)(t^2 - 6t + 3)$
8) $y = x(3x + 2)(2x + 3)$
9) $y = \frac{2x^4}{4 - x^2}$
10) $y = \frac{5 - x}{5 + x}$
11) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$
12) $f(t) = \frac{t^3 + 1}{t^2 - t - 2}$
13) $y = sen\, x . cos\, x$
14) $y = \frac{sen\, x}{1 + cos\, x}$
15) $y = \frac{e^x}{tg\ x}$
16) $y = (x^2 + 4)^5$
17) $y = \sqrt{x^2 + 9}$
18) $y = (3 + x).\sqrt{3 - x}$
19) $y = \sqrt{x^3 - x}$
20) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$
21) $y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$
22) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$
23) $y = ln \frac{1 + x}{1 - x}$
24) $y = e^{4x+1}$
25) $y = 7^{x^2 + 3x + 2}$
26) $y = e^{\sqrt{x}}$
27) $y = e^{x^2} .ln\, x^2$
28) $y = sen^2 x$
29) $y = sen(x + a) cos(x + a)$
30) $y = sen\ ln\, x$
31) $y = ln\ tg\, x$
32) $y = ln\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
33) $y = sen^3(2x) + tg(ln(x))$
34) $y = cos^2 \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$
35) $f(t) = (t.\ cotg\ t)^2$
36) $y = x^x$
37) $y = \frac{1}{2} tg^2 x + ln\ cos\, x$
38) $y = x^{sen\ x} + x$
39) $y = \frac{x^{2x} - x^3}{x^2}$
40) $y = \sqrt{x + 1} - ln(1 + \sqrt{x + 1})$
41) $y = ln(sec\, x + tg\, x)$
42) $y = ln\left(ln\left(ln(x)\right)\right)$

D) Indicar en qué puntos las siguientes funciones no son derivables.

1) $f(x) = \sqrt[3]{25 - x^2}$
2) $f(x) = 4 - \sqrt[5]{2 + x}$

3) $f(x) = (x-1)^{1/5}$ 4) $f(x) = x^{1/3} + 1$

E) Hallar $k$ para que $f(2) = f'(2)$ si $f(x) = \dfrac{kx+2}{3x-1}$

F) a) Demostrar que la función $y = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero que allí, no es derivable. Extraer conclusiones al respecto.

b) Analizar si la función definida por la fórmula $y = \sqrt[3]{x}$ es derivable en $x_0 = 0$.

G) Dada $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2$, calcular:

1) pendiente de la recta tangente si $x_0 = 1$.
2) puntos donde $\alpha = 45°$.
3) puntos donde la recta tangente es paralela a la recta $6x - 2y = 6$.
4) punto donde la recta tangente es perpendicular a la recta $x - y = 3$.

**Problemas resueltos:**

1) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

**Resolución**: Siendo $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(1) = \sqrt{2 - \frac{1}{1}} = 1$

Dado que $f'(x) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{2-\frac{1}{x}}}$

Si la evaluamos en $x_0 = 1$, sabemos el valor de la pendiente de la recta tangente. De esta forma, resulta:

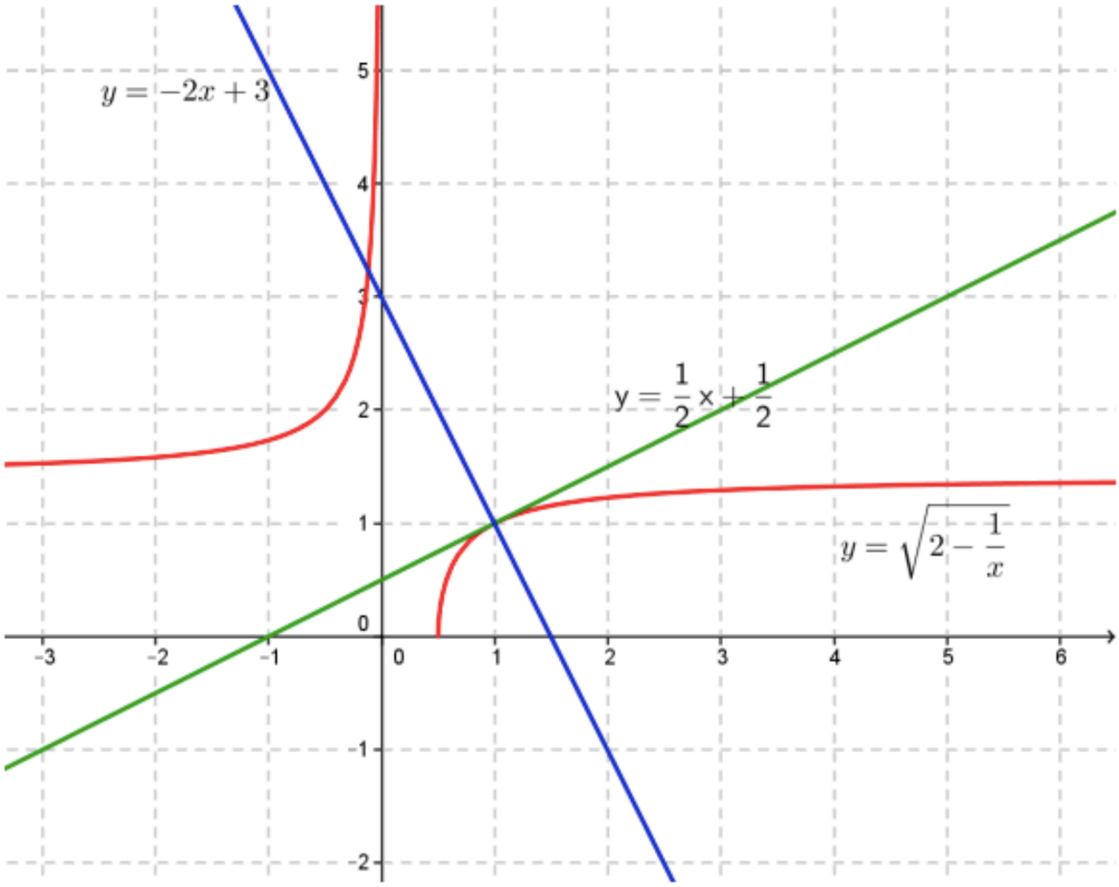
$$f'(1) = \frac{1}{2.1^2\sqrt{2 - \frac{1}{1}}} = \frac{1}{2}$$

Así tenemos que

Recta tangente: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow r_t\colon y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Recta normal: $y - 1 = -2(x-1) \Rightarrow r_n\colon y = -2x + 3$

Vamos a graficar la situación aunque el enunciado no lo indique




2) Hallar, si existen, las coordenadas “x” e “y” de los puntos sobre la curva definida por la fórmula $f(x) = \frac{5x-1}{2-x}$ donde la recta tangente forma un ángulo de 45º con el eje x.

**Resolución:** Como el problema nos pide que la recta tangente forma un ángulo de 45º con el eje x, se debe cumplir que la función derivada se iguale a la pendiente de la misma. Siendo $m = tg(45°) = 1$. Pediremos entonces como condición que: $f'_{(x)} = 1$.

Luego: $f'(x) = \frac{5(2-x)-(5x-1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{10-5x+5x-1}{(2-x)^2} = \frac{9}{(2-x)^2}$

Igualando a “1” tenemos que:

$$\frac{9}{(2-x)^2} = 1 \Rightarrow (2-x)^2 = 9 \Rightarrow |2-x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2-x = 3 \Rightarrow x = -1 \\ 2-x = -3 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Sabidos los valores de abscisa podemos calcular las ordenadas:

Siendo: $x = -1 \Rightarrow y = f_{(-1)} = \frac{5.(-1)-1}{2-(-1)} = -2$. De donde uno de los puntos es el $P_0 = (-1;-2)$. En forma idéntica, siendo $x = 5 \Rightarrow y = f_{(5)} = \frac{25-1}{2-5} = -8$ y el otro punto es el $P_1 = (5;-8)$

H) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a:

1) $y = x^2 + 1$ en $x_0 = 1$. Graficar. 2) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$. Graficar.

3) $y = -x^2 + 4x - 3$ en $x_0 = 0$. Graficar. 4) $y = 3x^2 + \frac{1}{x}$ en $x_0 = -1$

5) $y = \frac{1}{2-x}$ en $x_0 = 1$

I) Indicar puntos donde la recta tangente es horizontal si:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ 2) $f(x) = \frac{x}{9-x}$

3) $f(x) = e^{x^2+1}$ 4) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$

J) ¿En qué puntos la curva $f(x) = x^3 + 4x + 1$ tiene una recta normal cuya pendiente es $-1/7$?

K) ¿En qué puntos la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3$ es:

1) paralela a la recta $12x - y = 5$?
2) perpendicular a la recta $x + 3y - 1 = 0$?

L) La función cuya fórmula está dada por la expresión $f(x) = \frac{ax+2}{x-1}$ posee en el punto de abscisa $x_0 = 2$ una recta tangente cuya ecuación es $y = 3x + b$. Hallar, si existen, cuánto deben valer "$a$" y "$b$"

M) ¿En qué punto/s de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ la recta tangente corta al eje de abscisas en $x_0=3$?

**Problemas resueltos:**

1) Se pide, para las siguientes funciones, determinar:
   a) Dominio: $\Re$ porque es una función polinómica.
   b) Asíntotas no tiene porque es polinómica.
   c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos.

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3$$

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 \Rightarrow -15x^4 + 15x^2 = 0 \Rightarrow -15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -15x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ó} \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \end{cases}$$

Entonces:

| $x$ | (-∞;-1) | -1 | (-1;0) | 0 | (0; 1) | 1 | (1;+∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ( - ) ↘ | Mín | ( + ) ↗ | P.I. | ( + ) ↗ | Máx | ( - ) ↘ |

Máximos y mínimos relativos:

$\text{Mín} = (-1; -2)$ $\qquad\qquad$ $\text{Máx} = (1; 2)$

Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -60x^3 + 30x \Rightarrow -60x^3 + 30x = 0 \Rightarrow -30\,x\,(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -30x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ó} \\ 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

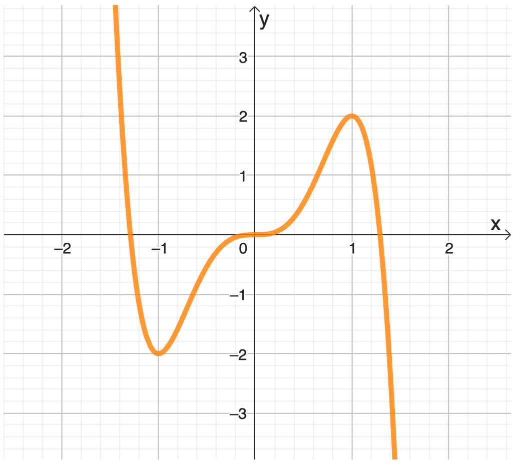
Entonces:

| $x$ | $(-\infty;-\sqrt{\frac{1}{2}})$ | $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ | $(-\sqrt{\frac{1}{2}};0)$ | 0 | $(0;\sqrt{\frac{1}{2}})$ | $\sqrt{\frac{1}{2}}$ | $(\sqrt{\frac{1}{2}};+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ( + ) $\cup$ | P.I. | ( - ) $\cap$ | P.I. | ( + ) $\cup$ | P.I. | ( - ) $\cap$ |

Puntos de inflexión:

$PI_1 = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,; -\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $\qquad$ $PI_2 = (0\,;0)$ $\qquad$ $PI_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,; \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

Gráfico:




$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

a) Dominio: $D = \Re$.

b) Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales porque el dominio es $D = \Re$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x}^{\infty}}{\underbrace{1+x^2}_{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+1} = 0 \Rightarrow y = 0$$ es la ecuación de la asíntota horizontal con lo que, no hay A.O.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - x\;.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Entonces:

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | -1 | $(-1;1)$ | 1 | $(1;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ( - ) | Mín. | ( + ) | Máx. | ( - ) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ↘ | | ↗ | | ↘ |

Máximos y mínimos relativos: $\text{Mín}=\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ $\text{Máx}=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{-2x.(1+x^2)^2-(-x^2+1).2.(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(1+x^2).\left[-(1+x^2)-2(-x^2+1)\right]}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x\left[-x^2-1+2x^2-2\right]}{(1+x^2)^3}=\frac{x\left[x^2-3\right]}{(1+x^2)^3}\Rightarrow\frac{x\left[x^2-3\right]}{(1+x^2)^3}=0\Rightarrow x=0\ \vee\ x=\pm\sqrt{3}$$

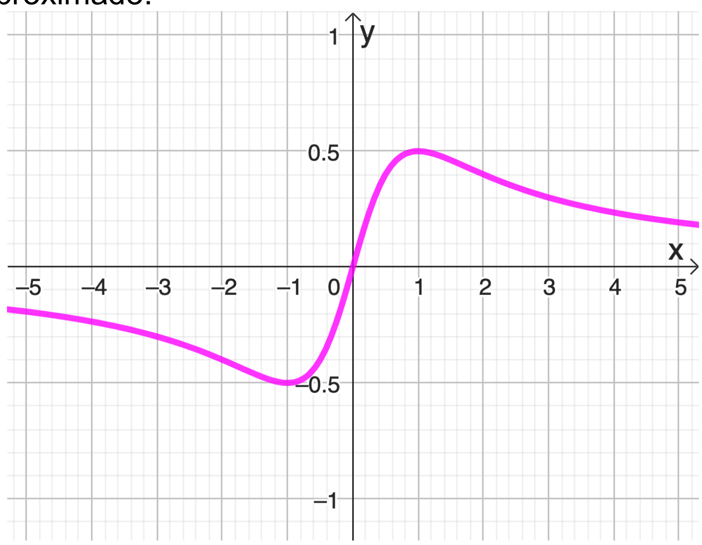
Entonces:

| $x$ | $(-\infty; -\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3};0)$ | 0 | $(0; \sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3};+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ( - ) | P.I. | ( + ) | | ( - ) | P.I. | ( + ) |
| | $\cap$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |

Puntos de inflexión:

$PI_1=\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $PI_2=(0;0)$ $PI_3=\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Gráfico aproximado:




$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$$

a) Dominio: $D=\Re-\{2\}$.

b) Asíntotas:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-2x+4}^{\to 4}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}}=\infty\Rightarrow x=2$$ es la ecuación de la asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^2-2x+4}^{\infty}}{\underbrace{x-2}_{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}=\infty$$

Entonces, no existe asíntota horizontal.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Para ello hacemos la división $(x^2-2x+4)$ / $(x-2)$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -2x & +4 & x-2 \\ \hline -x^2 & +2x & & x \\ \hline 0 & 0 & +4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \hline r(x) & C(x) \end{array}$$

Como $D(x) = C(x) \,.\, d(x) + r(x)$ entonces $\frac{D(x)}{d(x)}=\frac{C(x).d(x)}{d(x)}+\frac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow$

$\frac{D(x)}{d(x)}=C(x)+\frac{r(x)}{d(x)}\Rightarrow\frac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\frac{4}{x-2}$. Como el resto es $r\neq 0$ entonces el cociente $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4).1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x=0\vee x=4$$

Entonces:

| $x$ | (-∞ ; 0) | 0 | (0 ; 2) | 2 | (2 ; 4) | 4 | (4 ;+∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ( + ) ↗ | Máx | ( - ) ↘ | A.V | ( - ) ↘ | Mín | ( + ) ↗ |

Máximos y mínimos relativos:

$$\text{Máx}=(0\,;-2)\qquad\qquad \text{Mín}=(4\,;6)$$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{(2x-4).(x-2)^2-(x^2-4x).2.(x-2).1}{(x-2)^4}=\frac{2(x-2).\left[(x-2)(x-2)-(x^2-4x)\right]}{(x-2)^4}$$

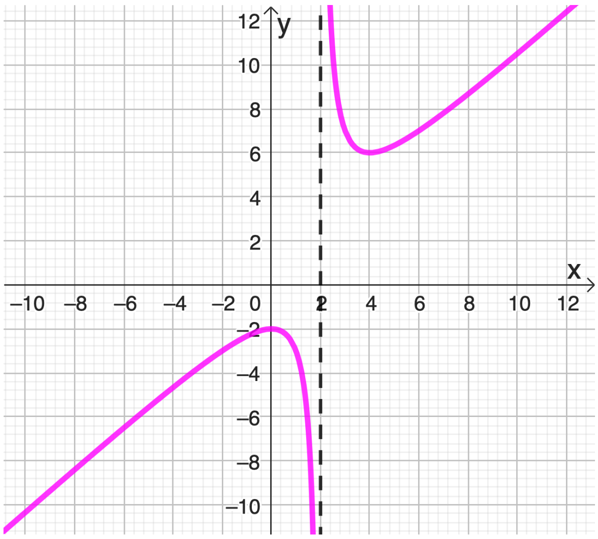
$$f''(x)=\frac{2\left[x^2-4x+4-x^2+4x\right]}{(x-2)^3}=\frac{8}{(x-2)^3}\Rightarrow\frac{8}{(x-2)^3}=0\Rightarrow 8=0 \quad \text{absurdo:}$$

Por lo tanto no existen puntos donde se anule la derivada segunda

Entonces:

| x | (-∞ ; -2) | 2 | (2 ; +∞) |
|---|---|---|---|
| f ’(x) | ( + ) | | ( - ) |
| | ∩ | A. V | ∪ |

Puntos de inflexión: No tiene, pero cambia la concavidad a izquierda y derecha de x=2. Gráfico:




N) Obtener intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones

1) $f(x) = x^2 - 4x - 1$ 2) $f(x) = x^3 - x^2 - x$ 3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

4) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 6) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

O) Hallar $k \in \Re$ / $f(x) = \dfrac{kx-1}{x-k}$ sea creciente.

P) Demostrar que la función definida por la expresión, $f(x) = x \cdot e^{bx}$ $(b \neq 0)$ siempre posee un extremo relativo en $x_0 = -\frac{1}{b}$

**Ejemplo:** La función cuya fórmula está dada por la expresión $f(x) = \frac{x^2+kx+1}{x^2-2x}$ posee un extremo en $x_0 = 1$. Hallar, si existe, el valor que debe tomar el número “$k$” y acorde con el resultado logrado calcular las coordenadas de todos sus extremos relativos clasificándolos en máximos y mínimos. **Resolución** Como sabemos que, la función en $x_0 = 1$ presenta un extremo, allí la derivada debe ser nula. Derivando tenemos que:

$$f(x)=\frac{x^2+kx+1}{x^2-2x}\Longrightarrow f'(x)=\frac{(2x+k)(x^2-2x)-(x^2+kx+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

Como

$$f'(1)=0\Longrightarrow\ f'(1)=\frac{(2+k)(1-2)-(1+k+1)(2-2)}{(1-2)^2}=-2-k$$

Igualando a cero tenemos que: $-2-k=0\ \Longrightarrow k=-2$

Sabiendo el valor de " $k$ " resultan ser:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x}$$

Y también:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x)-(x^2-2x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

Si en esta última expresión operamos algebraicamente resulta:

$$f'(x)=\frac{-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

Para calcular sus extremos, debemos saber en qué puntos se anula su derivada.

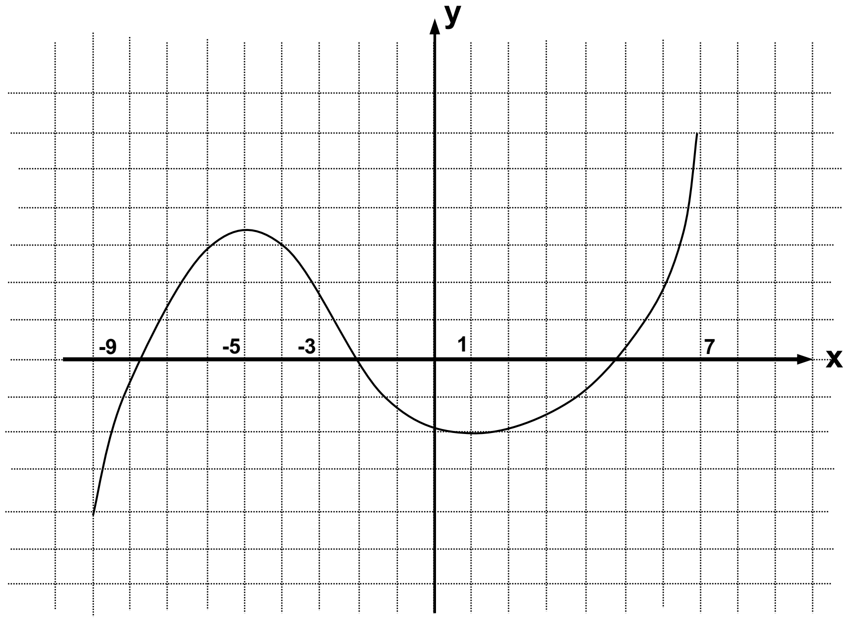
$$f'(x)=\frac{-2x+2}{(x^2-2x)^2}=0\Longrightarrow -2x+2=0\Longrightarrow x=1$$

Luego, su único extremo se alcanza en $x=1$
Analizando el crecimiento de la función y que el dominio de la misma es:
$Domf=\mathbb{R}-\{0;2\}$

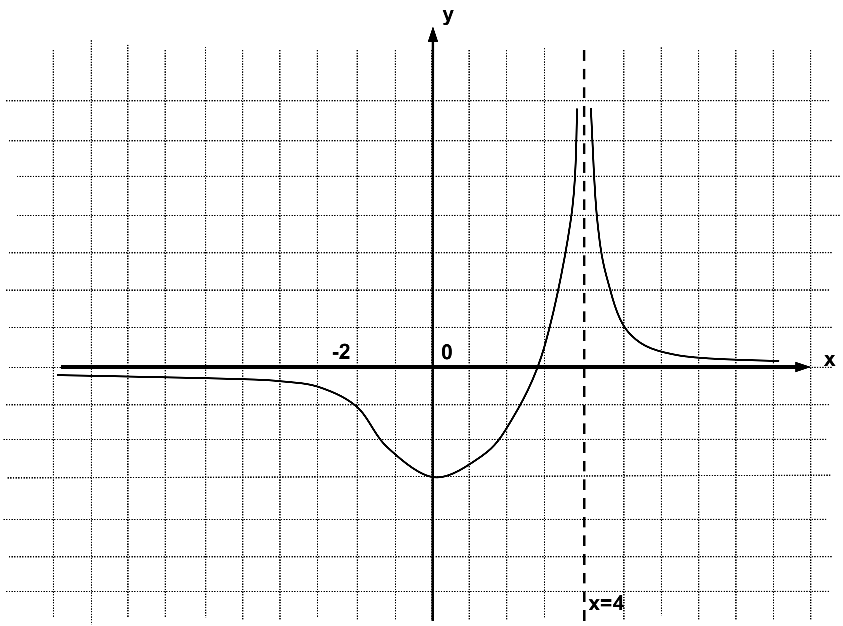
| x | (-∞; 0) | 0 | (0 ; 1) | 1 | (1 ; 2) | 2 | (2 ; +∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | ( + ) | A.V. | ( + ) | Máx. | ( - ) | A.V. | ( + ) |
| | ↗ | | ↗ | | ↘ | | ↘ |

El máximo es el punto $(1;0)$.

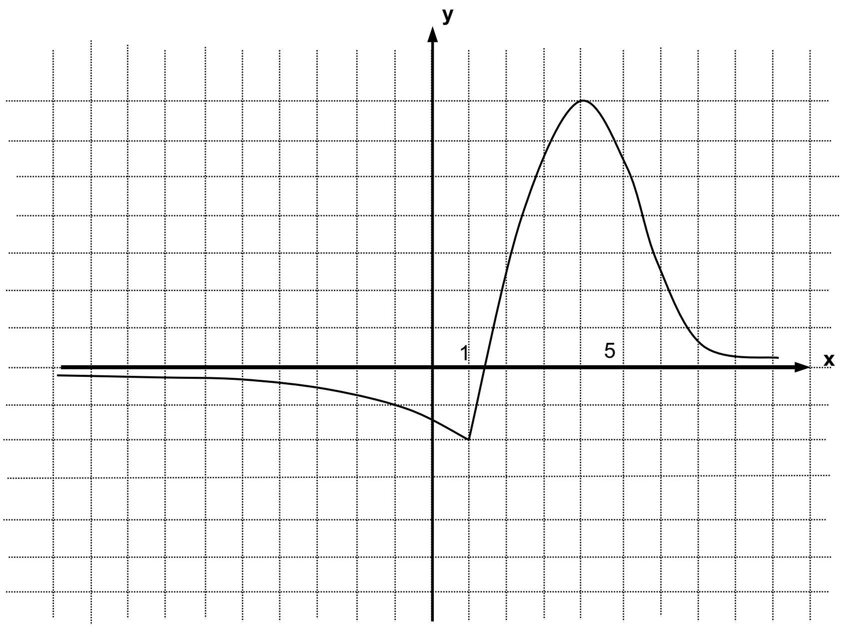
Q) 1) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función polinómica en el intervalo $[-9;7]$. Se sabe que en $x=-5$ y en $x=1$ presenta extremos relativos. Asimismo, en $x=-3$ podemos encontrar un punto de inflexión. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.




2) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función que presenta una asíntota vertical en $x=4$ y una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to \pm\infty$. Se sabe que en $x=0$ presenta un mínimo. Asimismo, en $x=-2$ podemos encontrar un punto de inflexión Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



3) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función continua. La misma, que además de poseer una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to \pm\infty$, en $x=1$ no es derivable y posee un punto de inflexión en $x=5$. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.




R) Analizando la existencia de rectas asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión realizar las gráficas de las funciones cuyas fórmulas son:

a) $f(x)=2x^3-3x^2+1$

b) $f(x)=-x^4+2x^2+2$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

**Guía de Trabajos Prácticos de Matemática**

**APLICACIONES DE DERIVADAS**

*A) Resolver aplicando la regla de L'Hopital* (optativo)

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln\, x}{x - 1}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x}$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \,.\, sen\, x}{tg\, x}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln\,(2x-1)}{sen\,(x-1)}$ 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,(ax)}{b\, x}$ 7) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 5x - 2}$

8) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{sen^2\, x + sen\, x - 2}{sen^2\, x - 4\, sen\, x + 3}$ 9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^3 + 2x^2 + 6x}{x^2 - 2x}$ 10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 .\, cos\, x}{4\, sen\, x}$

11) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{ln\, sen\, x}{(\pi - 2x)^3}$ 12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + sen\,\ x - 1}{ln\,(1+x)}$ 13) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln\, cos\,(x-1)}{1 - sen\, \frac{\pi}{2} x}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - x}{x^3}$ 15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - sen^2\, x}{x^2 .\, sen^2\, x}$ 16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,\ x - x}{x - sen\,\ x}$

17) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{sec^2 x - 2\, tg\, x}{1 + cos\,(4x)}$

*B) Problemas de máximos y mínimos*

1) Hallar, si existen, dos números enteros positivos si se sabe que cumplen la condición de sumar 20 y además el cubo de uno de ellos sumado al triple del otro resulta:

i) Máxima. ii) Mínima

2) Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y además:

i) Su producto sea el máximo.
ii) La suma de sus cuadrados sea mínima.
iii) El producto entre el cuadrado de uno de ellos y el cubo del otro sea máximo

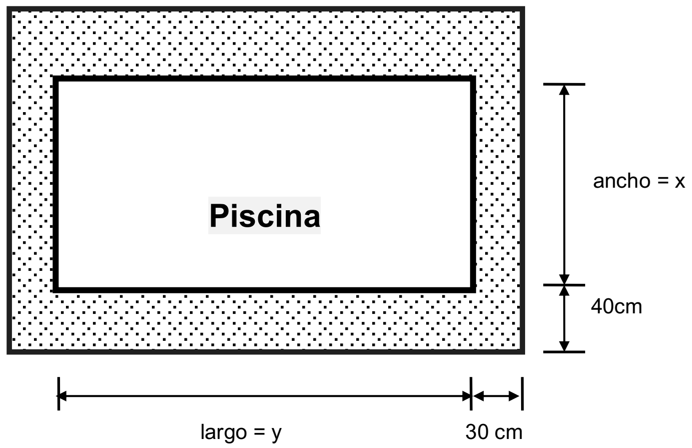
3) Dividir un número positivo ***a*** en dos sumandos tales que su producto sea máximo.

4) Un lote rectangular de 800m$^2$ tiene un lado sobre un río. Hallar las dimensiones del lote para que la longitud de la cerca sea mínima.

5) Con una hoja de cartón cuadrada de lado 72 cm es preciso hacer una caja rectangular abierta que tenga la mayor capacidad posible. Se recortan cuadrados de los ángulos de la hoja y se dobla ésta para formar la caja. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

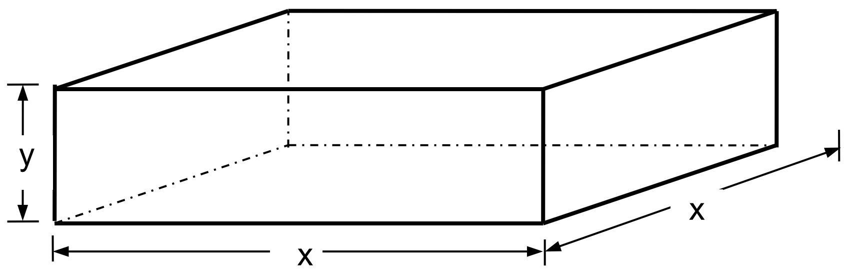
6) ¿Para qué número se verifica que es máximo el producto entre un número y el anterior?

7) Se desea construir una piscina de forma rectangular y área 12m$^2$ . Estará rodeada por un camino embaldosado de 30 cm. de ancho sobre los dos lados menores y de 40 cm. sobre los otros dos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la misma a los efectos de que el área del terreno empleado sea máxima?

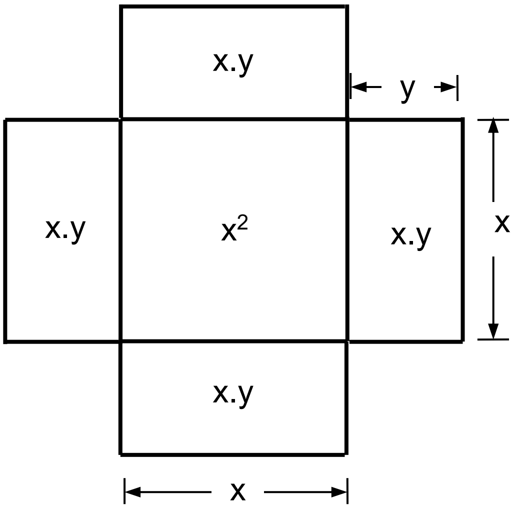



**Problema resuelto:**

Se desea construir un depósito con forma de prisma **de base cuadrada** sin tapa como el indicado en la figura. El mismo, Debe tener 125 m$^3$ de capacidad. Si el costo de las *caras laterales* es de \$2 el m$^2$ y el del *fondo* es de \$4 el m$^2$ ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo? ¿Cuál será ese costo mínimo?



**Resolución:** Supongamos que el depósito se encuentra desarmado como mostramos a continuación.




El volumen viene dado por la expresión: $V = x^2.y$. Como es condición necesaria que el mismo sea de 125 m$^3$ debe pasar que $x^2.y = 125 \Rightarrow y = \frac{125}{x^2}$

Como queremos minimizar los costos debe tener área mínima y así utilizar la menor cantidad posible de material. La expresión de la misma viene dada por:

$$C_T = \underbrace{\left[x^2\right]}_{\text{Área del fondo}} . \underbrace{(4)}_{\text{Costo del fondo}} + \underbrace{\left[4.x.y\right]}_{\text{Área caras laterales}} . \underbrace{(2)}_{\text{Costo de caras laterales}} = 4.x^2 + 8.x.y$$

Reemplazando por la relación entra variables resulta:

$$C_T = 4x^2 + 8.x.\frac{125}{x^2} = 4x^2 + \frac{1000}{x}$$

Derivando: $$C'_T = 8x + \frac{0.x - 1000.1}{x^2} = 8x - \frac{1000}{x^2}$$

Para lograr un mínimo es preciso que la derivada se anule:

$$8x - \frac{1000}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x = \frac{1000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ m}$$

Como $x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{125}{5^2} \quad \Rightarrow \quad y = 5$

Ahora debemos demostrar que se trata de un mínimo y para ello usamos el criterio de la derivada segunda. La misma, evaluada en $x = 5$ que resulta:

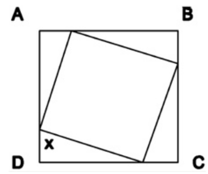
$$C''_T = 8 - \frac{0.1000 - 1000.2x}{x^4} = 2 - \frac{-2000.x}{x^4} = 2 + \frac{2000}{x^3} \Rightarrow C''_T(5) = 2 + \frac{2000}{5^3} > 0$$

Como ello nos da un resultado positivo, estamos en condiciones de garantizar que esas dimensiones $x = 5 \quad \wedge \quad y = 5$ hacen que el costo del depósito sea mínimo.

Para saber el valor del costo mínimo basta reemplazar esos valores en la función de costos.

Así resulta: $C_{mín} = 4.x^2 + 8.x.y = 4.(5)^2 + 8.(5).(5) = 300$ \$

8) Determinar *x* de tal manera que el cuadrado inscripto sea de área mínima, si el lado del cuadrado ABCD es de 10 m.

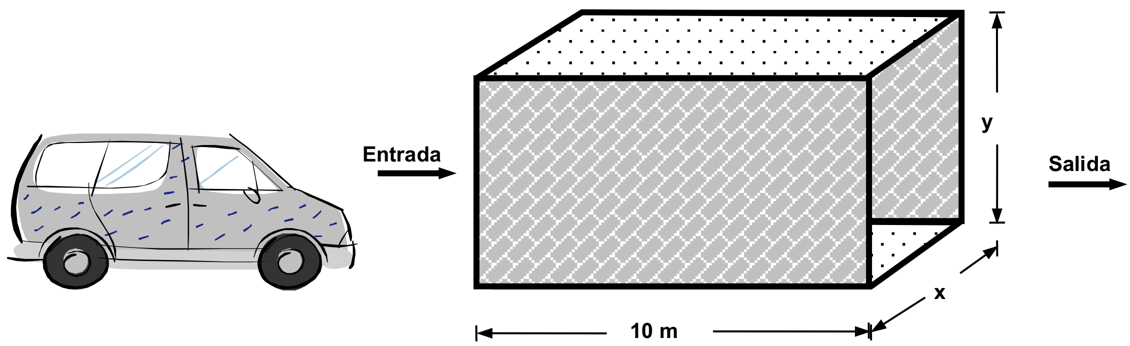



9) Se dispone de 36 mts. de cerca para encerrar un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que sea de superficie máxima?

10) Un hombre desea cercar un campo rectangular y luego subdividirlo en 3 parcelas rectangulares iguales colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. Si dispone de 1.000 mts. de cerca, ¿qué dimensiones le darán el área máxima?

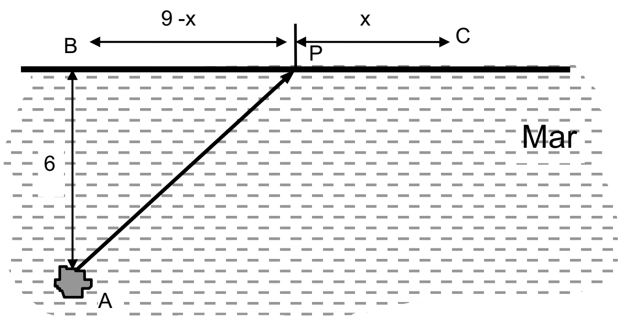
11) Determinar las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica **<u>sin tapa</u>** de 64 $cm^3$ de volumen para almacenar para que resulte lo más económica posible. (Nota: Aproximar $\pi = 3{,}14$ )

12) Se desea construir un túnel para lavado de camionetas con un acceso abierto para la “Entrada” y otro para la “Salida”. La forma debe ser de prisma recto como se indica en la figura. Las paredes deben estar azulejadas y tanto el piso como el techo deben ser de hormigón. Los materiales necesarios cotizan a razón de 8$/$m^2$ para el azulejo y $5/$m^2$ para el hormigón. Si por ordenanzas municipales se le impone como condición es que posea un volumen de 400 $m^3$ ¿Qué dimensiones (ancho y alto) hacen que el costo sea mínimo posible? ¿Cuál es ese costo mínimo?




13) Una isla está ubicada en el punto A, 6 Km mar adentro del punto más cercano B en una playa recta como se indica en la figura. Una persona que se encuentra en la isla desea ir hacia un punto C, 9 Km playa abajo de B.

El arrendar un bote cuesta \$15 cada Km recorrido y el alquiler de un auto con chofer \$12 cada Km. ¿Cómo se debe hacer el trayecto para que resulte lo más económico posible?




14) Obtener $a$ y $b$ de manera tal que $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en (2;3).

15) Obtener $a$, $b$ y $c$ de manera tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo de 7 en $x_0$=1 y que la gráfica de $f(x)$ pase por (2;–2).

16) Dada $f(x) = ax^3 + bx^2$ hallar $a$ y $b$ para que tenga un P.I. en (1;2).

17) Demostrar que una función cúbica cuya ecuación es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a$, $b$, $c$ y $d \neq 0$, tiene un solo punto de inflexión.

18) La función $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ presenta un máximo relativo en (–1;6). Hallar $a$ y $b$ y determinar si existe algún otro extremo relativo.

19) Demostrar que $\forall a > 0$, $f(x) = ln\,(ax^3 + x)$ no tiene extremos relativos.

20) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de un triángulo isósceles de área máxima tal que uno de los vértices es el origen de coordenadas y los otros dos son dos puntos simétricos de la parábola $y = 36 - x^2$ tal que $-6 \leq x \leq 6$? Justifique su respuesta.

21) Se necesita construir una caja sin tapa, de base cuadrada de 500 $cm^3$ de capacidad. ¿qué dimensiones debe tener para utilizar la menor cantidad de material?

22) Determine las dimensiones de un rectángulo de área 169 cm2 que tengan la diagonal de menor longitud.

23) La lata de una gaseosa tiene una capacidad de 354 cm3. Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

24) Un alambre de 1m de largo se corta en dos partes, la primera se dobla en forma de una circunferencia y la segunda en forma de un cuadrado. ¿Cómo

debería cortarse para que la suma de las áreas del círculo y el cuadrado sea máxima?

25) De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

26) Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

27) Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

# Colegio Nacional de Buenos Aires

**Guía de Trabajos Prácticos de Matemática**

# TRABAJO PRÁCTICO Nº4: INTEGRALES

## Integral indefinida

### *Integrales Inmediatas*

1. $\int (1+x)\,.\,dx$  2. $\int \left(1-\sqrt{x}\right)^2 .\,dx$  3. $\int (2+x)^2\,.\,dx$  4. $\int x\,.\sqrt{x}\,.\,dx$

5. $\int \frac{1-x^5}{1-x}dx$  6. $\int \left(4\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right).dx$  7. $\int \frac{3}{x^3}dx$  8. $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}\,.\,dx$

9. $\int tg^2 x\,.\,dx$  10. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{x}}\,.\,dx$ con $a \geq 0$

11.

a) $\int x^3.dx$  b) $\int \sqrt[3]{y}.dy$  c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$  d) $\int \frac{dx}{x.\sqrt{x}}$

e) $\int (r^4-3r^3+5r^2).dr$  f) $\int (1-2x).(1+3x).dx$  g) $\int \left(t^2-\frac{1}{t^2}\right).dt$  h) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).dx$

i) $\int \frac{2x+3}{x}.dx$  j) $\int \frac{(x+2)^2}{x}.dx$

### *Integración por Sustitución*

1. $\int (1-3x)^5.\,dx$  2. $\int \frac{x-3}{x^2-6x+4}.dx$  3. $\int x.\sqrt{x^2+1}\,.\,dx$  4. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}.dx$

5. $\int e^{3x}\,.\,dx$  6. $\int 4^{2-3x}\,.\,dx$  7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,.\,dx$  8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,.\,dx$

9. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,.\,dx$  10. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$  11. $\int \sqrt[3]{x^2+x}\,.\,(2x+1).\,dx$

12. $\int (\ln x)^{-2}\,.\,\frac{dx}{x}$  13. $\int \frac{dx}{x.(\ln 2x)^3}$  14. $\int \cos^3(2x).\,sen\,(2x)\;dx$

15. $\int \frac{4}{1+x}dx$  16. $\int tg^5 x\,.\,sec^2 x.dx$  17. $\int \cos x\,.\,sen^3 x.dx$

18. $\int \frac{2x}{1+x^2}\,.\,dx$

19. $\int \frac{e^x.sen\,e^x}{\cos e^x}\,.\,dx$  20. $\int \frac{x^2}{2+2x^3}\,.\,dx$  21. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,.\,dx$

22. $\int -3\cos^5 x\,.\,sen\,x.dx$  23. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,.\,dx$

24. $\int \frac{x-3}{x^2-6x+4}\,dx$ 25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,.dx$ 26. $\int \sqrt[3]{\left(x^2+x\right)^2}\,.(2x+1).\,dx$

27. $\int \frac{ln(x+2).dx}{x+2}$

***Integración por partes***

1. $\int x.e^x dx$ 2. $\int x.sen\,x\,dx$ 3. $\int x.cos\,x\,dx$ 4. $\int ln\,x\,.\,dx$

5. $\int x^2.ln\,x\,.\,dx$ 6. $\int arc\,tg\,x\,.\,dx$ 7. $\int x^2.e^x dx$ 8. $\int e^x.sen\,x\,dx$

**Integral definida**

A) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de las siguientes funciones y el eje $x$

1) $y = x^2$ $0 \le x \le 1$ 2) $y = x^3$ $0 \le x \le 2$ 3) $y = sen\ x$ $0 \le x \le \pi$
4) $y = -x^2 + 4$
5) $y = x + 2$ $1 \le x \le 3$ 6) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ 7) $y = x^3 - 3x^2 - 18x$

B) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de dos o más funciones

1) $\begin{cases} y = x+2 \\ y = x^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = sen\,x \\ y = cos\,x \\ x = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ y = 0{,}5\,x^2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = 5 \\ y = -x+3 \\ x = 0{,}5x+3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = -x^2+4x \\ y = x^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y = -2x^2+8 \\ y = -x^2+4 \end{cases}$

7) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -x+2 & x \le 0 \\ -x+6 & x > 0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y = 6 \\ y = -x^2+4 \\ y = -x+2 \\ eje\ y \end{cases}$

9) La gráfica de $y = x^3$ y la de su función derivada.

10) La gráfica de la función $y = 1 + 2x - x^2$ y la recta que pasa por A= (–1; –2) y B = (2;1).

11) La gráfica de la función $2y = x^2$, su recta tangente en $x_0 = 2$ y el eje $x$.

12) La gráfica de la función $y = -x^2$, su recta tangente en $x_0 = 1$ y el eje de ordenadas.

13) La gráfica de la función $y = -x^3 + 1$, la recta normal en $x_0 = -1$ y el eje $x$.

C) Resolver los siguientes problemas

1) Dadas $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = -ax^2 + 16a + 32$ determinar $a > 0$ para que el área de la región limitada por las gráficas de $f$ y $g$ sea de 180 unidades cuadradas.

2) Hallar el área plana limitada por la gráfica de $f(x) = 2x^2 - x^4$ y la recta que pasa por ($a$; $f(a)$) y ($b$; $f(b)$) si $f(a)$ y $f(b)$ son los valores máximos de $f$.

3) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 3$ y la recta que pasa por ($a$; $f(a)$) y ($b$; $f(b)$) si $f(a)$ y $f(b)$ son los valores máximo y mínimo de $f$ .

4) La planta de un supermercado está limitada por los ejes coordenados, la gráfica de las función $y = x^3 + 1$ y $x = 1$. Graficar la planta y determinar donde debe ubicarse la góndola de lácteos si debe estar en el centro del supermercado.

5) Un jardín está limitado por las gráficas de $y = x + 1$, $x = 1$ y $x = 4$. Graficar el jardín y determinar donde debe plantarse un roble si debe estar en el centro del jardín.

6) Un polideportivo está limitado las gráficas de $y = -x^2 + 4$, y los ejes coordenados. Graficar la planta del polideportivo y determinar donde se está ubicada la cancha de paddle si está en el centro.