

# Colegio Nacional de Buenos Aires

Guía de Trabajos Prácticos de Matemática



---

# COLEGIO NACIONAL DE BUENOS AIRES

---

Guía de Trabajos Prácticos 5to año



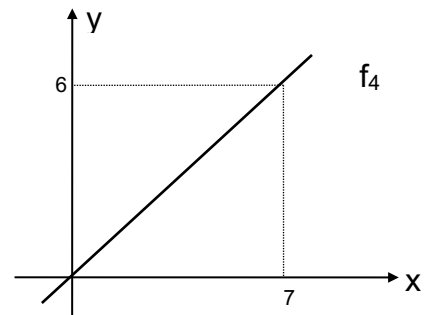
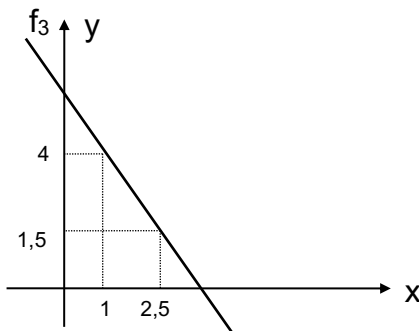
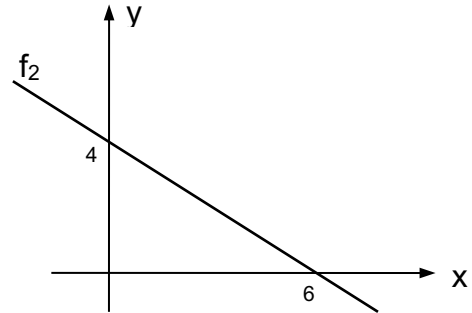
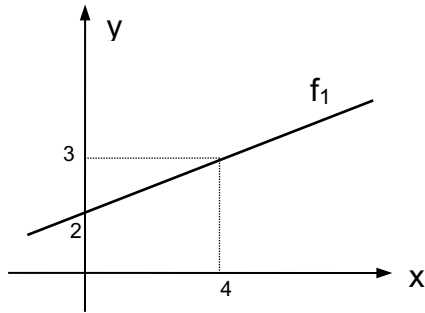
2026

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### TRABAJO PRÁCTICO N°0: FUNCIONES

- 1) Las siguientes, son cuatro gráficas correspondientes a funciones lineales de dominio real. Acorde con los datos indicados en cada caso. Hallar sus respectivas formas explícitas.



- 2) De una función lineal "f" se saben los siguientes datos: Pasa por los puntos  $A = (8; -1)$  y  $A = (10; -2)$ . A partir de ello, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones resultan verdaderas:
- Su ordenada al origen es  $b=3$  y su conjunto de ceros es  $C_0 = \{6\}$ .
  - El punto  $P_0 = (5; \frac{1}{2})$  pertenece a gráfica de la misma.
  - La recta "r" de ecuación  $y = 2x + 4$  es perpendicular a ella.
  - La expresión de la función inversa es  $f^{-1}(x) = -2x + 6$ .
  - El conjunto de positividad de f es el intervalo  $C^+ = (6; +\infty)$ .
  - La función y su inversa se interceptan en el punto  $M = (2; 2)$ .
- 3) Hallar la expresión de la función cuadrática de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple en cada caso con los requisitos pedidos:
- $V = (1; 3)$  y contiene al punto  $P_0 = (0; 2)$
  - $x_1 = 2$  ;  $x_2 = 4$  y contiene al punto  $P_0 = (3; 3)$ .
  - La suma de sus raíces es -2, su producto es -24 y pasa por  $P_0 = (0; 12)$
  - Pasa por los puntos  $A = (2; 3)$ ;  $B = (-2; -9)$ ;  $C = (0; 5)$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

e) Intercepta al eje y en el punto  $A = (0; 5)$ ; la  $x_v = 2$  y el coeficiente del término cuadrático y el lineal difieren en 1.

4) Dadas las funciones  $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - k \\ g(x) = x + 2k \end{cases}$ . Analizar, para qué valores de "k", la recta resulta secante, tangente o exterior a la parábola.

5) Sea "f" la función lineal que tiene pendiente -2 y pasa por el punto  $A = (4; 2)$  y la parábola definida por  $g(x) = (x - 3) \cdot (x - 5)$ . Representar gráficamente ambas curvas y analizar en qué intervalo o unión de intervalos se verifica que  $f(x) \geq g(x)$ .

6) Factorizar el polinomio  $P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$  y hallar sus intervalos de positividad y negatividad.

7) Hallar la expresión polinómica de grado 4 que cumple las siguientes condiciones: El conjunto de ceros es  $C_0 = \{\frac{1}{2}; -1; 1; 3\}$  y además contiene al punto;  $A = (-\frac{1}{2}; -\frac{21}{4})$ .

8) En el polinomio  $A(x) = x^4 - ax^3 + bx^2$  dos de sus raíces son  $x = 3$  y  $x = -1$ . ¿Qué valores toman a y b? ¿Cuál es su expresión factorizada?

## ÁLGEBRA DE FUNCIONES

### IGUALDAD

Dos funciones  $f: D_f \rightarrow B$  y  $g: D_g \rightarrow C$  son iguales cuando:  
 $D_f = D_g$ ;  $B = C$  y para todo  $x$ :  $f(x) = g(x)$

Por ejemplo:

Las funciones  $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x + 2$

no son iguales ya que  $D_f \neq D_g$ , sin embargo, notemos que para todo  $x \neq 2$ ,  $f(x) = g(x)$ . Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo  $g(2) = 4$

Si definimos una función  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ , resulta  $h = g$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

$$(f+g)_{(x)} = f(x)+g(x) \quad \forall x, \text{ siendo } D(f+g) = Df \cap Dg$$

$$(f \cdot g)_{(x)} = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x, \text{ siendo } D(f \cdot g) = Df \cap Dg$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x, \text{ siendo } D\left(\frac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$$

### Ejemplo:

Sean  $f(x) = \frac{1}{x-1}$   $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$  y  $g(x) = \sqrt{x}$   $D_g = \mathbb{R}_0^+$  entonces,

$$(f+g)_{(x)} = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x} \quad D_{f+g} = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$$

$$(f \cdot g)_{(x)} = \frac{1}{x-1} \cdot \sqrt{x} \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{1}{(x-1) \cdot \sqrt{x}} \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

### Ejercicios

9) Dados los siguientes pares de funciones  $f$  y  $g$  indicar para cada una dominio mayorante e imagen y hallar  $f+g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  indicando el dominio mayorante de cada una.

a)  $f(x) = x^2$   $g(x) = 2x - 1$

b)  $f(x) = x^2$   $g(x) = \sqrt{x}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$   $g(x) = 3x + 2$

d)  $f(x) = \ln(x-1)$   $g(x) = e^x$

e)  $f(x) = \sin x$   $g(x) = (x-1)^2$

10) Dadas las siguientes funciones, indicar dominio, imagen y conjunto de ceros

a)  $f(x) = x^2 + 2$     b)  $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$     c)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$     d)  $f(x) = \ln(x+1)$

11) Hallar el conjunto de ceros, conjunto positividad, negatividad y a partir de ello esbozar una gráfica de las siguientes funciones cuyas fórmulas se indican a continuación..

a)  $f(x) = (x^2 + \frac{2}{3})x$     b)  $g(x) = (x^2 - \frac{4}{9})(x^2 - \frac{1}{2})$     c)  $h(x) = (x^2 - \frac{3}{2}) \cdot (x^2 + 1)$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

12) Considere las funciones:

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$g(x) = -x + 2$$

$$h(x) = \sqrt{3-x}$$

a) Representar gráficamente  $j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / j(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{g(x)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) Determinar:

- conjunto de ceros de  $j$
- si existen valores de  $x \in \mathbf{R} / j(x) > 0$
- conjunto de negatividad
- punto de intersección con el eje  $y$ .

13) Dadas las siguientes funciones:

$$f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = \log_2(x+2)$$

$$g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R} / g(x) = \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 10x}}$$

$$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / h(x) = (x+1)^2 + 1$$

$n(x)$  función lineal tal que  $n(0)=2$  y  $n(-2)=0$

a) Hallar:

- $C = \{x \in \mathbf{R} / x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}\}$
- $D = \{x \in \mathbf{R} / 1 < f(x) < 4\}$

b) Se define  $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / k(x) = \begin{cases} h(x) - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ n(x) & \text{si } -2 < x < 0 \\ f(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Hallar conjunto de ceros, de positividad y negatividad
- Realizar un gráfico aproximado.
- A partir del gráfico obtenido definir conjunto imagen e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

14) a) Sean las funciones "f" y "g" definidas por las fórmulas dadas a

continuación:  $f(x) = \frac{5}{x+4}$  y  $g(x) = \frac{3}{x-8}$ . Se pide: Graficar ambas

funciones en un mismo sistema cartesiano de ejes. Hallar gráfica y analíticamente los puntos donde se verifica la condición  $f(x) = g(x)$ .

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

b) Dadas las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación se pide:

Definir “ $f - g$ ” y hallar su conjunto de ceros.  $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$  y  $g(x) = \frac{2x5}{x+9}$

15) Dadas  $f$  y  $g$  hallar el conjunto de todos los  $x$  /  $f(x) = g(x)$ :

a)  $f(x) = x + 2$  y  $g(x) = \sqrt{2x+7}$

b)  $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$  y  $g(x) = \sqrt{2x+3}$

16) Dadas las funciones indicadas a continuación hallar, en forma analítica y gráfica (cuando se indique, el conjunto  $A \subset D_f$  que satisface:

a)  $f(x) \geq g(x)$  si  $f(x) = 3 + 2x$  y  $g(x) = 4x - 5$

b)  $f(x) > 4$  si  $f(x) = x^2 - 3x$

c)  $|f(x)| \geq |g(x)|$  si  $f(x) = 3x$  y  $g(x) = 6 - 3x$

17) Hallar, en el intervalo  $[0; 2\pi)$ , los ceros de las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación.

a)  $f(x) = \sin x - 1$

b)  $g(x) = 2 \cdot \cos(2x) - 1$

c)  $h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - 1$

d)  $t(x) = -2 \cdot \cos x - 2$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

# TRABAJO PRÁCTICO N°1: LÍMITES

### A) Límites determinados en un punto, finitos e infinitos

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+4} & 2. \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-1) & 3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2}{x-2} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2 \cdot (x+2)}{4 \cdot \cos x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x+1}{8x+1}} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}} & 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1} & 8. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x-1} \\ 9. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{x-1} & 10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} & 11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} & 12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x+2} \\ 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \end{array}$$

### B) Límites indeterminados $\frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0}$

#### Cociente de polinomios

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3x^2}{x^3+x} & 3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-10x+25} \\ 4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5+2x^3+x^2+2}{x^3-3x^2-2x+2} & 5. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{10x+5} & 6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3+2x-5}{x^4+x-2} \\ 7. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2-16} & 8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15} & 9. \lim_{x \rightarrow i} \frac{x^n-i^n}{x-i} \\ 10. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{(x+2) \cdot (x-3)} & 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^2-a^2}{x} & 12. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^{\frac{2x-2}{x-1}} \end{array}$$

#### Trigonómicos

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(3x)}{\text{sen}(5x)} & 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1} & 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x^2} & 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{tg}(x^2-4)}{\text{sen}(x-2)} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^3(2x)}{5x^3} & 12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^3(3x)}{2x \cdot \text{sen}^2 x} \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{\text{tg}(x)} & 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^4(x) \cdot 5x}{\text{tg}^2 x} & 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(2x)}{3x} & & \end{array}$$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$$14. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - 3\cos(x) + 3}{\cos(x) - 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - 3\cos(x) + 3}{\cos(x) - 1}$$

### Irracionales

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x}-2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{a} - a\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad a > 0$$

### C) Límites laterales

Hallar los límites laterales en los puntos indicados. Indicar si existe el límite y graficar.

$$a) y = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \text{ en } x_1 = 0$$

$$b) y = \begin{cases} 4-x^2 & x \leq 1 \\ 2+x^2 & x > 1 \end{cases} \text{ en } x_1 = 1$$

$$c) y = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} \text{ en } x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$d) y = x|x-2| \text{ en } x_1 = 0 \text{ y en } x_2 = 2$$

$$e) y = \frac{x^2-4}{|x-2|} \text{ en } x_1 = 2$$

### D) Límites determinados de variable infinita

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3+1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{x+1} \right)^5$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{5} \right)^{\frac{2}{x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^{5x}$$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### E) Límites indeterminados $\frac{\rightarrow \infty}{\rightarrow \infty}$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x + x^2 - 5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x}{x+1} \right)^{\frac{5}{x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{4x+1} \right)^{2x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+4} \right)^{\frac{2x}{x+2}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+3}{3x+1} \right)^{-1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{2x+1} \right)^2$$

### F) Establecer si las siguientes funciones tienen asíntotas horizontales. Determinar su ecuación.

$$1. f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x + x^2 - 5}$$

$$2. f(x) = \frac{-3x^2 - 2}{x + x^3 - 5x^2}$$

$$3. f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 2}{x - 5x^2}$$

### G) Hallar, si existen, las ecuaciones de las rectas asíntotas a las gráficas de las funciones definidas de su dominio mayorante en los reales:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{5x - 1}{x - 2}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

$$d) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

$$e) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f) f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x - 1}$$

#### Resolución de a)

Como  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  está definida  $\forall x, x \in \mathbb{R}$  el dominio de la función es el conjunto de los números reales, lo que nos indica que la función no presenta asíntotas verticales.

Para saber si tiene asíntotas horizontales se debe cumplir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ .

En nuestro caso  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{x^2 + 1}_{\rightarrow \infty}} = 0$ . Luego  $y = 0$  es A.H.

#### Resolución de f)

Como  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x - 1}$  no está definida para  $x = 1$  el dominio de la función es  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$  lo que nos indica que es una probable asíntota vertical. Para asegurarnos de que realmente lo sea hay que comprobar que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{4x^2 + 1}^{\rightarrow 5}}{\underbrace{x-1}_{\rightarrow 0}} = \infty. \text{ Por lo tanto } x = 1 \text{ es A.V.}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{4x^2 + 1}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{x-1}_{\rightarrow \infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2/x^2 + 1/x^2}{x/x^2 - 1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \overbrace{1/x^2}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1/x}_{\rightarrow 0} - \underbrace{1/x^2}_{\rightarrow 0}} = \infty$  podemos asegurar que la

función no presenta A.H.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Para ello hacemos lo siguiente:

Hacemos la división entre polinomios  $(4x^2 + 1) / (x - 1)$

$4x^2$	$+ 0x$	$+ 1$	$x - 1$	$D(x)$	$d(x)$
$- 4x^2$	$+ 4x$		$4x+4$	$r(x)$	$C(x)$
$0$	$+ 4x$	$+ 1$			
	$- 4x$	$+ 4$			
	$0$	$+ 5$			

Como  $D(x) = C(x) \cdot d(x) + r(x)$  entonces  $\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{C(x) \cdot d(x)}{d(x)} + \frac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow$

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow \frac{4x^2 + 1}{x - 1} = (4x + 4) + \frac{5}{x - 1}$$

Por lo tanto:  $y = 4x + 4$  es la A.O.

**Nota:** Este procedimiento se puede aplicar solamente cuando se trata de funciones racionales, en cuyo caso aseguramos que si el cociente obtenido es una expresión del tipo "mx+b" y además el resto es no nulo entonces esa expresión lineal obtenida es la ecuación de la asíntota oblicua. Para que el cociente sea lineal es condición necesaria, que el grado del polinomio numerador exceda en una unidad al grado del polinomio denominador.

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### TRABAJO PRÁCTICO N°2: **CONTINUIDAD**

1) Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Clasificar las discontinuidades y graficar las funciones.

$$a) f(x) = \begin{cases} -x+1 & -2 < x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ x^2+1 & -1 < x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$e) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{en } x_1 = 1$$

$$f) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \quad \text{en } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1$$

2) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan, clasificarlas y graficarlas.

$$a) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{si } x \leq 1 \\ 3-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ \frac{8}{x-2} & \text{si } -2 < x < 6 \\ 2x-10 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

3) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan, clasificarlas:

$$a) f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{x-4}{(x+3) \cdot (x^2-16)}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-3x}$$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

e)  $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$

f)  $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x-3}$

g)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

4) ¿Es posible definir  $f(1)$  para que  $f(x) = \frac{x \cdot (x-1)}{x^2 - 1}$  sea continua en  $x = 1$ ?

5) Definir, si es posible,  $f(2)$  para que  $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}$  sea continua en  $x = 2$ .

6) Hallar  $k$  para que la función  $h$  sea continua en  $x = 4$ .

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 - 5x + 4)}{x - 4} & x \neq 4 \\ k & x = 4 \end{cases}$$

7) Hallar  $k$  para que la función  $g$  sea continua en  $x = k$ .

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + k & x > k \\ -x^2 - 3k - 1 & x \leq k \end{cases}$$

8) Hallar  $k$  para que la función  $g$  sea continua en  $x = 0$ .

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(kx)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -k^2 + 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9) Hallar  $k$  para que la función " $f$ " sea continua en  $x_0 = 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{tg}(x^3 + 2x - 3)}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k^2 + 4k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

10) ¿Qué valores de " $a$ " y de " $b$ " hacen que " $f$ " sea continua en todo  $\mathbb{R}$ ?

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

11) Hallar, si existe, los valores de " $a$ " y de " $b$ " para que " $f$ " sea continua en todo  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{4}{5 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ -3ax + 2b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

12) Sea la función " $f$ ", definida por la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + a & \text{si } x \leq -1 \\ -x + b & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{a}{x} - c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hallar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tal que  $f$  resulte continua en todo el campo real y la recta  $y = -3$  sea asíntota para  $x \rightarrow +\infty$ .

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### TRABAJO PRÁCTICO N°3: DERIVADAS

A) Hallar las derivadas en los puntos indicados aplicando la definición.

1)  $y = x^3 - 2x + 3$  en  $x_0 = 1$

2)  $y = 2x^4 - x$  en  $x_0 = -2$

3)  $y = \sqrt{x}$  en  $x_0 = 4$

4)  $y = \frac{1}{x}$  en  $x_0 = -1$

5)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  en  $x_0 = 1$

6)  $y = \frac{1}{x-2}$  en  $x_0 = 2$

B) Hallar las funciones derivadas aplicando la definición de derivada.

1)  $y = x^3 + x$

2)  $y = 2x^2 + 3x - 4$

3)  $y = \frac{1}{x}$

4)  $y = \sqrt{x}$

5)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

C) Hallar las funciones derivadas aplicando las reglas de derivación.

1)  $y = x^5 - 3x^3 + 8$

2)  $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$

3)  $y = \frac{x^4}{a} + \frac{x^2}{b} + x$

4)  $y = ax^3 - \frac{x}{b} + c$

5)  $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$

6)  $y = x \cdot \ln x$

7)  $f(t) = (2t - 1)(t^2 - 6t + 3)$

8)  $y = x(3x + 2)(2x + 3)$

9)  $y = \frac{2x^4}{4 - x^2}$

10)  $y = \frac{5 - x}{5 + x}$

11)  $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

12)  $f(t) = \frac{t^3 + 1}{t^2 - t - 2}$

13)  $y = \sin x \cdot \cos x$

14)  $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

15)  $y = \frac{e^x}{\operatorname{tg} x}$

16)  $y = (x^2 + 4)^5$

17)  $y = \sqrt{x^2 + 9}$

18)  $y = (3 + x)\sqrt{3 - x}$

19)  $y = \sqrt{x^3 - x}$

20)  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

21)  $y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$

22)  $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

23)  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

24)  $y = e^{4x+1}$

25)  $y = 7^{x^2+3x+2}$

26)  $y = e^{\sqrt{x}}$

27)  $y = e^{x^2} \cdot \ln x^2$

28)  $y = \sin^2 x$

29)  $y = \sin(x+a)\cos(x+a)$

30)  $y = \sin \ln x$

31)  $y = \ln \operatorname{tg} x$

32)  $y = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$

33)  $y = \sin^3(2x) + \operatorname{tg}(\ln(x))$

34)  $y = \cos^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

35)  $f(t) = (t \cdot \operatorname{cotg} t)^2$

36)  $y = x^x$

37)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$

38)  $y = x^{\sin x} + x$

39)  $y = \frac{x^{2x} - x^3}{x^2}$

40)  $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$

41)  $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

42)  $y = \ln(\ln(\ln(x)))$

D) Indicar en qué puntos las siguientes funciones no son derivables.

1)  $f(x) = \sqrt[3]{25 - x^2}$

2)  $f(x) = 4 - \sqrt[5]{2 + x}$

3)  $f(x) = (x - 1)^{1/5}$

4)  $f(x) = x^{1/3} + 1$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

E) Hallar  $k$  para que  $f(2) = f'(2)$  si  $f(x) = \frac{kx+2}{3x-1}$

F) a) Demostrar que la función  $y = |x|$  es continua en  $x_0 = 0$  pero que allí, no es derivable. Extraer conclusiones al respecto.

b) Analizar si la función definida por la fórmula  $y = \sqrt[3]{x}$  es derivable en  $x_0 = 0$ .

G) Dada  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ , calcular:

1) pendiente de la recta tangente si  $x_0 = 1$ .

2) puntos donde  $\alpha = 45^\circ$ .

3) puntos donde la recta tangente es paralela a la recta  $6x - 2y = 6$ .

4) punto donde la recta tangente es perpendicular a la recta  $x - y = 3$ .

### Problemas resueltos:

1) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva  $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$  en el punto de abscisa  $x_0 = 1$ .

**Resolución:** Siendo  $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(1) = \sqrt{2 - \frac{1}{1}} = 1$

Dado que  $f'(x) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x^2 \sqrt{2 - \frac{1}{x}}}$

Si la evaluamos en  $x_0 = 1$ , sabemos el valor de la pendiente de la recta tangente. De esta forma, resulta:

$$f'(1) = \frac{1}{2 \cdot 1^2 \sqrt{2 - \frac{1}{1}}} = \frac{1}{2}$$

Así tenemos que

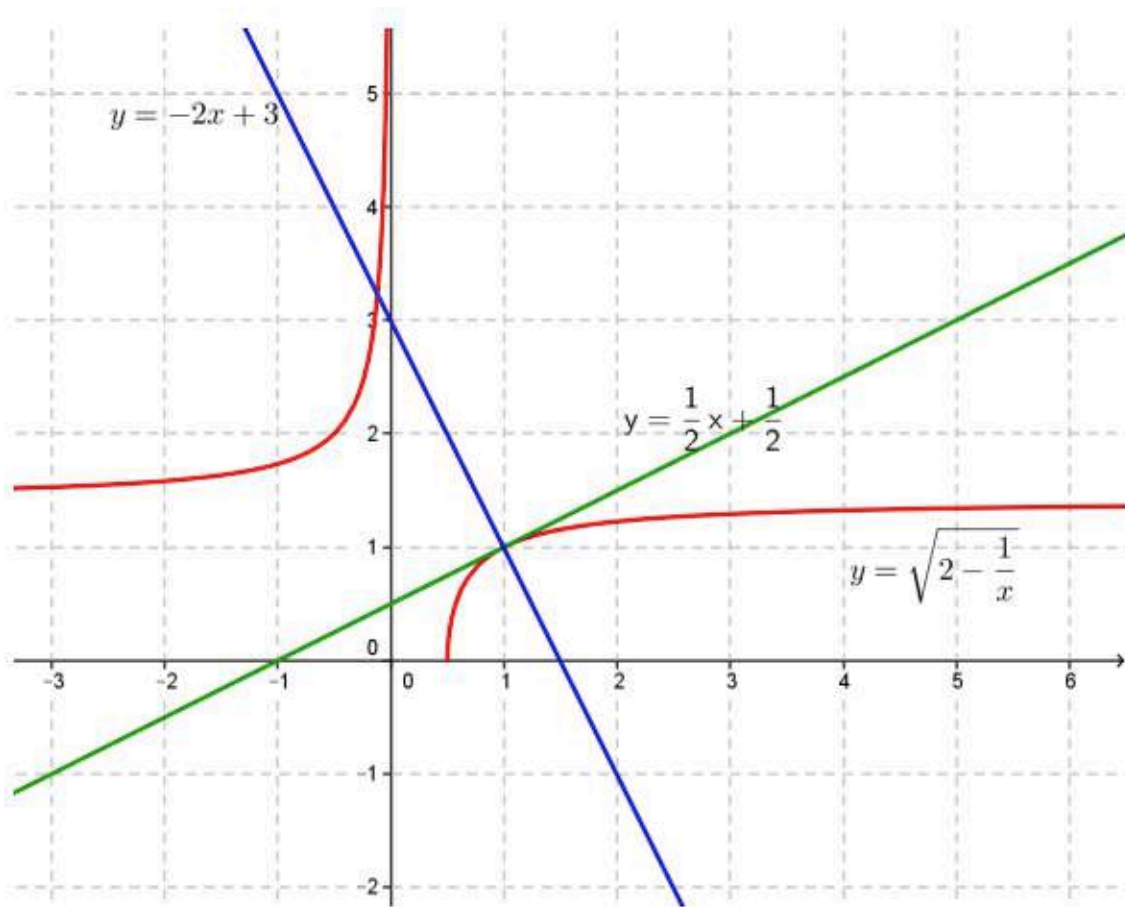
Recta tangente:  $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow r_t: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Recta normal:  $y - 1 = -2(x - 1) \Rightarrow r_n: y = -2x + 3$

Vamos a graficar la situación aunque el enunciado no lo indique

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática



- 2) Hallar, si existen, las coordenadas “x” e “y” de los puntos sobre la curva definida por la fórmula  $f(x) = \frac{5x-1}{2-x}$  donde la recta tangente forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje x.

**Resolución:** Como el problema nos pide que la recta tangente forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje x, se debe cumplir que la función derivada se iguale a la pendiente de la misma. Siendo  $m = \operatorname{tg}(45^\circ) = 1$ . Pediremos entonces como condición que:  $f'(x) = 1$ .

$$\text{Luego: } f'(x) = \frac{5(2-x) - (5x-1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{10 - 5x + 5x - 1}{(2-x)^2} = \frac{9}{(2-x)^2}$$

Igualando a “1” tenemos que:

$$\frac{9}{(2-x)^2} = 1 \Rightarrow (2-x)^2 = 9 \Rightarrow |2-x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2-x = 3 \Rightarrow x = -1 \\ 2-x = -3 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Sabidos los valores de abscisa podemos calcular las ordenadas:

Siendo:  $x = -1 \Rightarrow y = f_{(-1)} = \frac{5 \cdot (-1) - 1}{2 - (-1)} = -2$ . De donde uno de los puntos es el

$P_0 = (-1; -2)$ . En forma idéntica, siendo  $x = 5 \Rightarrow y = f_{(5)} = \frac{25-1}{2-5} = -8$  y el otro punto es el  $P_1 = (5; -8)$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

H) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a:

1)  $y = x^2 + 1$  en  $x_0 = 1$ . Graficar.      2)  $y = \sqrt{x}$  en  $x_0 = 1$ . Graficar.

3)  $y = -x^2 + 4x - 3$  en  $x_0 = 0$ . Graficar.      4)  $y = 3x^2 + \frac{1}{x}$  en  $x_0 = -1$

5)  $y = \frac{1}{2-x}$  en  $x_0 = 1$

I) Indicar puntos donde la recta tangente es horizontal si:

1)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$       2)  $f(x) = \frac{x}{9-x}$

3)  $f(x) = e^{x^2+1}$       4)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$

J) ¿En qué puntos la curva  $f(x) = x^3 + 4x + 1$  tiene una recta normal cuya pendiente es  $-1/7$ ?

K) ¿En qué puntos la recta tangente a la curva  $f(x) = x^3 - 3$  es:

1) paralela a la recta  $12x - y = 5$ ?

2) perpendicular a la recta  $x + 3y - 1 = 0$ ?

L) La función cuya fórmula está dada por la expresión  $f(x) = \frac{ax+2}{x-1}$  posee en el punto de abscisa  $x_0 = 2$  una recta tangente cuya ecuación es  $y = 3x + b$ .

Hallar, si existen, cuánto deben valer "a" y "b"

M) ¿En qué punto/s de la curva  $y = \frac{1}{x^2}$  la recta tangente corta al eje de abscisas en  $x_0=3$ ?

### Problemas resueltos:

1) Se pide, para las siguientes funciones, determinar:

a) Dominio:  $\mathbb{R}$  porque es una función polinómica.

b) Asíntotas no tiene porque es polinómica.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos.

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3$$

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 \Rightarrow -15x^4 + 15x^2 = 0 \Rightarrow -15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -15x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ó} \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \end{cases}$$

Entonces:

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$(-)$ ↘	Mín	$(+)$ ↗	P.I.	$(+)$ ↗	Máx	$(-)$ ↘

Máximos y mínimos relativos:

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$$\text{Mín} = (-1; -2)$$

$$\text{Máx} = (1; 2)$$

Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -60x^3 + 30x \Rightarrow -60x^3 + 30x = 0 \Rightarrow -30x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -30x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ó} \\ 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Entonces:

$x$	$(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}})$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}; 0)$	$0$	$(0; \sqrt{\frac{1}{2}})$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}; +\infty)$
$f''(x)$	(+)	P.I.	(-)	P.I.	(+)	P.I.	(-)
	∪		∩		∪		∩

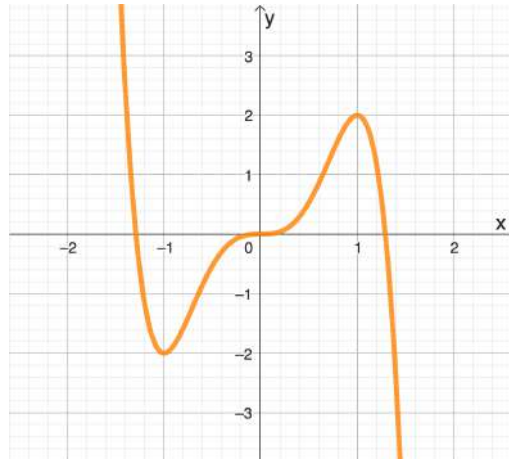
Puntos de inflexión:

$$PI_1 = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; -\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$PI_2 = (0; 0)$$

$$PI_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Gráfico:



$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

a) Dominio:  $D = \mathbb{R}$ .

b) Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales porque el dominio es  $D = \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\infty}{x}}{\frac{\infty}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es la ecuación de la}$$

asíntota horizontal con lo que, no hay A.O.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Entonces:

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	(-)	Mín.	(+)	Máx.	(-)

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$\begin{array}{ccccccc} | & \searrow & | & | & \nearrow & | & | \\ \hline \end{array}$

Máximos y mínimos relativos:  $\text{Mín} = (-1; -\frac{1}{2})$   $\text{Máx} = (1; \frac{1}{2})$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (-x^2+1) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(1+x^2)[-(-1+x^2)-2(-x^2+1)]}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x[-x^2-1+2x^2-2]}{(1+x^2)^3} = \frac{x[x^2-3]}{(1+x^2)^3} \Rightarrow \frac{x[x^2-3]}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

Entonces:

$x$	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	$0$	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
$f''(x)$	(-)	P.I.	(+)		(-)	P.I.	(+)
	⌒		⌒		⌒		⌒

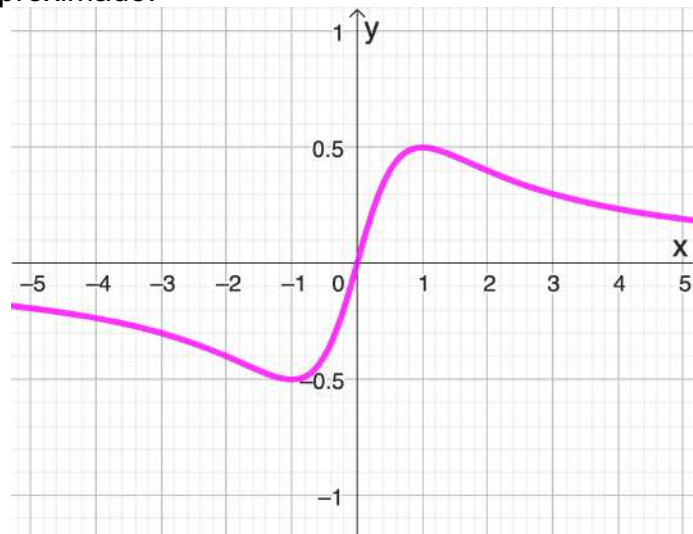
Puntos de inflexión:

$$PI_1 = (-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$PI_2 = (0; 0)$$

$$PI_3 = (\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$$

Gráfico aproximado:



$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

a) Dominio:  $D = \mathbb{R} - \{2\}$ .

b) Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{\rightarrow 4}{x^2 - 2x + 4}}{\underset{\rightarrow 0}{x - 2}} = \infty \Rightarrow x = 2 \text{ es la ecuación de la asíntota vertical.}$$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 4}^{\infty}}{\underbrace{x - 2}_{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \overset{\rightarrow 0}{\frac{2}{x}} + \overset{\rightarrow 0}{\frac{4}{x^2}}}{\underset{\rightarrow 0}{\frac{1}{x}} - \underset{\rightarrow 0}{\frac{2}{x^2}}} = \infty$$

Entonces, no existe asíntota horizontal.

El hecho de que el grado del polinomio numerador supera en una unidad al grado del polinomio denominador nos lleva a buscar la existencia de asíntota oblicua. Para ello hacemos la división  $(x^2 - 2x + 4) / (x - 2)$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 0 \quad 0 \quad +4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{x - 2} \\ x \end{array} \quad \begin{array}{l} D(x) \\ r(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{d(x)} \\ C(x) \end{array}$$

Como  $D(x) = C(x) \cdot d(x) + r(x)$  entonces  $\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{C(x) \cdot d(x)}{d(x)} + \frac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow$

$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$ . Como el resto es  $r \neq 0$  entonces el cociente  $y = x$  es la ecuación de la asíntota oblicua.

c) Análisis del crecimiento, decrecimiento. Cálculo de máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 2) - (x^2 - 2x + 4) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2x + 4 - x^2 + 2x - 4}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Entonces:

$x$	$(-\infty ; 0)$	0	$(0 ; 2)$	2	$(2 ; 4)$	4	$(4 ; +\infty)$
$f'(x)$	(+)	Má	(-)	A.V	(-)	Mín	(+)
	↗	↘	↘		↘		↗

Máximos y mínimos relativos:

$$\text{Máx} = (0 ; -2)$$

$$\text{Mín} = (4 ; 6)$$

d) Análisis de la concavidad y cálculo de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{(2x - 4) \cdot (x - 2)^2 - (x^2 - 4x) \cdot 2 \cdot (x - 2) \cdot 1}{(x - 2)^4} = \frac{2(x - 2) \cdot [(x - 2)(x - 2) - (x^2 - 4x)]}{(x - 2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2[x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x]}{(x - 2)^3} = \frac{8}{(x - 2)^3} \Rightarrow \frac{8}{(x - 2)^3} = 0 \Rightarrow 8 = 0 \quad \text{absurdo:}$$

Por lo tanto no existen puntos donde se anule la derivada segunda

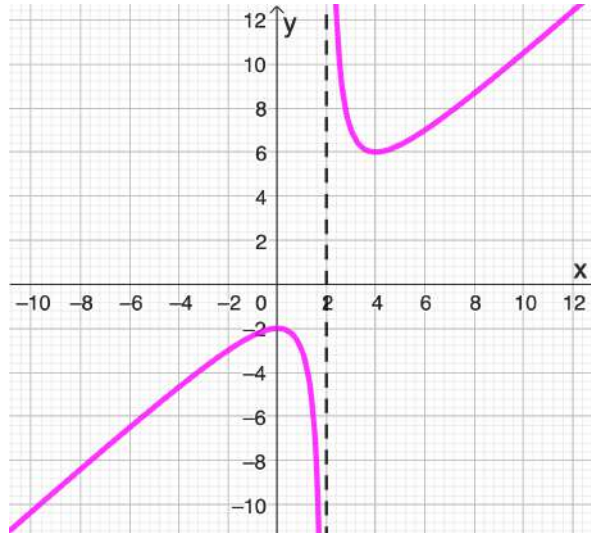
Entonces:

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$x$	$(-\infty ; -2)$	$2$	$(2 ; +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$		$(-)$
	$\cap$	A. V	$\cup$

Puntos de inflexión: No tiene, pero cambia la concavidad a izquierda y derecha de  $x=2$ . Gráfico:



N) Obtener intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones

1)  $f(x) = x^2 - 4x - 1$

2)  $f(x) = x^3 - x^2 - x$

3)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

4)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

5)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

6)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

O) Hallar  $k \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{kx-1}{x-k}$  sea creciente.

P) Demostrar que la función definida por la expresión,  $f(x) = x \cdot e^{bx}$  ( $b \neq 0$ ) siempre posee un extremo relativo en  $x_0 = -\frac{1}{b}$

**Ejemplo:** La función cuya fórmula está dada por la expresión  $f(x) = \frac{x^2+kx+1}{x^2-2x}$

posee un extremo en  $x_0 = 1$ . Hallar, si existe, el valor que debe tomar el número "k" y acorde con el resultado logrado calcular las coordenadas de todos sus extremos relativos clasificándolos en máximos y mínimos.

**Resolución** Como sabemos que, la función en  $x_0 = 1$  presenta un extremo,

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

allí la derivada debe ser nula. Derivando tenemos que:

$$f(x) = \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + k)(x^2 - 2x) - (x^2 + kx + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$$

Como

$$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = \frac{(2 + k)(1 - 2) - (1 + k + 1)(2 - 2)}{(1 - 2)^2} = -2 - k$$

Igualando a cero tenemos que:  $-2 - k = 0 \Rightarrow k = -2$

Sabiendo el valor de "k" resultan ser:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}$$

Y también:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$$

Si en esta última expresión operamos algebraicamente resulta:

$$f'(x) = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

Para calcular sus extremos, debemos saber en qué puntos se anula su derivada.

$$f'(x) = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Luego, su único extremo se alcanza en  $x = 1$

Analizando el crecimiento de la función y que el dominio de la misma es:

$$Dom f = \mathbb{R} - \{0; 2\}$$

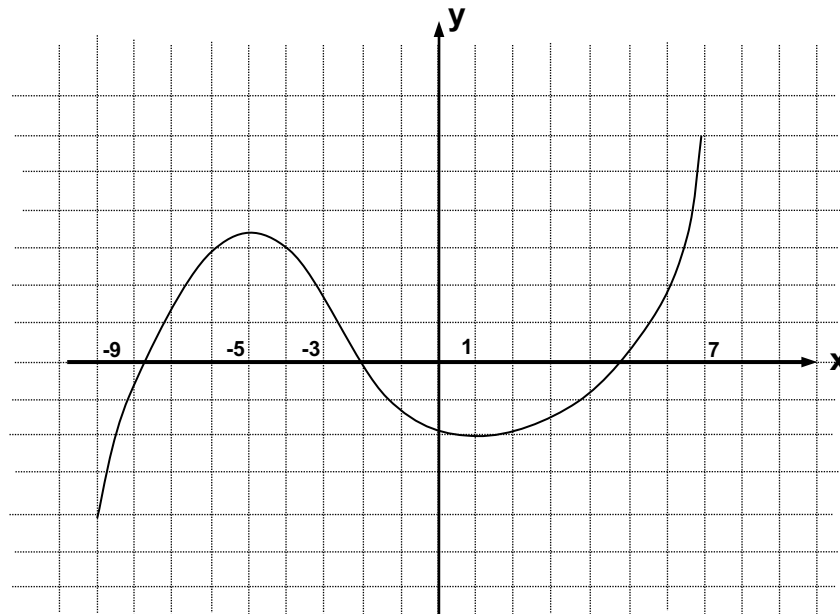
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
f'(x)	(+)	A.V.	(+)	Máx.	(-)	A.V.	(+)

El máximo es el punto  $(1; 0)$ .

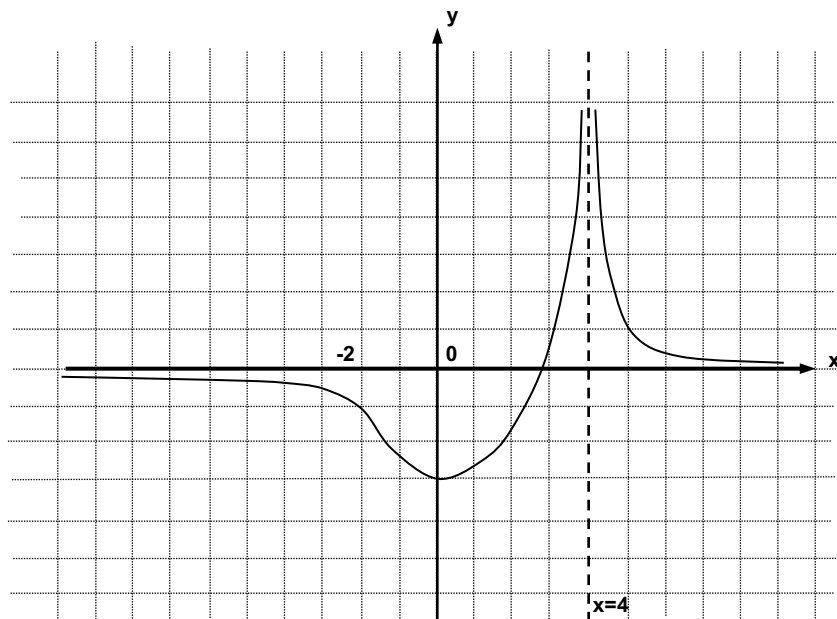
# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

Q) 1) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función polinómica en el intervalo  $[-9;7]$ . Se sabe que en  $x = -5$  y en  $x = 1$  presenta extremos relativos. Asimismo, en  $x = -3$  podemos encontrar un punto de inflexión. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



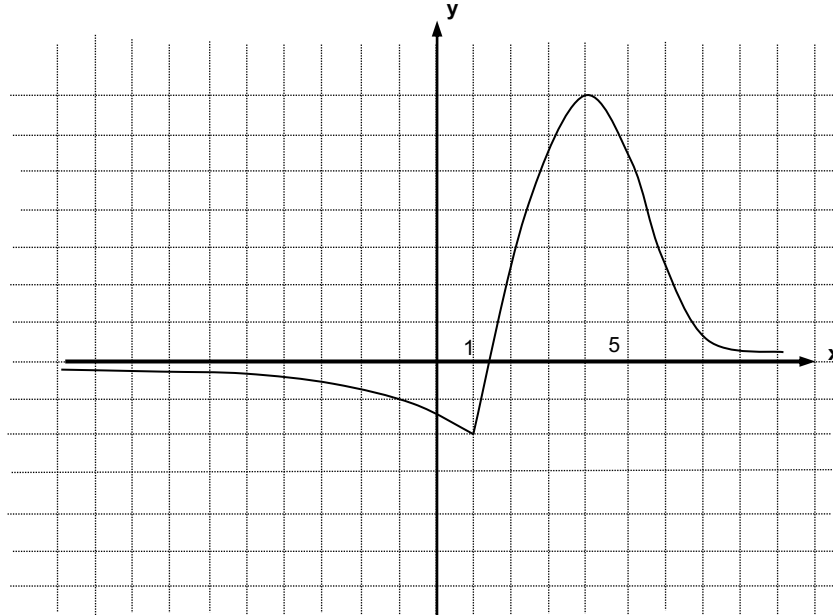
2) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función que presenta una asíntota vertical en  $x = 4$  y una asíntota horizontal en  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se sabe que en  $x = 0$  presenta un mínimo. Asimismo, en  $x = -2$  podemos encontrar un punto de inflexión. Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

3) La curva representada a continuación corresponde a la gráfica de una función continua. La misma, que además de poseer una asíntota horizontal en  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , en  $x = 1$  no es derivable y posee un punto de inflexión en  $x = 5$ . Estimar a partir de ella los respectivos gráficos de las funciones derivada primera y derivada segunda.



R) Analizando la existencia de rectas asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión realizar las gráficas de las funciones cuyas fórmulas son:

a)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

b)  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$

c)  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

d)  $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$

e)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### APLICACIONES DE DERIVADAS

A) Resolver aplicando la regla de L'Hopital (optativo)

$$\begin{array}{llll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{\operatorname{tg} x} \\ 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x - 1)}{\sin(x - 1)} & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{bx} & 7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 5x - 2} \\ 8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x - 2}{\sin^2 x - 4 \sin x + 3} & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 2x^2 + 6x}{x^2 - 2x} & 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 \cdot \cos x}{4 \sin x} \\ 11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^3} & 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1 + x)} & 13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x - 1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x} \\ 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} & 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} & 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} \\ 17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos(4x)} \end{array}$$

B) Problemas de máximos y mínimos

1) Hallar, si existen, dos números enteros positivos si se sabe que cumplen la condición de sumar 20 y además el cubo de uno de ellos sumado al triple del otro resulta:

i) Máxima.

ii) Mínima

2) Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y además:

i) Su producto sea el máximo.

ii) La suma de sus cuadrados sea mínima.

iii) El producto entre el cuadrado de uno de ellos y el cubo del otro sea máximo

3) Dividir un número positivo  $a$  en dos sumandos tales que su producto sea máximo.

4) Un lote rectangular de  $800\text{m}^2$  tiene un lado sobre un río. Hallar las dimensiones del lote para que la longitud de la cerca sea mínima.

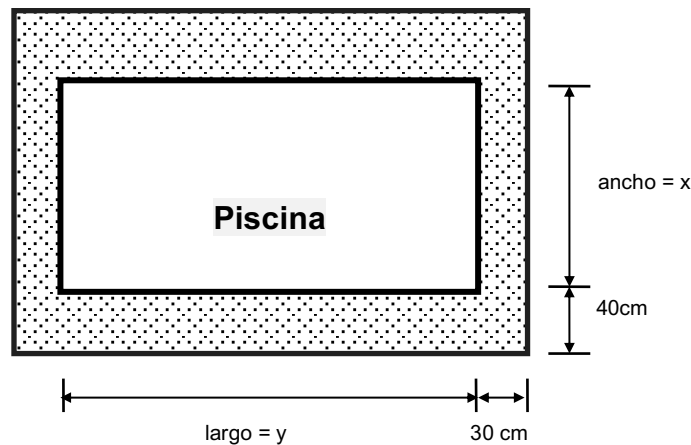
5) Con una hoja de cartón cuadrada de lado 72 cm es preciso hacer una caja rectangular abierta que tenga la mayor capacidad posible. Se recortan cuadrados de los ángulos de la hoja y se dobla ésta para formar la caja. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

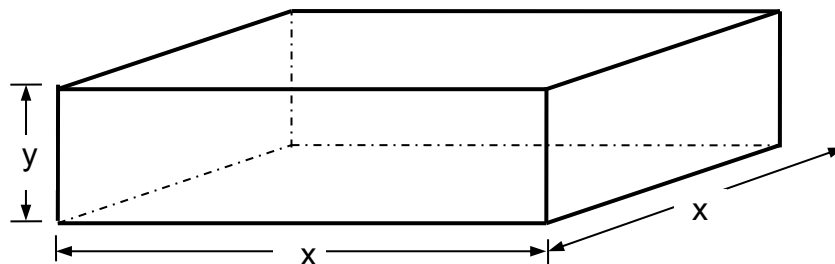
6) ¿Para qué número se verifica que es máximo el producto entre un número y el anterior?

7) Se desea construir una piscina de forma rectangular y área  $12\text{m}^2$ . Estará rodeada por un camino embaldosado de 30 cm. de ancho sobre los dos lados menores y de 40 cm. sobre los otros dos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la misma a los efectos de que el área del terreno empleado sea máxima?



### Problema resuelto:

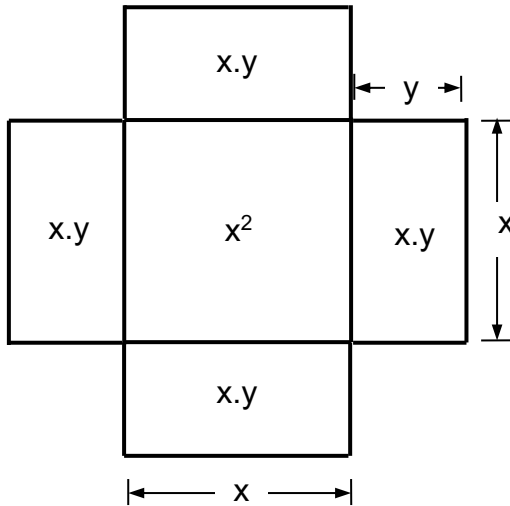
Se desea construir un depósito con forma de prisma de base cuadrada sin tapa como el indicado en la figura. El mismo, debe tener  $125\text{ m}^3$  de capacidad. Si el costo de las *caras laterales* es de  $\$2$  el  $\text{m}^2$  y el del *fondo* es de  $\$4$  el  $\text{m}^2$ . ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo? ¿Cuál será ese costo mínimo?



# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

**Resolución:** Supongamos que el depósito se encuentra desarmado como mostramos a continuación.



El volumen viene dado por la expresión:  $v = x^2 \cdot y$ . Como es condición necesaria que el mismo sea de  $125 \text{ m}^3$  debe pasar que  $x^2 \cdot y = 125 \Rightarrow y = \frac{125}{x^2}$

Como queremos minimizar los costos debe tener área mínima y así utilizar la menor cantidad posible de material. La expresión de la misma viene dada por:

$$C_T = \underbrace{[x^2]}_{\text{Área del fondo}} \cdot \underbrace{(4)}_{\text{Costo del fondo}} + \underbrace{[4 \cdot x \cdot y]}_{\text{Área caras laterales}} \cdot \underbrace{(2)}_{\text{Costo de caras laterales}} = 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y$$

Reemplazando por la relación entra variables resulta:

$$C_T = 4x^2 + 8 \cdot x \cdot \frac{125}{x^2} = 4x^2 + \frac{1000}{x}$$

Derivando:

$$C'_T = 8x + \frac{0 \cdot x - 1000 \cdot 1}{x^2} = 8x - \frac{1000}{x^2}$$

Para lograr un mínimo es preciso que la derivada se anule:

$$8x - \frac{1000}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x = \frac{1000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ m}$$

Como  $x = 5 \Rightarrow y = \frac{125}{5^2} \Rightarrow y = 5$

Ahora debemos demostrar que se trata de un mínimo y para ello usamos el criterio de la derivada segunda. La misma, evaluada en  $x = 5$  que resulta:

$$C''_T = 8 - \frac{0 \cdot 1000 - 1000 \cdot 2x}{x^4} = 2 - \frac{-2000 \cdot x}{x^4} = 2 + \frac{2000}{x^3} \Rightarrow C''_T(5) = 2 + \frac{2000}{5^3} > 0$$

Como ello nos da un resultado positivo, estamos en condiciones de garantizar que esas dimensiones  $x = 5 \wedge y = 5$  hacen que el costo del depósito sea mínimo.

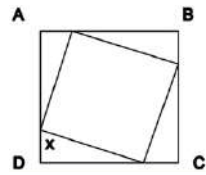
Para saber el valor del costo mínimo basta reemplazar esos valores en la función de costos.

Así resulta:  $C_{\min} = 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y = 4 \cdot (5)^2 + 8 \cdot (5) \cdot (5) = 300 \text{ \$}$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

8) Determinar  $x$  de tal manera que el cuadrado inscripto sea de área mínima, si el lado del cuadrado ABCD es de 10 m.



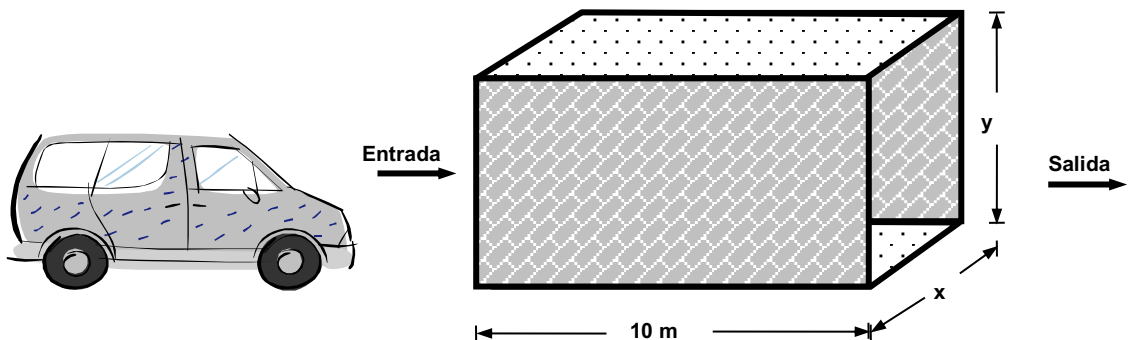
9) Se dispone de 36 mts. de cerca para encerrar un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que sea de superficie máxima?

10) Un hombre desea cercar un campo rectangular y luego subdividirlo en 3 parcelas rectangulares iguales colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. Si dispone de 1.000 mts. de cerca, ¿qué dimensiones le darán el área máxima?

11) Determinar las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica **sin tapa** de  $64 \text{ cm}^3$  de volumen para almacenar para que resulte lo más económica posible.

(Nota: Aproximar  $\pi = 3,14$ )

12) Se desea construir un túnel para lavado de camionetas con un acceso abierto para la "Entrada" y otro para la "Salida". La forma debe ser de prisma recto como se indica en la figura. Las paredes deben estar azulejadas y tanto el piso como el techo deben ser de hormigón. Los materiales necesarios cotizan a razón de  $8\$/\text{m}^2$  para el azulejo y  $5\$/\text{m}^2$  para el hormigón. Si por ordenanzas municipales se le impone como condición es que posea un volumen de  $400 \text{ m}^3$  ¿Qué dimensiones (ancho y alto) hacen que el costo sea mínimo posible? ¿Cuál es ese costo mínimo?

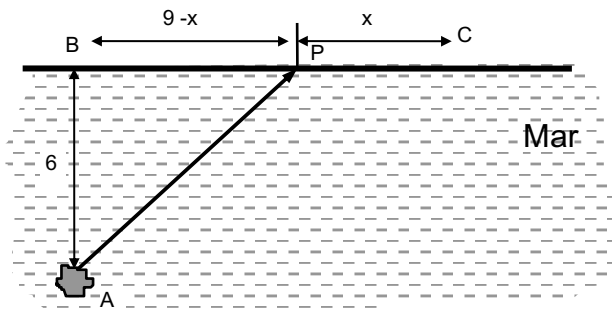


13) Una isla está ubicada en el punto A, 6 Km mar adentro del punto más cercano B en una playa recta como se indica en la figura. Una persona que se encuentra en la isla desea ir hacia un punto C, 9 Km playa abajo de B.

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

El arrendar un bote cuesta \$15 cada Km recorrido y el alquiler de un auto con chofer \$12 cada Km. ¿Cómo se debe hacer el trayecto para que resulte lo más económico posible?



14) Obtener  $a$  y  $b$  de manera tal que  $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  tenga un extremo relativo en  $(2;3)$ .

15) Obtener  $a$ ,  $b$  y  $c$  de manera tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tenga un máximo relativo de 7 en  $x_0=1$  y que la gráfica de  $f(x)$  pase por  $(2;-2)$ .

16) Dada  $f(x) = ax^3 + bx^2$  hallar  $a$  y  $b$  para que tenga un P.I. en  $(1;2)$ .

17) Demostrar que una función cúbica cuya ecuación es  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  con  $a, b, c$  y  $d \neq 0$ , tiene un solo punto de inflexión.

18) La función  $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$  presenta un máximo relativo en  $(-1;6)$ . Hallar  $a$  y  $b$  y determinar si existe algún otro extremo relativo.

19) Demostrar que  $\forall a > 0$ ,  $f(x) = \ln(ax^3 + x)$  no tiene extremos relativos.

20) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de un triángulo isósceles de área máxima tal que uno de los vértices es el origen de coordenadas y los otros dos son dos puntos simétricos de la parábola  $y = 36 - x^2$  tal que  $-6 \leq x \leq 6$ ? Justifique su respuesta.

21) Se necesita construir una caja sin tapa, de base cuadrada de  $500 \text{ cm}^3$  de capacidad. ¿qué dimensiones debe tener para utilizar la menor cantidad de material?

22) Determine las dimensiones de un rectángulo de área  $169 \text{ cm}^2$  que tengan la diagonal de menor longitud.

23) La lata de una gaseosa tiene una capacidad de  $354 \text{ cm}^3$ . Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

24) Un alambre de 1m de largo se corta en dos partes, la primera se dobla en forma de una circunferencia y la segunda en forma de un cuadrado. ¿Cómo

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

debería cortarse para que la suma de las áreas del círculo y el cuadrado sea máxima?

25) De todos los rectángulos de diagonal  $6\sqrt{2}$ , encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

26) Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

27) Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

# TRABAJO PRÁCTICO N°4: INTEGRALES

## Integral indefinida

### Integrales Inmediatas

$$\begin{array}{llll} 1. \int (1+x) \cdot dx & 2. \int (1-\sqrt{x})^2 \cdot dx & 3. \int (2+x)^2 \cdot dx & 4. \int x \cdot \sqrt{x} \cdot dx \\ 5. \int \frac{1-x^5}{1-x} dx & 6. \int \left( 4\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx & 7. \int \frac{3}{x^3} dx & 8. \int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}} \cdot dx \\ 9. \int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx & 10. \int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})^2}{\sqrt{x}} \cdot dx \text{ con } a \geq 0 & & \end{array}$$

11.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int x^3 \cdot dx & \text{b) } \int \sqrt[3]{y} \cdot dy & \text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} & \text{d) } \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x}} \\ \text{e) } \int (r^4 - 3r^3 + 5r^2) \cdot dr & \text{f) } \int (1-2x)(1+3x) \cdot dx & \text{g) } \int \left( t^2 - \frac{1}{t^2} \right) \cdot dt & \text{h) } \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot dx \\ \text{i) } \int \frac{2x+3}{x} \cdot dx & \text{j) } \int \frac{(x+2)^2}{x} \cdot dx & & \end{array}$$

### Integración por Sustitución

$$\begin{array}{llll} 1. \int (1-3x)^5 \cdot dx & 2. \int \frac{x-3}{x^2-6x+4} dx & 3. \int x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx & 4. \int \frac{e^{1/x}}{x^2} \cdot dx \\ 5. \int e^{3x} \cdot dx & 6. \int 4^{2-3x} \cdot dx & 7. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} \cdot dx & 8. \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot dx \\ 9. \int \frac{x^2}{1+x^6} \cdot dx & 10. \int \frac{dx}{9-4x^2} & 11. \int \sqrt[3]{x^2+x} \cdot (2x+1) \cdot dx & \\ 12. \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{dx}{x} & 13. \int \frac{dx}{x \cdot (\ln 2x)^3} & 14. \int \cos^3(2x) \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx & \\ 15. \int \frac{4}{1+x} dx & 16. \int \operatorname{tg}^5 x \cdot \operatorname{sec}^2 x \cdot dx & 17. \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x \cdot dx & \\ 18. \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx & & & \\ 19. \int \frac{e^x \cdot \operatorname{sen} e^x}{\cos e^x} \cdot dx & 20. \int \frac{x^2}{2+2x^3} \cdot dx & 21. \int \frac{2x+1}{x^2+x-1} \cdot dx & \\ 22. \int -3 \cos^5 x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx & 23. \int \frac{1+x}{1+x^2} \cdot dx & & \end{array}$$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$$24. \int \frac{x-3}{x^2-6x+4} dx \quad 25. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx \quad 26. \int \sqrt[3]{(x^2+x)^2} \cdot (2x+1) dx$$
$$27. \int \frac{\ln(x+2) dx}{x+2}$$

### Integración por partes

$$1. \int x \cdot e^x dx \quad 2. \int x \cdot \operatorname{sen} x dx \quad 3. \int x \cdot \operatorname{cos} x dx \quad 4. \int \ln x \cdot dx$$
$$5. \int x^2 \cdot \ln x \cdot dx \quad 6. \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot dx \quad 7. \int x^2 \cdot e^x dx \quad 8. \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx$$

### Integral definida

A) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de las siguientes funciones y el eje  $x$

$$1) y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 2) y = x^3 \quad 0 \leq x \leq 2 \quad 3) y = \operatorname{sen} x \quad 0 \leq x \leq \pi$$
$$4) y = -x^2 + 4$$
$$5) y = x + 2 \quad 1 \leq x \leq 3 \quad 6) y = x^3 - 3x^2 + 2x \quad 7) y = x^3 - 3x^2 - 18x$$

B) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de dos o más funciones

$$1) \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \operatorname{cos} x \\ x = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ y = 0,5x^2 \end{cases}$$
$$4) \begin{cases} y = 5 \\ y = -x + 3 \\ x = 0,5x + 3 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x^2 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} y = -2x^2 + 8 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}$$
$$7) f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 0 \\ -x + 6 & x > 0 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} y = 6 \\ y = -x^2 + 4 \\ y = -x + 2 \\ \text{eje } y \end{cases}$$

9) La gráfica de  $y = x^3$  y la de su función derivada.

10) La gráfica de la función  $y = 1 + 2x - x^2$  y la recta que pasa por  $A = (-1; -2)$  y  $B = (2; 1)$ .

11) La gráfica de la función  $2y = x^2$ , su recta tangente en  $x_0 = 2$  y el eje  $x$ .

12) La gráfica de la función  $y = -x^2$ , su recta tangente en  $x_0 = 1$  y el eje de ordenadas.

13) La gráfica de la función  $y = -x^3 + 1$ , la recta normal en  $x_0 = -1$  y el eje  $x$ .

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

C) Resolver los siguientes problemas

- 1) Dadas  $f(x) = 2x^2$  y  $g(x) = -ax^2 + 16a + 32$  determinar  $a > 0$  para que el área de la región limitada por las gráficas de  $f$  y  $g$  sea de 180 unidades cuadradas.
- 2) Hallar el área plana limitada por la gráfica de  $f(x) = 2x^2 - x^4$  y la recta que pasa por  $(a; f(a))$  y  $(b; f(b))$  si  $f(a)$  y  $f(b)$  son los valores máximos de  $f$ .
- 3) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de  $f(x) = x^3 - 3x + 3$  y la recta que pasa por  $(a; f(a))$  y  $(b; f(b))$  si  $f(a)$  y  $f(b)$  son los valores máximo y mínimo de  $f$ .
- 4) La planta de un supermercado está limitada por los ejes coordenados, la gráfica de la función  $y = x^3 + 1$  y  $x = 1$ . Graficar la planta y determinar donde debe ubicarse la góndola de lácteos si debe estar en el centro del supermercado.
- 5) Un jardín está limitado por las gráficas de  $y = x + 1$ ,  $x = 1$  y  $x = 4$ . Graficar el jardín y determinar donde debe plantarse un roble si debe estar en el centro del jardín.
- 6) Un polideportivo está limitado las gráficas de  $y = -x^2 + 4$ , y los ejes coordenados. Graficar la planta del polideportivo y determinar donde se está ubicada la cancha de paddle si está en el centro.

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### Respuestas 5to año CNBA 2024

#### TRABAJO PRÁCTICO Nro 1

A) 1.  $\frac{1}{2}$  2. 0 3.  $\frac{1}{3}$  4.  $\frac{1}{2}$  5.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  6. 0 7.  $\infty$  8. 64 9. 1 10.  $\infty$  11.  $\infty$  12. 0 13.  $\infty$

B)

Cociente de polinomios

1.  $\frac{1}{2}$  2. 2 3.  $\infty$  4.  $\frac{9}{7}$  5.  $-\frac{2}{5}$  6.  $\frac{11}{5}$  7.  $\frac{5}{8}$  8.  $\frac{3}{16}$  9.  $n \cdot i^{n-1}$  10. 0 11.  $2a$  12. 4

Trigonométricos

1. 3 2.  $\frac{1}{2}$  3. 4 4. 1 5.  $\frac{2}{3}$  6.  $\frac{3}{5}$  7.  $\infty$  8.  $\frac{8}{5}$  9. 0 10. 0 11. 0 12.  $\frac{27}{2}$  13.  $\nexists$  14.  $\sqrt{2}$   
15. 1 16. 0 17. -5

Irracionales

1.  $2\sqrt{2}$  2. -2 3.  $-\frac{1}{3}$  4. 1 5.  $\frac{1}{2}$  6. 0 7. 0 8. 6 9. 1 10.  $-\frac{1}{56}$  11. 0 12. 2 13.  $a$

C)

a) 0 b) 3 c)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \nexists$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \nexists$   $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  d)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$  e)  $\nexists$

D)

1.  $\infty$  2. 0 3. 0 4. 1 5.  $\infty$  6.  $\frac{3}{4}$  7.  $\frac{1}{4}$

E)

1.  $\frac{2}{3}$  2.  $\infty$  3. 0 4. 0 5.  $\infty$  6. 1 7. 0 8. 1 9.  $\frac{3}{4}$  10.  $\frac{1}{4}$

F)

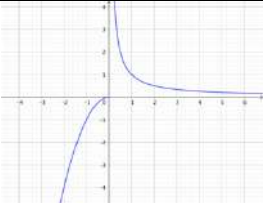
1.  $y=3$ ; 2.  $y=0$  3. No tiene AH

G)

b) AH:  $y = 5$ ; AV:  $x = 2$  c) AH:  $y = 0$ ; AV:  $x = 3, x = -3$  d) AO:  $y = 2x$  e) AV:  $x = 0$ , AH:  $y = 1$

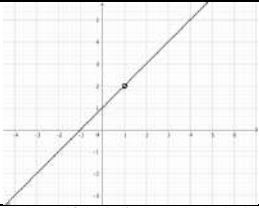
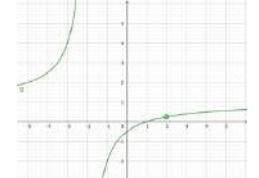
#### TRABAJO PRÁCTICO Nro 2

1.

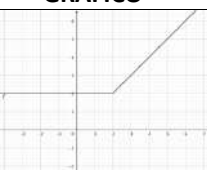
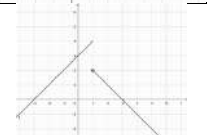
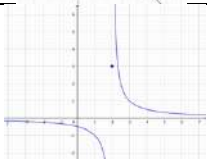
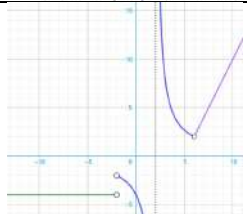
FUNCIÓN	GRÁFICO	CLASIFICACIÓN DE DISC.
$f(x) = \begin{cases} -x+1 & -2 < x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$		Cont en $x=-1$ y en $x=1$ Disc esencial en $x=0$
$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$		Disc esencial en $x=-1$ Disc evitable en $x=1$ Continua en $x=0$ y en $x=2$
$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ x^2+1 & -1 < x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases}$		Continua en $x=0$ y en $x=2$ Disc esencial en $x=-1$
$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$		Disc esencial en $x=0$ Continua en $x=2$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$		Disc evitable en $x=1$
$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$		Disc evitable en $x=2$ Disc esencial en $x=-2$ Continua en $x=1$

2.

FUNCIÓN	GRÁFICO	CLASIFICACIÓN DE DISC
$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$		Sin discontinuidades
$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$		Discontinua esencial en $x=1$
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$		Discontinua esencial en $x=2$
$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 2 \\ \frac{8}{x-2} & \text{si } -2 < x < 6 \\ 2x - 10 & \text{si } x > 6 \end{cases}$		Discontinua esencial con salto finito en $x=-2$ Discontinua esencial con salto infinito en $x=2$ Discontinua evitable en $x=6$

3.

$f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x-3}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{x-4}{(x+3)(x^2-16)}$	$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-3x}$	$f(x) = \frac{ x-3 }{x-3}$	$f(x) = \frac{x^3-27}{x-3}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$
Disc evit $x = 3$ Disc esencial en $x = -1$	Disc esen $x=0$	Disc evit $x=4$ Disc esencial en $x = -3, x = 4$	Disc evitable $x = -3$ Disc esencial en $x = 0, x = 1$	Disc esencial en $x = 3$	Disc evitable en $x = 3$	Disc esencial en $x = 0$

4. Puede definirse  $f(1) = \frac{1}{2}$       5.  $f(2) = \frac{1}{4}$       6.  $k = 3$       7.  $k = -\frac{1}{2}$       8.  $k = 1$  o  $k = -2$   
 9.  $k = 1$  o  $k = -5$       10.  $a = 4$  ;  $b = -2$       11.  $a = \frac{1}{5}$  ;  $b = \frac{4}{5}$       12.  $a = 2$  ;  $b = 0$

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

### TRABAJO PRÁCTICO Nro 3

A) 1. 1    2. -65    3.  $\frac{1}{4}$     4. -1    5.  $\frac{1}{2}$     6. No existe  $f'(2)$  porque 2 no pertenece al dominio de  $f$

B) 1.  $f'(x) = 3x^2 + 1$     2.  $f'(x) = 4x + 3$     3.  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$     4.  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$     5.  $f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}$

C)

1	$y' = 5x^4 - 9x^2$	15	$y' = \frac{e^x(\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sec}^2(x))}{\operatorname{tg}^2(x)}$	29	$y' = \cos^2(x+a) - \operatorname{sen}^2(x+a)$
2	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^2}$	16	$y' = 10x(x^2 + 4)^4$	30	$y' = \cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
3	$y' = \frac{4x^3}{a} + \frac{2x}{b} + 1$	17	$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$	31	$y' = \operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{sec}(x)$
4	$y' = 3ax^2 - \frac{1}{b}$	18	$y' = -\frac{3(x-1)}{2\sqrt{3-x}}$	32	$y' = \frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{sec}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2}$
5	$y' = 40x^4 + 12x^2 + 4x$	19	$y' = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x(x^2 - 1)}}$	33	$y' = 6\operatorname{sen}^2(2x) \cos(2x) + \frac{\operatorname{sec}^2(\ln(x))}{x}$
6	$y' = 1 + \ln(x)$	20	$y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$	34	$y' = \frac{(x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)}{\sqrt{x}(x+1)^2}$
7	$f'(t) = 6t^2 - 26t + 12$	21	$y' = \frac{1}{4\sqrt{1-\sqrt{1-x}} \cdot \sqrt{1-x}}$	35	$f'(t) = 2t \operatorname{cotg}(t) (\operatorname{cotg}(t) - t \operatorname{cosec}^2(t))$
8	$y' = 18x^2 + 26x + 6$	22	$y' = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^{2/3}}$	36	$y' = x^x(1 + \ln(x))$
9	$y' = -\frac{4x^3(x^2-8)}{(4-x^2)^2}$	23	$y' = \frac{2}{1-x^2}$	37	$y' = \operatorname{tg}(x)(\operatorname{sec}^2(x) - 1)$
10	$y' = -\frac{10}{(5+x)^2}$	24	$y' = 4e^{4x+1}$	38	$y' = 1 + x^{\operatorname{sen}(x)-1}(\operatorname{sen}(x) + x \ln(x) \cos(x))$
11	$y' = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$	25	$y' = \ln(7)(2x+3)7^{x^2+3x+2}$	39	$y' = \frac{2x^{2x+1} \ln(x) - x^3 + 2x^{2x+1} - 2x^{2x}}{x^3}$
12	$f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 1}{(t-2)^2}$	26	$y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$	40	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2}$
13	$y' = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$	27	$y' = \frac{2e^{x^2}(x^2 \ln(x^2) + 1)}{x}$	41	$y' = \operatorname{sec}(x)$
14	$y' = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2}$	28	$y' = 2\operatorname{sen}(x) \cos(x)$	42	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln(x) \ln(\ln(x))}$

D) 1.  $x = -5, x = 5$     2.  $x = -2$     3.  $x = 1$     4.  $x = 0$

E)  $k = -\frac{16}{11}$

F) a) Que una función sea continua en un punto no implica que sea derivable en dicho punto

b) No es derivable en  $x=0$

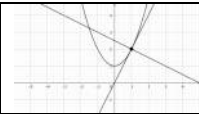
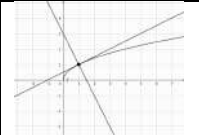
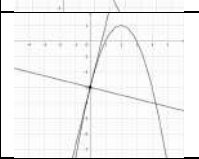
G) 1. -1    2.  $(1 + \sqrt{2}; f(1 + \sqrt{2})); (1 - \sqrt{2}; f(1 - \sqrt{2}))$     3.  $(3; f(3)); (-1; f(-1))$     4.  $(1; f(1))$

H)

FUNCIÓN	RECTA TANGENTE	RECTA NORMAL	GRÁFICO
---------	----------------	--------------	---------

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$y = x^2 + 1$	$y = 2(x - 1) + 2$	$y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 2$	
$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$	$y = -2(x - 1) + 1$	
$y = -x^2 + 4x - 3$	$y = 4x - 3$	$y = -\frac{1}{4}x - 3$	
$y = 3x^2 + \frac{1}{x}$	$y = -7(x + 1) + 2$	$y = \frac{1}{7}(x + 1) + 2$	
$y = \frac{1}{2-x}$	$y = x$	$y = -x + 2$	

I) 1. (0,2) y (4, -30)      2. No existen      3. (0; e)      4.  $(1; \frac{19}{3})$  y. (3; 5)

J) (1; 6) y (-1; -4)

K) a) (2; 5) y (-2; -11)      b) (1; -2) y (-1; -4)

L)  $a = -5$ ;  $b = -14$

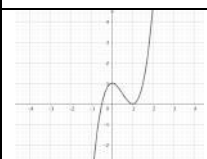


M) (1; 1) y (-1; 1)

N)

FUNCIÓN	INTERVALO DE CRECIMIENTO	INTERVALO DE DECRECIMIENTO
$f(x) = x^2 - 4x - 1$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 2)$
$f(x) = x^3 - x^2 - x$	$(-\infty; -\frac{1}{3})$ y $(1; +\infty)$	$(-\frac{1}{3}; 1)$
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$	$(+\infty; 0)$ y $(3; +\infty)$	$(0; 3)$
$f(x) = x^3 - 3x + 2$	$(+\infty; -1)$ y $(1; +\infty)$	$(-1; 1)$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$	$(-\infty; 0)$ y $(2; +\infty)$	$(0; 2)$
$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$	$(0; 2)$	$(-\infty; 0)$ y $(2; +\infty)$

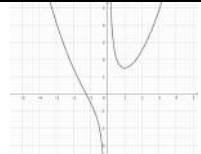
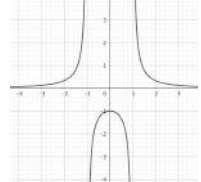
O)  $|k| < 1$

R)

FUNCIÓN	ASÍNTOTAS	MÁX REL	MÍN REL	PTOS INFLEX	GRÁFICO
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$	No posee	$f(0) = 1$	$f(1) = 0$	$(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$	
$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$	No posee	$f(-1) = f(1) = 3$	$f(0) = 2$	$(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{23}{9})$	
$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$	AV: $x=2$ AH: $y=1$	No posee	No posee	No posee	

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$	AV: $x=0$	No posee	$f(1) = \frac{3}{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; f(-\sqrt[3]{2}))$	
$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	AV: $x = -1, x = 1$ AH: $y = 0$	$f(0) = -1$	No posee	No posee	

### APLICACIONES DE LA DERIVADA

- A) 1.  $\frac{1}{2}$    2. 1   3. 2   4. 0   5. 2   6.  $\frac{a}{b}$    7.  $\frac{1}{7}$    8.  $-\frac{3}{2}$    9. -3   10. 0   11.  $\infty$   
 12. 2   13.  $-\frac{4}{\pi^2}$    14.  $\frac{1}{3}$    15.  $\frac{1}{3}$    16. 2   17.  $\frac{1}{2}$

- B) 1. i)  $a = -1; b = 21$    ii)  $a = 1; b = 19$    2. i) 10 y 10   ii) 10 y 10   iii) 20 y 0   o 12 y 8  
 3.  $\frac{a}{2} y \frac{a}{2}$    4. 20m x 40m   5. 12 cm   6. No existe ningún número que verifique lo pedido.  
 7. Largo 3 m, Ancho 4 m   8.  $x=5m$    9. 9m x 9m   10. 250m x 125m   11.  $r = h \cong 2,73 \text{ cm}$   
 12.  $x = 8, v = 5$    13. Debe ir en bote hasta un punto ubicado a 8 km de B y luego en auto el km restante  
 14.  $a = -3; b = 7$    15.  $a = -9; b = 18; c = -2$    16.  $a = -1; b = 3$    18.  $(-\frac{1}{3}; f(-\frac{1}{3}))$   
 20.  $V_1: (-\sqrt{12}; 24)$  ;  $V_2: (\sqrt{12}; 24)$    21. Base cuadrada de 10 cm de lado y altura 5 cm  
 22.  $x = y = 13 \text{ cm}$    23.  $r \cong 3,35 \text{ cm}; h \cong 10,05 \text{ cm}$   
 24. Con 0,56m se forma el cuadrado y con 0,44m se forma la circunferencia.  
 25. Base=altura=6 cm   26.  $x = y = \frac{8}{3}$    27.  $x_1 = \frac{40}{3}; x_2 = \frac{80}{3}; x_3 = 20$

### TRABAJO PRÁCTICO Nro 4

#### Indefinidas

#### Inmediatas

1) $x + \frac{x^2}{2} + C$	2) $x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C$	3) $4x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + C$	4) $\frac{2}{5}x^{5/2} + C$	5) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$
6) $4\text{sen}(x) - \text{tg}(x) + C$	7) $-\frac{3}{2}x^{-2} + C$	8) $2\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$	9) $4\ln 1+x  + C$	10) $\ln 1+x^2  + C$
11) $\frac{\text{tg}^4 x}{4} + C$	12) $\frac{\text{tg}^6 x}{6} + C$	13) $-\ln(\cos(e^x)) + C$	14) $\frac{\ln 1+x^3 }{6} + C$	15) $\ln x^2+x-1  + C$
16) $\text{tg}x - x + C$	17) $\frac{\cos^6 x}{2} + C$	18) $\arctg x + \frac{1}{2}\ln 1+x^2  + C$	19) $\frac{2}{3}x^{2/3} + 2\sqrt{ax} + 2a\sqrt{x} + C$	20) $\frac{\ln x^2-6x+4 }{2} + C$
21) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + C$	22) $\frac{3}{5}(x^2+x)^{5/3} + C$	23) $-(\ln x)^{-1} + C$	24) $-\frac{1}{2(\ln(2x))^2} + C$	25) $\frac{\ln^2 x+2 }{2} + C$
26) $-\frac{\cos^4(2x)}{8} + C$				

#### Sustitución

1) $-\frac{1}{18}(1-3x)^6 + C$	2) $\frac{\ln x^2-6x+4 }{2} + C$	3) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$	4) $-e^{1/x} + C$	5) $\frac{e^{3x}}{3} + C$
6) $\frac{-4^{2-3x}}{3 \cdot \ln 4} + C$	7) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + C$	8) $\frac{\text{arc sen } 2x}{2} + C$	9) $\frac{1}{3} \text{arc tg } x^3 + C$	10) $\frac{\text{Arg Th } \frac{2}{3}x}{6} + C$
11) $\frac{3}{5}(x^2+x)^{5/3} + C$	12) $-(\ln x)^{-1} + C$	13) $-\frac{1}{2 \ln^2(2x)} + C$	14) $-\frac{\cos^4(2x)}{8} + C$	

# Colegio Nacional de Buenos Aires

## Guía de Trabajos Prácticos de Matemática

**Partes**

1) $x \cdot e^x - e^x + C$	2) $-x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C$	3) $x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C$	4) $x \cdot \ln x - x + C$
6) $x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$	7) $e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C$	8) $\frac{e^x \cdot (-\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + C$	5) $\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

**Definidas**

A) 1)  $A = \frac{1}{3}$    2)  $A = 4$    3)  $A = 2$    4)  $A = \frac{32}{3}$    5)  $A = 8$    6)  $A = \frac{1}{2}$    7)  $A = \frac{999}{4}$   
 B) 1)  $A = \frac{9}{2}$    2)  $A = \sqrt{2} - 1$    3)  $A = 4$    4)  $A = 6$    5)  $A = \frac{8}{3}$    6)  $A = \frac{32}{3}$    7)  $A = \frac{32}{3}$    8)  $A = \frac{41}{6}$    9)  $\frac{27}{4}$    10)  $A = \frac{9}{2}$   
 11)  $A = \frac{1}{3}$    12)  $A = \frac{1}{3}$    13)  $A = \frac{29}{4}$

C) 1)  $a = \frac{7}{64}$    2)  $A = \frac{16}{15}$    3)  $A = \frac{1}{2}$    4)  $\left(\frac{14}{25}, \frac{23}{35}\right)$    5)  $\left(\frac{57}{21}, \frac{39}{21}\right)$    6)  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$