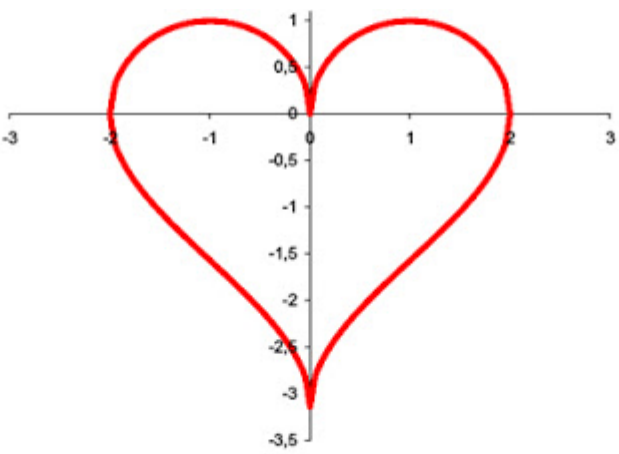
Colegio Nacional de Buenos Aires

MATEMÁTICA DE 3er AÑO

Guía de Trabajos Prácticos



2023

Unidad 4: Funciones polinómicas

Definición

La expresión: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

se denomina **POLINOMIO** de grado n.

Ejercicio N°1

Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

a) x^3
b) $\sqrt{5+x^2}$
c) $\frac{x+1}{x}$
d) $\sqrt{3}x+\sqrt{2}$
e) x
f) $\sqrt{x+2}$
g) $(x-1)(x+3)$
h) 0
i) 1
j) $\frac{1}{x}$
k) $3x^{-2}$

Ejercicio Nº2

Completar y ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la variable y determinar sus grados, el coeficiente principal y el valor del término independiente.

a) $\frac{1}{2}+x^4-2x^2$
b) $-1+x$
c) -3
d) 0
e) $-\frac{3}{4}x^5$
f) $-\sqrt{3}+\sqrt{2}x^2$
g) $\sqrt{3}+\sqrt{2}x^2$
h) $\frac{x-1}{2}+\frac{2-x-x^2}{3}$

Ejercicio Nº3

Determinar a, b y c (números reales) tales que los siguientes polinomios sean iguales:

a) $p(x)=a(3x-5)+b(2x-1)+cx^2$ y $q(x)=6-5x$
b) $p(x)=a(2x+1)+(bx+c)(2x-1)$ y $q(x)=(x+1)(4x+3)$

Nota: la igualdad de polinomios significa que son del mismo grado y PARA TODO VALOR DE X se verifica que $p(x)=q(x)$. Esto significa la igualdad de las expresiones algebraicas.

Notemos la diferencia con la resolución de ecuaciones. En una ecuación, también se plantea una igualdad, pero esa igualdad se verifica sólo para algunos valores que son sus soluciones o raíces.

Por ejemplo, cuando se pide resolver la ecuación $7(3x-5)+2(2x-1)+3x^2=6-5x$ se pide que se hallen, si existen, el o los valores de x que satisfacen esta igualdad, que obviamente NO se verifica para todo x.

Definición

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ se denomina **<u>función polinómica</u>**
de grado n.

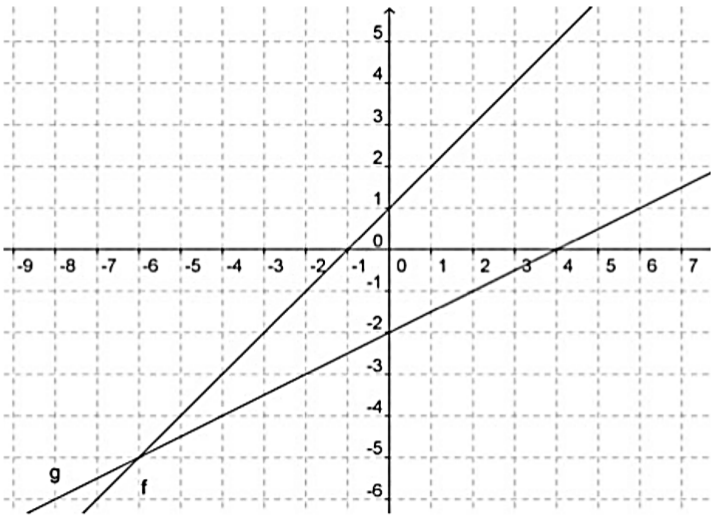
Las funciones lineal y cuadrática que hemos estudiado en las unidades anteriores son casos particulares de esta cuando n es menor o igual a 2 .

En esta unidad trabajaremos con funciones polinómicas de cualquier grado.

<u>Ejercicio Nº4</u>

Sean f y g dos funciones lineales, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x, $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

A partir de los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$ que se dan a continuación



a) Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso:

i. $h(0)=$ v. $h(-2)=$
ii. $h(2)=$ vi. $h(4)=$
iii. $h(6)=$ vii. $h(-8)=$
iv. $h(3)=$ viii. $h(4{,}5)=$

b) Decidir si $h(x)$ es negativa, positiva o cero:

i. $h(-10)=$ iv. $h(5)=$
ii. $h(-20)=$ v. $h(-2{,}5)=$
iii. $h(-1)=$

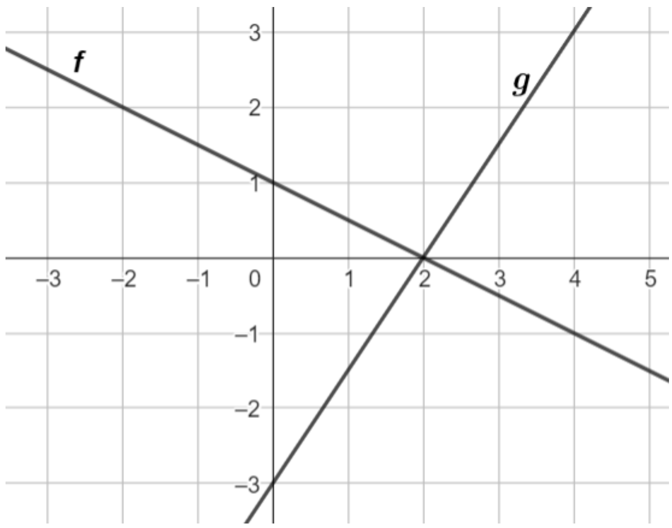
c) Hallar $h(-15)$.

d) Hallar la forma general de $h(x)$ y realizar un gráfico aproximado.

<u>Ejercicio Nº5</u>

En el siguiente sistema de coordenadas se da la representación gráfica de $f(x)$ y de $g(x)$, ambas funciones lineales. Definimos

$$h(x)=f(x)\cdot g(x).$$



a) Establecer el conjunto de valores de x para los cuales la función $h(x)$ es positiva, negativa o cero.

b) Proponer un gráfico aproximado de $h(x)$.

c) Escribir la forma factorizada y general de la función $h(x)$.

Llamamos **intervalo de positividad** de una función al subconjunto del dominio en el cual f es positiva, es decir $C^+(f)=\{x\in D_f/f(x)>0\}$

Análogamente, **intervalo de negatividad** de f: $C^-(f)=\{x\in D_f/f(x)<0\}$

Ejercicio Nº6

a) ¿Es cierto que siempre que “multiplicamos” dos rectas obtenemos una parábola?
b) ¿Cómo obtenemos los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la parábola a partir de los gráficos de las rectas?
c) ¿Es cierto que toda parábola puede ser escrita como el “producto” de dos rectas?
d) ¿Cómo deben ser las rectas para que su “producto” sea una parábola que tenga máximo?
e) ¿Cómo deben ser las rectas para que su “producto” sea una parábola con un cero doble? ¿Y con dos ceros simples?
Sugerimos usar geogebra.

Ejercicio Nº7

a) Se sabe que $h(x) = -8x^2 - 4x + 24$ es producto de dos funciones lineales $g(x)$ y $f(x)$. ¿Puede ser $g(x) = 2x + 4$? Si les parece que sí, encontrar f. Si les parece que no, justificar.
b) Estudiar la misma situación del ítem a) si $h(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 9$ y $g(x) = x + 2$.

División de polinomios

Dados p(x) y q(x) dos polinomios, $q(x) \neq 0$ y $gr[p(x)] \geq gr[q(x)] \Rightarrow$ existen y son únicos c(x) y r(x) tales que: $p(x) = q(x).c(x) + r(x)$, siendo:
p(x) el dividendo, q(x) el divisor, c(x) el cociente y r(x) el resto, verificandose que gr r(x)<gr q(x) ó r(x)=0.

<u>Ejemplo:</u>
Sean $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$
Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de x y el dividendo debe completarse.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
-x^4 + 2x^3 - x^2 & x^2 - 3 \\
\hline
-3x^2 + 0x - 3 & \\
3x^2 - 6x + 3 & \\
\hline
-6x &
\end{array}
$$

Así, el cociente es $C(x) = x^2 - 3$ y el resto $R(x) = -6x$

Ejercicio Nº8

Dividir $a(x)$ y $b(x)$, en cada caso:
a) $a(x) = 3x^3 - 2x^5 - 2x^2 - 2x + 5$ y $b(x) = x^3 - x + 2$

b) $a(x) = 5x^4 - 2x^5 - x^2 + 1$ y $b(x) = -2x^2 - x$

c) $a(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ y $b(x) = -x + 1$

Regla de Ruffini

Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio por otro que guarda la forma: $x - a$ con a número real.

Ejemplos:

I] Hallar el cociente y el resto de la división

$$(-6x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2) : (x + 1)$$

La disposición práctica es la siguiente:

			-6	2	-1	-1	2
			coeficientes del dividendo				
opuesto del termino ind. del div.		-1		6	-8	9	-8
	o sea, "a"		-6	8	-9	8	-6
			coeficientes del cociente				resto

$C(x) = -6x^3 + 8x^2 - 9x + 8 \quad R(x) = -6$

II] $(7x^4 + 1 - 2x^2) : (x - 3)$

	7	0	-2	0	1
3		21	63	183	549
	7	21	61	183	550

$C(x) = 7x^3 + 21x^2 + 61x + 183 \quad R(x) = 550$

Notas:

a) En todos los casos de división entre un polinomio p(x) y un binomio de la forma $x - a$ el resto es una constante. Justificar.

b) Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es divisible por el divisor.

Ejemplos:

I] (x^2-9): (x-3)

c(x)=x+3 r(x)=0

$x^2-9=(x-3)(x+3)$ hemos factorizado el dividendo

II] Polinomios ya factorizados:

$y=x^2(x-1)$ es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son $x_1=0$ (doble) y $x_2=1$ (simple)

$y=2x(x-1)^2(x+2)^3$ es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son $x_1=0$ (simple) $x_2=1$ (doble) y $x_3=-2$ (triple)

$y=x(x+1)(x^2+1)$ es una función polinómica de grado 4. Tiene solo 2 ceros reales x=0 y x=-1

Teorema del resto

El resto de la división p(x) : (x-a) con a real es r=p(a)

Lo demostraremos:

p(x)	x-a
r	q(X)

p(x)=(x-a).q(x)+r

p(a)=(a-a)q(a)+r=r

Ejemplo: Siendo $p(x)=x^3+kx^2-kx-9$ determinar k para que –3 sea raíz de p(x).

$p(-3)=0=(-3)^3+k(-3)^2-k(-3)-9$ k=3

O sea $p(x)=x^3+3x^2-3x-9$ es divisible por (x+3), o sea por (x-(-3))

IMPORTANTE:

$$Si\ P(a)=0 \leftrightarrow x=a\ es\ raíz\ de\ P(x)$$
$$\leftrightarrow P(x)\ es\ divisible\ por\ (x-a)$$
$$\leftrightarrow P(x)=(x-a)\cdot C(x)$$

Podría factorizarlo:

	1	3	-3	-9
-3		-3	0	9
	1	0	-3	0

$p(x)=(x+3)(x^2-3)$

Ejercicio Nº9

Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre a(x) y b(x). Verificar utilizando el teorema del resto.

a) $a(x)=x^5+2x^3-2x^2+1$ $b(x)=x-2$

b) $a(x)=-\frac{1}{2}x^3+x-1$ $b(x)=x+2$

c) $a(x)=x^3+m^3$ $b(x)=x+2$

d) $a(x)=16x^4+1$ $b(x)=x+1$

e) $a(x)=-x+2-x^2+x^5$ $b(x)=x-\frac{1}{2}$

f) $a(x)=mx^4-m^5$ $b(x)=x-m$

g) $a(x)=(x-3)^2-2(x+1)$ $b(x)=2x-(x-1)$

Ejercicio Nº10

Calcular m para que a(x) sea divisible por b(x)

a) $a(x)=x^4-mx^2+1$ y $b(x)=x+1$

b) $a(x)=-x^3+mx^2-mx+2$ y $b(x)=x+2$

c) $a(x)=2x^2-3x-9$ y $b(x)=x-m$

Ejercicio Nº11

Sea $a(x)=2x^4-x^2+mx-m$, calcular "m" sabiendo que la diferencia de los restos de su división por (x+m) y (x-m) es igual a -1.

Ejercicio Nº12

Calcular el valor de a, si r es el resto de p(x):q(x)

a) $p(x) = 4x^3-x^2+ax-2$, $q(x) = x-2$, r = 26

b) $p(x) = 5x^4+ax^2+ax^3+3x^2$, $q(x) = x-3$, r = 0

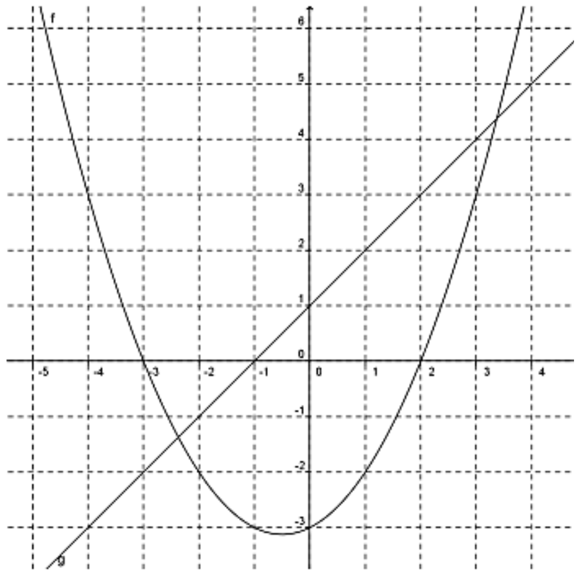
c) p(x) = $3ax^4+(a+1)x^3+2x^2$,   q(x) = x+1, r = -1

Ejercicio Nº13

En una división de polinomios se cumple que:
divisor: $2x^2+x+5$
cociente: x^2+x
resto: x+6
hallar el polinomio dividiendo.

Ejercicio Nº14

A continuación se dan los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$.
Considerar la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.



a) Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso:

i. $h(1) =$ iv. $h(-2) =$
ii. $h(0) =$ v. $h(3) =$
iii. $h(-3) =$ vi. $h(-4) =$

b) Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso:

i. $h(6) =$ iv. $h(0) =$
ii. $h(1{,}5) =$ v. $h(-2{,}5) =$
iii. $h(-4) =$ vi. $h(-20) =$

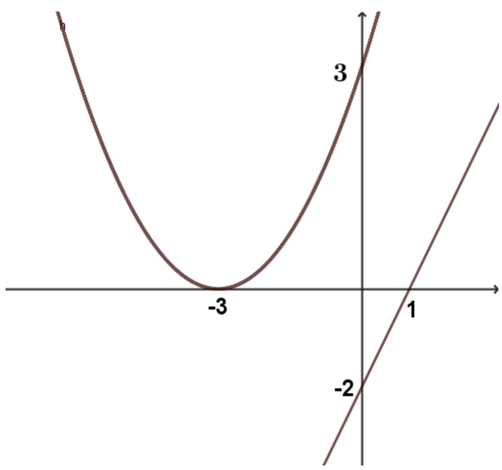
c) Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.

d) Hallar la forma factorizada y general de $h(x)$ y realizar un gráfico aproximado.

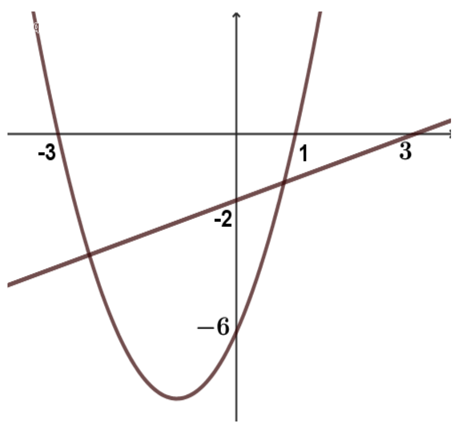
Ejercicio Nº15

A partir de la información dada en cada uno de los gráficos, hallar la expresión factorizada de cada función $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a)

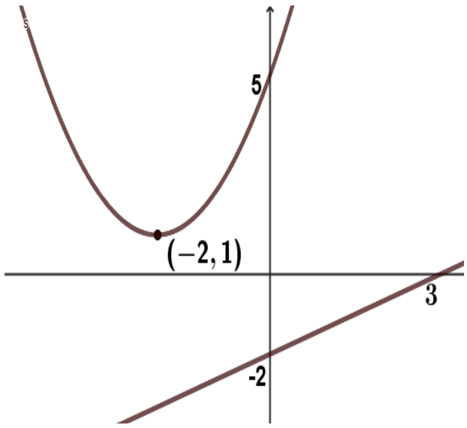


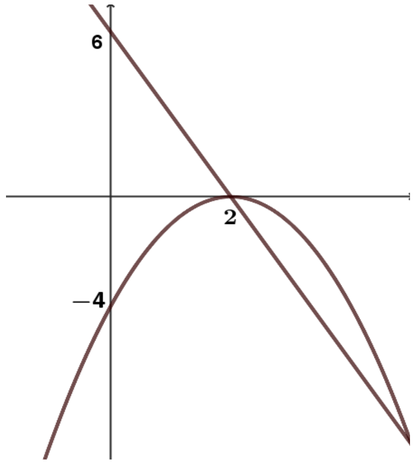
b)



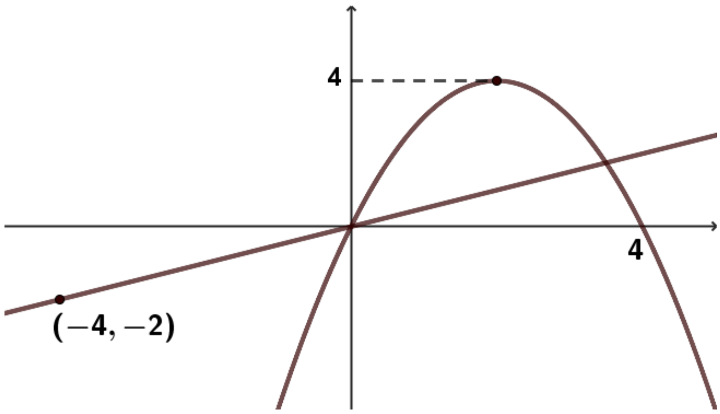
c)

d)





e)



- **Sobre los ceros (o raíces) de una función polinómica:**

  Los ceros de una función polinómica son las raíces de la ecuación:
  $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$
  Si esta ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, <u>simple o múltiple de orden impar,</u> la gráfica de f atraviesa al eje x en x_0.
  Si la ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, <u>múltiple de orden par,</u> la gráfica de f no atraviesa al eje x en x_0.

  Ejemplo:
  Dada la función polinómica: $f(x) = x^3 - 3x$ deseamos conocer los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores positivos o negativos.

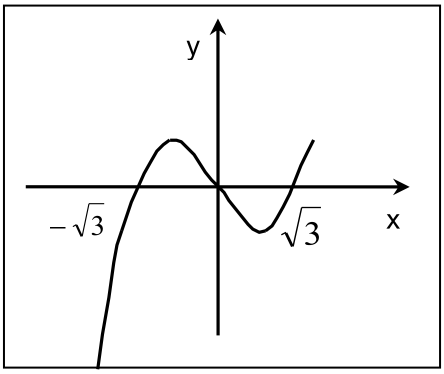
  $$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$$

  Ceros: x=0 x=$\sqrt{3}$ x=$-\sqrt{3}$
  Son tres ceros simples ⇒ la gráfica de f atraviesa al eje x en cada uno de ellos.

  Completar la tabla con signo + si la función es positiva y signo – si es negativa.

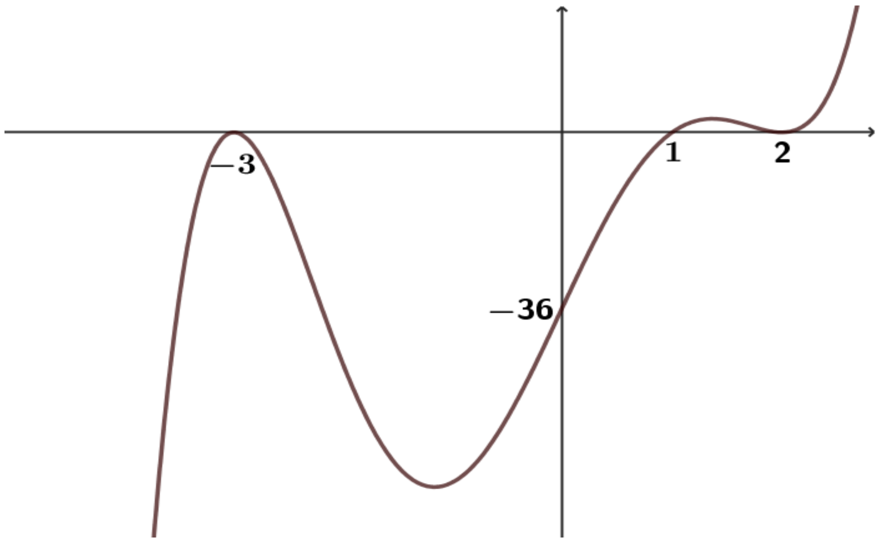
	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f(x)							

Si además de esto pudiéramos encontrar los máximos y mínimos podríamos dibujarla.
(la función polinómica es continua)



Ejercicio N°16

Escribir un polinomio P(x) cuyo gráfico sea el siguiente. ¿Es único?



Ejercicio Nº17

En cada caso, hallar, si existe, la fórmula de una función cúbica h que verifique lo pedido. Si les parece que no existe explicar por qué:

a) Las raíces son -5, -2 y 4, y h toma valores negativos para x mayores que 4. ¿Es única?

b) Las raíces son -3, 2 y 8 y el gráfico de h corta al eje de las y en 12. ¿Es única?

c) Las raíces son solamente 0 y -1 y $h(1) = 10$. ¿Es única?

d) que tenga un solo cero y esté en $x = 7$. ¿Es única?

e) que tenga un solo cero, que esté en $x = 7$ y que sea una raíz simple. ¿Es única?

f) que tenga un cero doble en $x = -5$. ¿Es única?

g) que tenga como única raíz $x = -5$ y que su orden de multiplicidad sea 2.

h) que tenga ceros en $x = -\frac{1}{5}, x = 3, x = -3$ y en $x = 0$.

i) que no tenga ceros.

Ejercicio Nº18
La función $h(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$ es el produto de $g(x)$ y $f(x)$.
a) ¿Puede ser que una de ellas sea $g(x) = -2x - 1$? Si les parece que sí encuentren f. Si les parece que no, justificar.
b) ¿Y si fuera $g(x) = x - 1$?
c) Si es posible, escribir $h(x)$ como produto de tres lineales. De no ser posible, explicar por qué.

Ejercicio Nº19
Dadas las funciones:

$h_1(x) = x^3 - 2x^2 + x$ $\qquad$ $h_2(x) = -2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$

$h_3(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$ $\qquad$ $h_4 = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

a) ¿Todas estas funciones tienen por raíz $x = 1$? Usando este dato busquen, si es posible, una recta y una parábola cuyo producto sea h.
b) Si es posible, escribir las funciones polinómicas dadas como producto de tres lineales. De no ser posible, explicar por qué.
c) Realizar un gráfico aproximado de cada función h.

Ejercicio Nº20
Escribir un polinomio que cumpla con las condiciones pedidas.
a) de grado 4 que tenga como únicas raíces a: –1 y 2.
b) de grado 4 que tenga al menos 2 raíces simples reales: –1 y 2.

Ejercicio N°21
Escribir, en cada caso, un polinomio que cumpla las siguientes condiciones:
a) de grado 8 tal que –1 es una raíz de multiplicidad 3, cero sea una raíz de multiplicidad 5 y cuya gráfica pase por el punto $(-2; -8)$.
b) de grado 5 tal que sus únicas raices reales sean x= 1 de multiplicidad 2 y x= -2 de multiplicidad 1 y ademas p (-1) = 3

Ejercicio N°22
Mostrar que 1 es una raíz de multiplicidad 3 de $p(x)=x^4+x^3-9x^2+11x-4$. Encontrar la otra raíz.

Ejercicio N°23
Sea $P(x) = a \cdot (x + 7) \cdot (x - 1) \cdot (x + m)$ un polinomio de grado 3, hallar $a, m \in R$ sabiendo que $C^+ = (-\infty; -7)$ y $P(0) = -14$.

Ejercicio N°24
Determinar una función polinómica y graficar aproximadamente:
a) de grado 4 sabiendo que $C^0 = \{2; 4\}$, $C^- = \emptyset$ y $f(3) = \frac{1}{2}$.
b) de grado 3 sabiendo que $C^- = (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$ y la ordenada al origen es $y = -9$.
c) de grado mínimo, cuya ordenada al origen sea $y = -10$, sus únicas raíces sean -5, -1, 3 y 4, y $C^+ = (-5; -1) \cup (4; +\infty)$.

d) de grado 4 cuyo conjunto de negatividad es $C^- = (-3; 0)$; su coeficiente principal es $1/90$, $P(2) = 4/9$ y todas sus raíces son reales.
e) de grado 4 cuyo $C^+ = \emptyset$, $C^- = R$ y pasa por el punto $(0; -5)$.

Factorización de un polinomio

Cuando b es un cero o raíz de un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,
(x-b) es divisor de p(x), luego p(x) podría factorizarse como:
p(x)=(x-b)q(x), siendo q(x) el cociente de la división
Es posible que q(x) tenga más raíces con lo que puede iterarse el proceso factorizando q(x).
Es decir, p(x) puede descomponerse en más factores si conocemos todas sus raíces reales.

$$p(x) = a_n(x - b_0)(x - b_1)\ldots\ldots(x - b_n)$$

<u>Ejemplo</u>: la factorización de una función polinómica de grado 3 cuyos ceros son $x_1=0$ $x_2=1$ y $x_3=-2$, es:
y=a.x.(x-1).(x+2)

El valor de "a" no está determinado, por lo tanto existen infinitas funciones que cumplen con la condición. Podemos obtener una de ellas dándole un valor cualquiera a "a"no nulo.
Si se pidiese que la función sea tal que además cumpla que f(2)=4
f(2)=a.2(2-1)(2+2)=4⇒ $a = \frac{1}{2}$, es decir, "a" queda determinado

$$y = \frac{1}{2}x(x-1)(x+2)$$

<u>Nota aclaratoria</u>:
Un polinomio de grado no nulo es <u>primo</u> cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. Son primos únicamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales. Cuando un polinomio no es primo es <u>compuesto</u>.

Teorema de Gauss

Sea $m(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio en el cual sus coeficientes son <u>números enteros.</u> Si existen raíces racionales de m(x), entonces dichas raíces son de la forma $\frac{p}{q}\ donde \begin{cases} p\ divide\ a\ a_0 \\ q\ divide\ a\ a_n \end{cases}$ con p y q primos entre sí y $a_0 \neq 0$.
Si bien las raíces de un polinomio de las características enunciadas pueden no ser racionales, el teorema de Gauss permite buscar fácilmente sólo las que lo son, logrando una factorización del polinomio *m(x)*.

<u>Ejemplos</u>**:**
I] Factorizar $p(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$
Vemos que $a_n=1$ y $a_0=12$.

divisores de $a_0 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$
divisores de $a_n = \{\pm 1\}$
$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

Por ser $a_n=1$ vemos que los divisores de 12 son las posibles raíces de *m(x)*
m(1)=0⇒ $1 \quad es \quad raíz$

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0

m(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)

Buscamos las raíces de $x^3+3x^2-4x-12$
Probemos con 1: 1+3-4-12≠0, 1 no es raíz
Probemos con –1: $(-1)^3+3(-1)^2-4(-1)-12 \neq 0$, -1 no es raíz
Probemos con 2 : $2^3+3.2^2-4.2-12=0$, 2 es raíz

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

m(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)
factorizamos el trinomio de segundo grado: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$
Luego, la factorizaci'on resulta

m(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)

II] m(x)=3x^3+8x^2-2x-4. Se ve que a_n=3 y a_0=-4
Buscamos los divisores de 4 y de 3.

Cualquier raíz debe estar entre los números: $\pm\frac{2}{3}$, ± 2, $\pm\frac{1}{3}$, ± 1, ± 4, $\pm\frac{4}{3}$
De estas 12 posibles sólo 3 pueden ser raíces de la ecuación $3x^2+8x^2-2x-4=0$

$$m\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

	3	8	-2	-4
-0.67		-2	-4	4
	3	6	-6	0

$$m(x)=(x+\frac{2}{3})(3x^2+6x-6)$$

Factorizamos el trinomio de segundo grado

$$3x^2+6x-6=3\left(x-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)$$

y vemos que sus raíces no son racionales, no hubieran surgido de Gauss: se puede probar que ninguno de los otros 11 valores es raíz del polinomio.
Hemos factorizado el polinômio $m(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$

Ejercicio N°25

Factorizar
a) $x^2-2x+3+(x+1)^2$
b) x^4-5x^2+4

c) $-4x^4 + 12x^2 - 9$

d) $x^4 - 64$

e) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$

f) $8x^4 - x$

g) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

h) $x^5 - 2x^4 + 3x - 6$

i) $\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{6}$

j) $t(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$

k) $r(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 8x + 8$

Ejercicio N°26

Determinar las raíces de los polinomios, establecer la multiplicidad de cada raíz y graficar aproximadamente.

a) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2$

b) $t(x) = x^3(x^2 - 4)^2$

c) $q(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

d) $r(x) = (2x^2 - 4x + 2)(x^4 - x^2 - 12)$

❖ Clasificación de Funciones

Función inyectiva: Una función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada B.

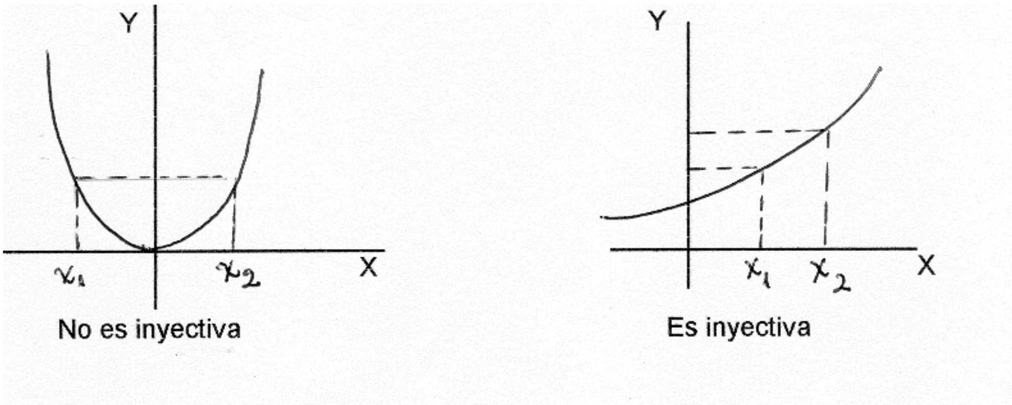
En símbolos:

$\forall x_1, x_2 \in A: (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

o bien, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede interceptar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del conjunto imagen puede ser imagen de más de un elemento del dominio.

Nótese que f es inyectiva⇔f es estrictamente creciente (o estrict. decreciente).



Función sobreyectiva: Una función $f: A \to B$es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen preimagen en el dominio A. Dicho con otras palabras el conjunto B y el conjunto imagen de f deben coincidir.

$$\forall y \in B \; \exists x \in A / y = f(x)$$

Función biyectiva: Una función es biyectiva⇔es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

Ejercicio N°27

Sea la función cuya fórmula es $f(x) = x^2 - 4$.

a) Graficar.

b) Unir con flechas según corresponda:

si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	f no es inyectiva ni sobreyectiva
si $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$	f no es función
si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$	f no es inyectiva pero es sobreyectiva
si $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$	f es inyectiva pero no es sobreyectiva

c) Indicar un par de conjuntos A y B para que: $f: A \to B / f(x) = x^2 - 4$ sea función biyectiva.

Ejercicio N°28

Proponer el gráfico de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$inyectiva y no sobreyectiva.

Ejercicio N°29

Dados A= {1, 2, 3} y B={3,7}

a) Definir, si es posible, una $f: A \to B$ que sea:

a.1) Sobreyectiva

a.2) Inyectiva

b) Se puede definir en estos conjuntos una función biyectiva?

Explicar la respuesta

c)¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos para que se pueda definir una función biyectiva entre ambos?

❖ Función Inversa

Se denomina **relación inversa** de una función f definida de A en B, a la que se obtiene de invertir los pares de f y se denomina f^{-1} .
Es decir dada f definida de A en B, cuya gráfica está constituída por los pares (a,b), la relación inversa de f (f^{-1}) está constituída por los pares (b,a). Esta relación queda definida de B en A y no siempre es función en dichos conjuntos.
Por ejemplo: Si A={1, 2, 3} y B={3,7} y $f: A \to B$ / f= {(1,3), (2,3), (3,7)}, su relación inversa $f^{-1}: B \to A$, f^{-1}= {(3,1), (3,2), (7,3)} No es función de B en A.

Qué condiciones debe cumplir una función $f: A \to B$ para que su relación inversa sea función de B en A?

Si la función admite función inversa y existe una expresión analítica a través de una fórmula y=f(x), para hallar la expresión analítica de la inversa cambiamos x por y, e y por x (es decir invertimos los pares), y despejamos la variable ¨y¨, si es posible.

Ejercicio N°30

Dada la función f:$\mathbb{R}_0^+ \to [2, +\infty)/f(x) = x^2 + 2$. Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

Ejercicio N°31

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3$ .Clasificarla y hallar, si existe, su inversa. Representar.

Los gráficos de funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, o sea la recta y=x siempre que la escala utilizada en ambos ejes sea la misma.

Ejercicio N°32

Dadas las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,

- Hallar los ceros,
- escribir los intervalos de positividad y
- estudiar paridad.
- Graficar aproximadamente.
- Indicar conjunto imagen.

a) $f(x) = x^3 + 2$
b) $f(x) = (x + 2)^3$
c) $f(x) = (x - 1)^3 + 2$
d) $f(x) = -x^3$
e) $f(x) = 2x^3$
f) $f(x) = x^4$
g) $f(x) = -x^4 + 3$

Clasificar las funciones del ejercicio 7 cuando están definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Indicar, cuando sea necesario, restricciones en los conjuntos para que sean biyectivas.
En esos conjuntos, definir las funciones inversas.

Respuestas

1. Son polinomios: a) d) e) g) h) i)

2.

Polinomio	Ordenado y completo	Grado	CP	TI
a	$x^4+0x^3-2x^2+0x+\frac{1}{2}$	4	1	$\frac{1}{2}$
b	$x-1$	1	1	-1
c	-3	0	-3	-3
d	0	No tiene	X	0
e	$-\frac{3}{4}x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0$	5	$-\frac{3}{4}$	0
f	$\sqrt{2}x^2+0x-\sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$
g	$\sqrt{2}x^2+0x+\sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
h	$-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. **a)** a=-1 b=-1 c=0 **b)** a=15/4 b=2 c=3/4

4. a)

i. $h(0)=2$ v. $h(-2)=3$
ii. $h(2)=-3$ vi. $h(4)=0$
iii. $h(6)=7$ vii. $h(-8)=42$
iv. $h(3)=-2$ viii. $h(4{,}5)=11/8$

b) Decidir si $h(x)$ es negativa, positiva o cero:

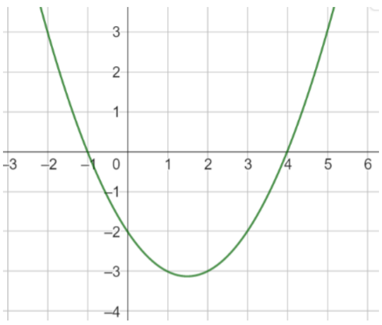
i. $h(-10)=positiva$ iv. $h(5)=cero$
ii. $h(-20)=positiva$ v. $h(-2{,}5)=positiva$
iii. $h(-1)=cero$

c) $h(-15)$=133.

d) $h(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$

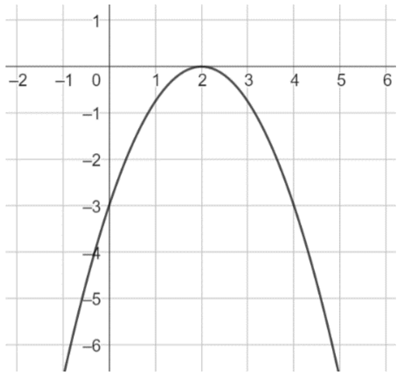
5. a) $C^+=\emptyset$, $C^-=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ y $C^0=\{2\}$

b)



c) Forma factorizada: $h(x) = -\frac{3}{4} \cdot (x-2)^2$

Forma general: $h(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 3$



6. a) Sí.

b) Los ceros coinciden con los ceros de ambas rectas.

Para obtener el conjunto de positividad y negatividad debemos multiplicar los signos de las imágenes de las funciones lineales entre los intervalos determinados por los ceros de las funciones.

c) No, si la parábola no tiene raíces reales no será posible.

d) Una recta debe ser creciente y la otra decreciente.

e) Ambas rectas deben tener la misma raíz. Ambas rectas deben tener distintas raíces.

7. a) $f(x) = -4x + 6$ b) No es posible.

8. a) Cociente: $-2x^2 + 1$ Resto: $2x^2 - x + 3$

b) Cociente: $x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ Resto: $-\frac{1}{4}x + 1$

c) Cociente: $x^2 - x$ Resto: 1

9. a) Cociente: $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 20$ Resto: 41

b) Cociente: $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ Resto: 1

c) Cociente: $x^2 - 2x + 4$ Resto: $m^3 - 8$

d) Cociente: $16x^3 - 16x^2 + 16x - 16$ Resto: 17

e) Cociente: $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{23}{16}$ Resto: $\frac{41}{32}$

f) Cociente: $mx^3 + m^2x^2 + m^3x + m^4$ Resto: 0

g) Cociente: $x - 9$ Resto: 0

10. a) $m = 2$

b) $m = -5/3$

c) $m = 3 \quad o \quad m = -\frac{3}{2}$

11. $m_1 = \sqrt{2}/2 \qquad m_2 = -\sqrt{2}/2$

12. **a)** a=0 **b)** a= -12 c) a = -1

13. $2x^4+3x^3+6x^2+6x+6$

14.

a)

i. $h(1)=-4$ iv. $h(-2)=2$

ii. $h(0)=-3$ v. $h(3)=12$

iii. $h(-3)=0$ vi. $h(-4)=-9$

b) Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso:

i. $h(6)=positiva$ iv. $h(0)=negativa$

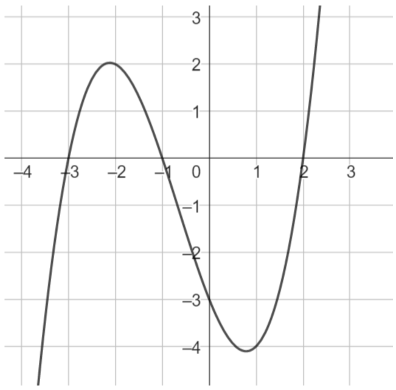
ii. $h(1{,}5)=negativa$ v. $h(-2{,}5)=positiva$

iii. $h(-4)=negativa$ vi. $h(-20)=negativa$

c) $C^+=(-3;-1)\cup(2;+\infty)$, $C^-=(-\infty;-3)\cup(-1;+2)$ y $C^0=\{-3;-1;2\}$

d) Forma factorizada: $h(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-2)$

Forma general: $h(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{5}{2}x-3$



15. a) $h(x)=\frac{2}{3}(x+3)^2(x-1)$

b) $h(x)=\frac{4}{3}(x+3)(x-1)(x-3)$

c) $h(x)=\frac{2}{3}(x-3)(x^2+4x+5)$

d) $h(x)=3(x-2)^3$

e) $h(x)=-\frac{1}{2}x^2(x-4)$

16. $f(x)=1\cdot(x+3)^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)^2$. No es la única posibilidad, lo importante es que -3 y 2 sean raíces de multiplicidad par y 1 sea raíz de multiplicidad impar. Una vez definida la multiplicidad de cada raíz hay que hallar el valor del coeficiente principal correspondiente.

17. a) Por ejemplo, $h(x)=2\cdot(x+5)(x+2)(x-4)$. No es única.

b) $h(x)=1/4\cdot(x+3)(x-2)(x-8)$ Única

c) Por ejemplo, $h(x)=5x^2(x+1)$. No es única.

d) Por ejemplo, $f(x)=(x-7)^3$ o $f(x)=(x-7)\cdot(x^2+1)$ No es única.

e) Por ejemplo, $f(x)=(x-7)\cdot(x^2+1)$ No es única.

f) Por ejemplo, $f(x)=(x+5)^2(x-3)$ No es única.

g) No es posible.

h) No es posible ya que una función cúbica no puede tener 4 raíces.

i) No es posible. Las funciones de grado impar siempre tienen alguna raíz real simple.

18. a) No es posible.

b) Si es posible. $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$.
c) Por ejemplo, $h(x) = (x-1)(-2x+6)(x+2)$

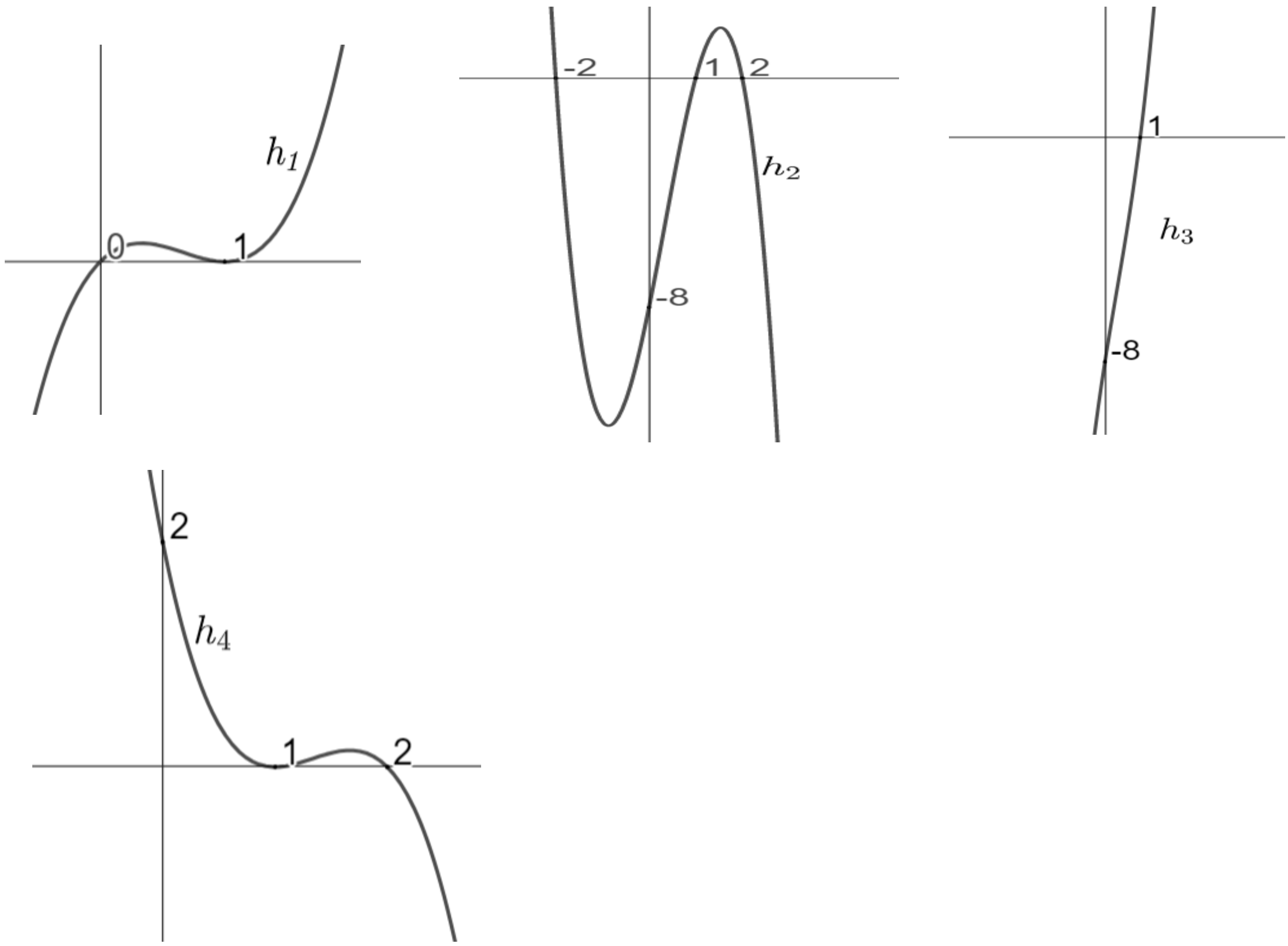
19. a)

$h_1(x) = (x-1)(x^2 - x)$
$h_2(x) = (x-1)(-2x^2 + 8)$
$h_3(x) = (x-1)(2x^2 + 8)$
$h_4(x) = (x-1)(-x^2 + 3x - 2)$

b)

$h_1(x) = (x-1)x(x-1)$
Por ejemplo, $h_2(x) = (x-1)(-2x-4)(x-2)$
$h_3(x)$ No es posible
Por ejemplo, $h_4(x) = (x-1)(x-2)(-x+1)$

c)



20.

a) Hay varias posibilidades

$$a(x+1)^3(x-2); a \in R; a \neq 0$$

$$a(x+1)(x-2)^3; a \in R; a \neq 0$$

$$a(x+1)^2(x-2)^2; a \in R; a \neq 0$$

b) Hay infinitas posibilidades: a(x+1)(x-2)(x-h)(x-k) con h y k reales, a real no nulo.

21. $a)\ P(x) = -\frac{1}{4}x^5.(x+1)^3$ b) $P(x) = \frac{3}{8}(x+2).(x-1)^2(x^2+1)$ por ejemplo

22.
$-3/16(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$, hay infinitas posibilidades porque el último factor, si bien tiene que ser un polinomio sin raíces reales, puede elegirse en forma diversa.
La otra raíz se halla igualando a cero el último cociente: x=-4

23. $P(x) = -2(x+7).(x-1)^2 \qquad a = -2 \quad y\, m = -1$

24. a) $f(x) = 1/2(x-2)^2(x-4)^2$
b) $f(x) = (x+3)^2(x-1)$
c) $f(x) = \frac{1}{18}.(x+5).(x+1)(x-3)^2.(x-4)$
d) $f(x) = \frac{1}{90}.x^3.(x+3) \quad o \quad f(x) = \frac{1}{90}.x.(x+3).(x-4)^2$
e) Por ejemplo: $f(x) = -\frac{5}{2}.(x^2+1).(x^2+2)$

25.
a) $2(x^3+2)$

b) $(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$

c) $-4\left(x-\sqrt{6}/2\right)^2\left(x+\sqrt{6}/2\right)^2$

d) $\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)(x^2+8)$

e) $(x+1)^2(x*1)^4$

f) $8x(x-1/2)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{4}$

g) $(x-3)(x+3)(x-1)^2$

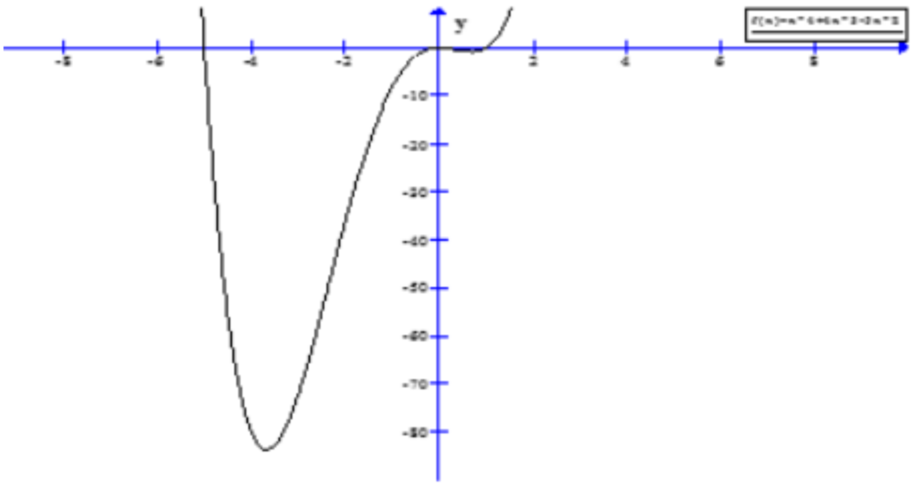
h) $(x^4+3)(x-2)$

i) $2/3(x+1/2)(x+1/4)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

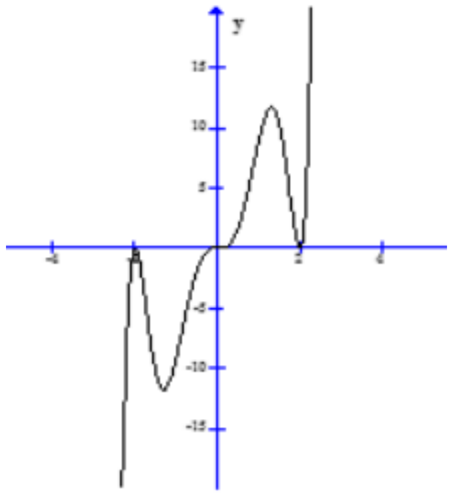
j) $3(x-2)(x+2)(x-1/3)$

k) $1/2(x-2)(x+2)(x-1)(x^2+4)$

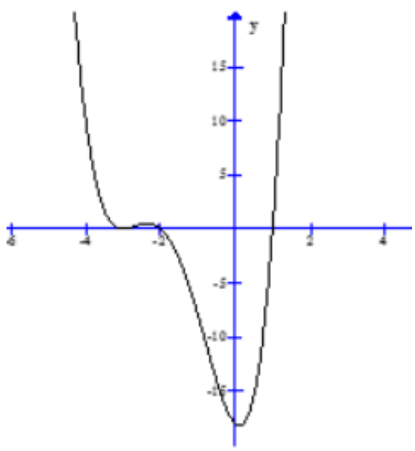
26.a)
Ceros: 0, raíz doble
1 y -5 raíces simples
La gráfica "rebota" en 0 y "atraviesa" el eje x en -5 y 1.



b) Ceros: 0 raíz triple
2 y -2 raíces dobles
La gráfica "rebota" en -2 y 2 y "atraviesa" el eje x en 0.

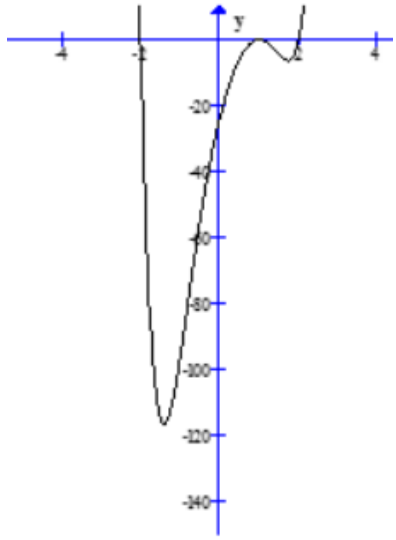


c) Ceros: -3 raíz doble
1 y 2 raíces simples
La gráfica "rebota" en -3 y "atraviesa" el eje x en -2 y 1.



d) Ceros: 1 raíz doble
2 y -2 raíces simples
Hay dos raíces no reales

La gráfica "rebora" en 1 y "atraviesa" el eje x en -2 y 2.



27. b) Las funciones son respectivamente:
No inyectiva, no sobreyectiva, Inyectiva, no sobreyectiva,
No es función
c) Los conjuntos A y B no son únicos, una posibilidad es: A = R_0^+ B = [-4; +∞)

28. Son funciones i) ii) iv) v) . i) y iv) son sobreyectivas pero no inyectivas; ii) es biyectiva; v) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

29. a) a.1) por ejemplo f (1) = 3 ; f (2) = 3; f (3) = 7
a.2) imposible.

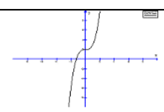
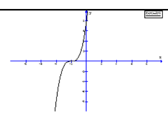
b) No, porque no puede definirse una función inyectiva.

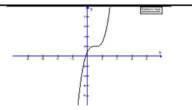
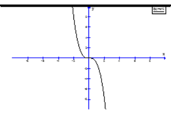
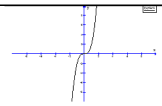
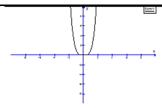
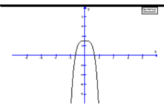
c) Ambos conjuntos deben tener la misma cantidad de elementos.

30. Biyectiva. $f^{-1}:[2,+\infty)\to\Re_0^+ / f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

31. Biyectiva. $f^{-1}:\Re\to\Re / f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

32. Sea f definida en R.

	C^0	C^+	C^-	gráfico	par	impar	imagen
a	$\{-\sqrt[3]{2}\}$	$(-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
b	$\{-2\}$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;-2)$		No	No	R

c	$\{1-\sqrt[3]{2}\}$	$(1-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;1-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
d	$\{0\}$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$		No	Si	R
e	$\{0\}$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$		No	Si	R
f	$\{0\}$	$R-\{0\}$	ϕ		Si	No	[0;+oo)
g	$\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\}$	$(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3})$	$(-\infty;-\sqrt[4]{3})\cup(\sqrt[4]{3};+\infty)$		Si	No	(-oo;3]