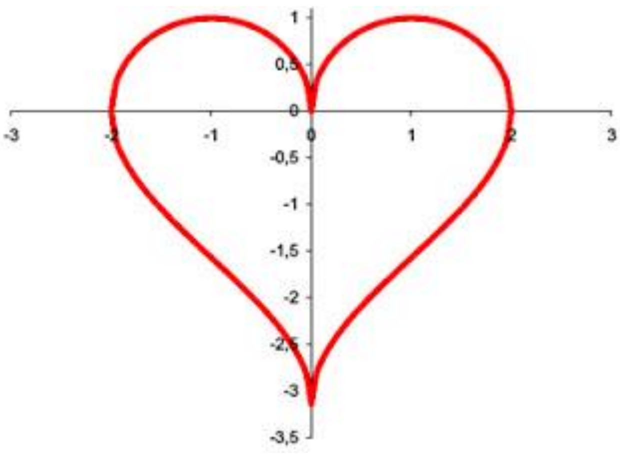
Colegio Nacional de Buenos Aires

MATEMÁTICA DE 3er AÑO

Guía de Trabajos Prácticos



2023

Unidad 5: Funciones racionales no enteras o fraccionarias y funciones irracionales

Expresiones y funciones racionales

La expresión $\frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, se denomina expresión algebraica racional.

Una función racional es una función que asigna imágenes a través de una expresión racional.

$f: A \to \mathbb{R}/f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ siendo $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que $q(x)$ es de grado mayor o igual que 1 y $A = \{x/x \in \mathbb{R}\ y\ q(x) \neq 0\}$

Ejemplo de función racional:

$$f: \mathbb{R} - \{-2; 2\} \to \mathbb{R}/f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 7}{x^2 - 4}$$

Ejercicio Nº1

Hallar el dominio más amplio en $\mathbb{R}$, los ceros y representar:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{-x^2 + 9}$

c) $f(x)= \dfrac{x^2 - 4}{3x^3 - x^2 - 12x + 4}$

Casos particulares de funciones racionales:

a) Cuando el numerador y el denominador tienen raíces comunes, pueden factorizarse y simplificarse, obteniendo una expresión más sencilla. Sin embargo, el dominio mayorante de la función sigue siendo el conjunto de los números Reales de los cuales se excluyen los puntos que anulan el denominador de la función dada.

Por ejemplo: $f: \Re - \{3\} \to \Re / f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x - 3}$

Esta fracción puede simplificarse pues $x \neq 3$ f(x)=x+3. Tiene por gráfica a una **recta** de ecuación y=x+3 excluído el punto (3,6).

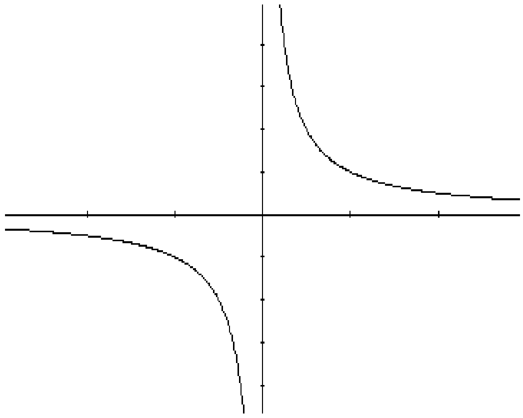
b) **Función homográfica**: $f: \Re - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \Re /\ f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d} \qquad c \neq 0$

La consideramos función homográfica siempre que no pueda reducirse a una función constante. ¿En qué caso se produciría esta situación?

Notemos que R no es el conjunto imagen. Hallar el conjunto imagen.

La gráfica de la función homográfica es una curva llamada **hipérbola equilátera**.

Estudio de la función homográfica



Sea la función homográfica que surge de la definición con a=0, b=1, c=1 y d=0

$$y = \frac{1}{x}$$

Conforme los valores de x están más próximos a cero, el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que el valor absoluto de f(x) tiende a infinito cuando x se acerca a cero), en símbolos

$$|f(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$$

Entonces diremos que el eje y, de ecuación x=0, es asíntota vertical de la curva.

En general, diremos que la recta de ecuación x=a es una asíntota vertical de la curva gráfica de f, cuando $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} \infty$

Volviendo al gráfico, vemos que a medida que x crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a cero. $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

Diremos que el eje x, de ecuación y=0, es asíntota horizontal al gráfico de f(x).

En general, diremos que la recta de ecuación y=b es una asíntota horizontal de la curva gráfica de f, cuando $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} b$

Las asíntotas (en este caso los ejes coordenados) son perpendiculares, por eso se llama hipérbola equilátera (sólo este tipo de hipérbola será objeto de estudio en este curso) y se cortan en un punto que es el centro de simetría de la curva. La hipérbola tiene 2 ramas que en este caso están situadas en el 1er y 3er cuadrante (recordemos que los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del semieje positivo de las x)

Si representamos f(x)=$-\frac{1}{x}$ las ramas estarían en el 2do y 4to cuadrante.

Conociendo la gráfica de f(x)=$\frac{1}{x}$ puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos la gráfica de :

$$f(x)=\frac{k}{x-x_0}+y_0 \quad \text{(forma canónica)}$$

La gráfica de esta función es una hipérbola que se obtiene de la gráfica de f(x)=$\frac{k}{x}$ desplazándola x_0 unidades en el sentido positivo de x (si x_0>0) y y_0 unidades en el sentido positivo de y (si y_0>0)

Si la función está dada en la forma $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ puede llevarse a la forma canónica $f(x)=\frac{k}{x-x_0}+y_0$ de dos maneras:

Veamos un ejemplo:

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}$$

- **Completando los términos para simplificar y obtener la forma canónica**

$$f(x)=\frac{\frac{1}{3}(3x+3)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2+1)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)}{3x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}\text{, } sacando\ \ factor\, comun\, 3\, y\, operando$$

$$con\, el\ numerador\, 1/3{:}3=1/9\text{, tenemos }\ f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

- **O bien, dividiendo los polinomios se obtiene cociente $\frac{1}{3}$ y resto $\frac{1}{3}$**

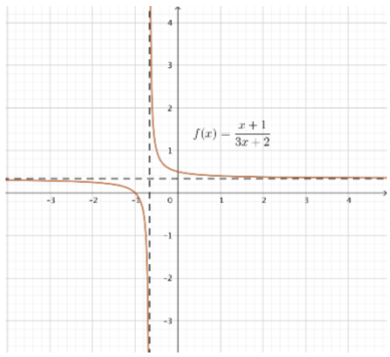
Por ser una división entera $x+1=\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}$

Dividiendo miembro a miembro por 3x+2

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$av: x=-\frac{2}{3}$ $\qquad ah: y=\frac{1}{3}$ $\qquad D_f=\Re-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ $\quad I_f=\Re-\left\{\frac{1}{3}\right\}$



<u>Ejercicio Nº2</u>

Dadas las funciones, se pide: a) Determinar si son o no homográficas y, en caso afirmativo, dar la ecuación de la forma canónica; b) Ecuaciones de las asíntotas; c) Dominio e imagen d) Ceros

a) $f(x)=\frac{4x-1}{2x+3}$ $\qquad$ b) $f(x)=\frac{x-2}{5x-10}$ $\qquad$ c) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad$ d) $f(x)=\frac{2{,}5x+20}{5x+50}$

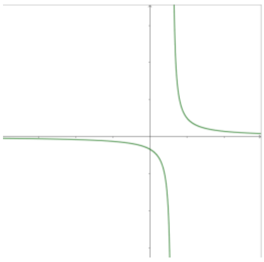
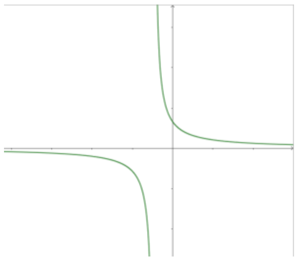
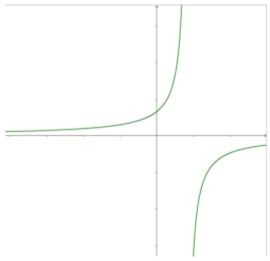
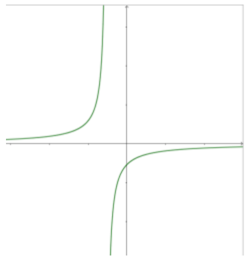
e) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{8+2x}{x}$ $\qquad$ f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad$ g) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

Ejercicio Nº3

Escribir debajo de cada gráfico la función que le corresponde

$f(x) = \frac{a}{bx+c}\ a < 0\ \wedge\ b > 0\ \wedge c < 0$ $\qquad$ $h(x) = \frac{a}{bx+c}\ a > 0\ \wedge\ b > 0\ \wedge c < 0$

$g(x) = \frac{a}{bx+c}\ a < 0\ \wedge\ b < 0\ \wedge c < 0$ $\qquad$ $m(x) = \frac{a}{bx+c}\ a > 0\ \wedge\ b < 0\ \wedge c < 0$

Ejercicio Nº4

Escribir una función homográfica tal que $f: R - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to R - \{2\}\ \wedge f(0) = -3$

Ejercicio Nº5

Dadas las siguientes funciones, se pide forma canónica, ecuaciones de las asíntotas, gráficos correspondientes, ceros, intervalos donde la función es positiva y creciente.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{5-x}$ $\qquad$ b) $\mathrm{f(x)} = \frac{-2\mathrm{x}-3}{\mathrm{x}-1}$

Ejercicio Nº6

Calcular el valor de K para que cada función cumpla con la condición pedida

a) La asíntota vertical de $f(x) = \frac{x-2}{kx+3}$ sea $\mathrm{x} = 2$

b) La asíntota horizontal de $j(x) = \frac{1-kx}{3x-7}$ sea $\mathrm{y} = -\frac{1}{2}$

c) La ordenada al origen de $g(x) = \frac{x+k}{1-2x}$ sea $\mathrm{y} = \frac{3}{4}$

d) La raíz de $a(x) = \frac{kx-5}{x-2}$ sea $\mathrm{x} = -\frac{2}{3}$

Ejercicio Nº7

Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) La función $f(x) = \frac{1}{x+3}$ corta al eje x.

b) $h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ es la recta $\mathrm{h(x) = x - 1/}\quad \mathrm{h: R - \{-1\} \to R}$

c) Una función racional puede no tener asíntota vertical

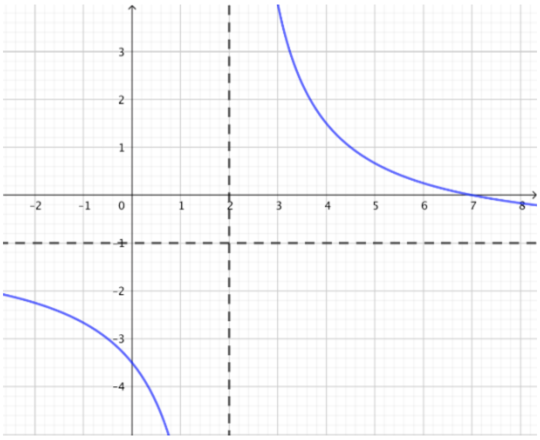
d) La asíntota horizontal de $k(x) = \frac{1}{x} + 2\ es\ y = 2$

e) La asíntota horizontal de $d(x) = -(x+3)^{-1}\ es\ x = 3$

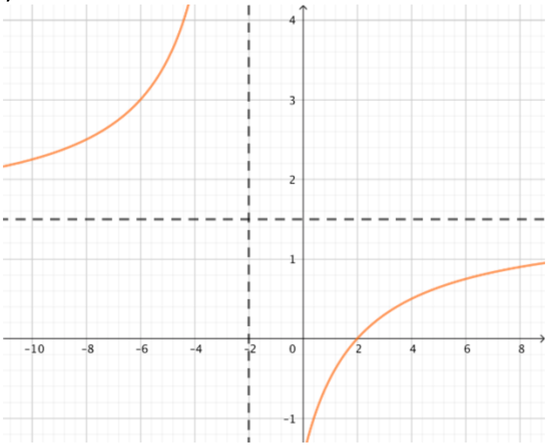
Ejercicio Nº8

Para cada uno de los siguientes gráficos de funciones homográficas, establecer la función de la forma $f(x) = \frac{k}{x+c} + d$ (donde k, c y d son números reales y k≠0) que se corresponda con cada gráfico y determinar en forma analítica la ordenada al origen y la raíz.

a)



b)



Ejercicio Nº9

Sea $f: A \to B / f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Hallar A y B mayorantes para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

Ejercicio Nº10

Representar, determinar el conjunto imagen y clasificar en $\Re$. En el caso de no ser biyectiva, buscar una restricción que lo sea y hallar la inversa.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Ejercicio Nº11

Graficar:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \left| \frac{1}{x-2} + 3 \right|$

c) $f(x) = \left| \frac{-2}{x-2} + 3 \right|$

d) $f(x) = \left| \frac{-2}{x-2} \right| + 3$

e) $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$

Ejercicio Nº12

Hacia un tanque de agua que contiene agua pura fluye agua salada de modo tal que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t)=\frac{t}{10t+100}(t>0)$

Graficar c y discutir el comportamiento de la función cuando $t \to \infty$. Interpretar

Ejercicio Nº13

Se estudian muestras de 10 gramos de suelo y se trata de determinar el contenido de humedad w (en porcentaje) en función de la masa seca s (en gramos) del suelo a partir de la función:

$w(s) = 100\frac{10-s}{s}$

a. Calcular el contenido de humedad del suelo cuando s=7,9gr; s=9,5gr; s=10gr.

b. ¿Cuál será la masa seca cuando w=100; w=50; w=0,5?

c. Determinar cuál es el dominio y la imagen de esta función en el contexto del problema

d. Realizar un gráfico aproximado en el contexto del problema

Ejercicio Nº14

Se desea envasar 120 litros de aceite en botellas de igual capacidad. La cantidad de botellas que se necesitarán depende de la capacidad de cada botella. Les proponemos completar la siguiente tabla:

Capacidad de c/botella (l)	Cant. total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	
2		
3		
5		
1/2		
3/2		

Hallar una función que permita conocer la cantidad de botellas que se necesitan conociendo la capacidad de cada una de ellas.

Operatoria con expresiones racionales

Ejercicio Nº15

Reducir a su mínima expresión haciendo las restricciones necesarias:

a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^3+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^3}{8}-1}{\dfrac{x^2}{4}-1}:(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)$

c) $\left(x+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+2x}\right)$

d) $\left(\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x+3}\right).\dfrac{x^2-x+3(x-1)}{25x^2-81}$

e) $\dfrac{x^2-21x-7}{7-x}:\left(\dfrac{4x+1}{7+x}+\dfrac{2x+1}{7-x}\right)$

f) $\dfrac{\left(-\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1-x}\right).\left(\dfrac{2(1-x)^2}{x^2+4x+4}+\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}\right)}{\dfrac{x}{4-x^2}}$

Ejercicio Nº16

Hallar uma expresión “simplificada” equivalente a $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Ejercicio Nº17

Hallar A y B para que:

a) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{3x-1}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{2A}{2x-1}-\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{2x+13}{2x^2+5x-3}$

Ejercicio Nº18

(Optativo) Descomponer en fracciones simples:

a) $\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}$

c) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

d) $\dfrac{x^5-1}{x^2+x}$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con expresiones racionales

Ejercicio Nº19

Resolver las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta en cada caso el dominio de definición.

a) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

b) $\dfrac{x}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-3}$

c) $\dfrac{x-6}{x+4}+\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{13x-48}{x^2+6x+8}$

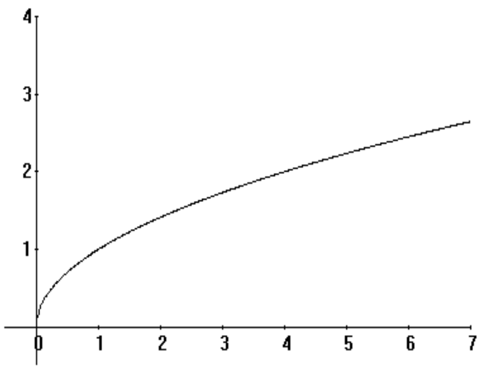
Ejercicio Nº20

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones analítica y gráficamente:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{x+3}{x-1} \\ y = x-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{2x+4}{x+3} \\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x+1} \\ y = -1 \end{cases}$

Funciones cuyas fórmulas contienen expresiones irracionales

a) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{x}$, $I_f = \mathbb{R}_0^+$ ceros: x=0. Es estrictamente creciente.



Ejercicio Nº21

Teniendo en cuenta la gráfica de $f: A \to \mathbb{R}\ (A \subset \mathbb{R}) /$ $f(x)=\sqrt{x}$ y mediante simetrías y/o desplazamientos.

Graficar:

a) $f(x) = -\sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$

En todos los casos obtener: dominio máximo, ceros, conjunto imagen. Analizar si son biyectivas y obtener las funciones inversas (si es necesario restringir).

Ejercicio Nº22

Dada $f: A \to \mathbb{R}\ (A \subset \mathbb{R}) / f(x) = \sqrt{1-x^2}$ se pide: a) Dominio máximo, b) Conjunto imagen, c) Ceros, d) Gráfica, e) Clasifique, f) Buscar una restricción biyectiva, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

Ejercicio Nº23

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{|x| + 1}$ se pide:

a) Dominio máximo, b) conjunto imagen, c) ceros, d) gráfico, e) clasificación, f) intervalo en que la función es positiva y creciente simultáneamente, g) si no es biyectiva buscar una restricción que lo sea, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

Ejercicio Nº24

Sea $f: \Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Clasificar. Hallar la inversa (si es necesario restringir). Graficar ambas.

Ejercicio Nº25

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ \dfrac{1}{2}(x-2)^2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Se pide: representar, conjunto imagen, ceros, clasificar, inversa (si es necesario buscar una restricción).

Ejercicio Nº26

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, teniendo en cuenta las restricciones:

a) $\sqrt{1-x} = \sqrt{x^2 - 5}$

b) $x + 2 = 13 - \sqrt{x-5}$

c) $\sqrt{x^2 - 5} + 7 = x^2$

d) $x^2 + \sqrt{x^2 + 9} = 21$

e) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

Respuestas Unidad 5

1. a) R – { 1}, no tiene ceros

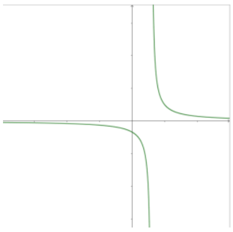
   b) R – {-3, 3} , no tiene ceros

   c) R – {-2, 1/3, 2} , no tiene ceros

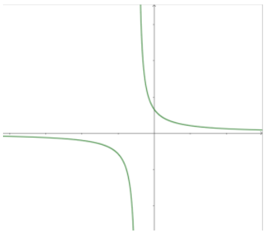
2.

	Dominio	Imagen	Ceros	F. Canónica	Asíntotas
a)	R –{-3/2}	R-{2}	1/4	$y=\frac{-\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}}+2$	AV: x= -3/2 AH: y=2
b)	R-{2}	{1/5}	No tiene		
c)	R-{-2,2}	R-{0, ¼}	No tiene	y= $\frac{1}{x+2}\ \forall x\neq 2, x\neq -2$	AV: x= -2 AH: y=0
d)	R-{10}	R-{1/2}	-8	y=$\frac{-1}{x+10}+\frac{1}{2}$	AV: x= -10 AH: y=1/2
e)	R-{0}	R-{2}	-13/2	$y=\frac{13}{x}+2$	AV: x= 0 AH: y=2
f)	R-{1}	R-{2}	-1		
g)	R-{1}	$\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$	No tiene		

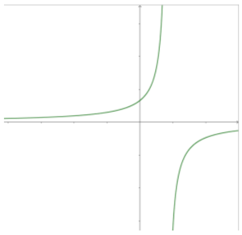
3.



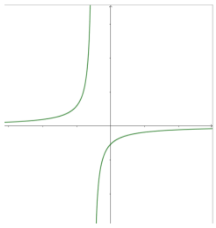
h(x)



m(x)



f(x)



g(x)

4. $f(x) = \frac{2x-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}$

5.

	Ceros	F. Canónica	Asíntotas	Int de Posit.	Creciente
a)	-1/2	$y = -2 + \frac{11}{5-x}$	AV: x= 5 AH: y=-2	$\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$	(-∞;5) y (5;+∞)
b)	-3/2	$y = -2 - \frac{5}{x-1}$	AV: x= 1 AH: y=-2	$\left(-\frac{3}{2},1\right)$	(-∞;1) y (1;+∞)

6. a) $k = -\frac{3}{2}$ b) $k = \frac{3}{2}$ c) $k = \frac{3}{4}$ d) $k = -\frac{15}{2}$

7. a) F; b) V; c) V; d) V; e) F

8. a) $f(x) = \frac{5}{x-2} - 1$; $f(0) = -\frac{7}{2}$; $x = 7$

b) $f(x) = \frac{-6}{x+2} + \frac{3}{2}$; $f(0) = -\frac{3}{2}$; $x = 2$

9. A: R –{ 1} B: R –{2}, $f(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$ $f^{-1}; R - \{2\} \to R - \{1\} / f^{-1}(x) = \frac{2}{x-2} + 1$

10. $\begin{array}{l} D_F : R \\ I_f : (-\infty, 1] \end{array}$ No sobreyectiva, no inyectiva

12. Al trascurrir el tiempo tendiendo a infinito la concentración tiende a 0,10, aunque nunca alcanza ese valor.

13. a) $w(7{,}9) \cong 26{,}58$; $w(9{,}5) \cong 5{,}26$; $w(10) = 0$

b) $s = 5$; $s = \frac{20}{3}$; $s = \frac{2000}{199}$

c) Dom=[5;10] Im=[0;100]

14.

Capacidad de c/botella (l)	Cant. total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	120
2	60	120
3	40	120
5	24	120
1/2	240	120
3/2	80	120

$$C(k) = \frac{120}{k}$$

15. a) 0 x ≠ -1

b) $\frac{2}{x+2}$ $x \neq 2$ $x \neq$ -2

c) $\frac{x-1}{x}$ $x \neq 1$

d) $\frac{1}{5x+9}$ x ≠1; -3; 9/5; -9/5

e) $\frac{7+x}{-2}$ x≠ 7, -7; $\frac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$

f) $x^2 - 3x + 2$ x≠ -2; -1; 0; 1; 2

16. $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+1}$

17. a) A=2/3 B=7/3 b) A= 2 y B=1

18. a) $\frac{0.5}{x-1} + \frac{0.5}{x+1}$ b) $2 + \frac{5}{x-2}$

c) $x^2+1-\frac{0.5}{x+1}+\frac{0.5}{x-1}$ d) $x^3-x^2+x-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

19. $a) S=\{-3;18\}$
$b) S=\{-2\}$
$c) S=\{2,6\}$

20. a) $S=\{(0,-3)\ (5;2)\}$ b) $S=\{(-1,1)\ (-5;3)\}$ c) $S=\{(-2,-1)\}$

21.

a) Dominio máximo reales positivos con el cero, cero : x= 0. Conjunto Imagen; reales negativos con el cero, no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^- \to \Re_0^+ / f^{-1}(x)=x^2$

b) Dominio máximo reales mayores o iguales que 1, cero: x= 1. Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva $f^{-1}:\Re_0^+ \to [1,+\infty)/ f^{-1}(x)=x^2\ +1$

c) Dominio máximo reales mayores o iguales que -1, cero: x= -1. Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva: $f^{-1}:\Re_0^+ \to [-1,+\infty)/ f^{-1}(x)=x^2\ -1$

22.

Dominio maximo: [-1:1]; Imagen [0;1], No es biyectiva restricción para que lo sea Dom:[0;1],Im:[0;1]
$f^{-1}:[0;1] \to [0;1]/f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$

23. Dominio máximo: R
Imagen $[1,+\infty)$, no tiene ceros. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom:$\mathbb{R}_0^+$ e Im: $[1,+\infty)$
$f^{-1}:[1,+\infty)\to \mathbb{R}_0^+ / f^{-1}(x)=x^2-1$

La f es creciente y positiva en todo su dominio

24. Es biyectiva. $f^{-1}:R\to R/ f^{-1}(x)=x^3+1$

25. Cero: x=2,

Imagen $[0,+\infty)$. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom: $[2,+\infty)$ Imagen $[0,+\infty)$.
$f^{-1}:\Re_0^+ \to [2,+\infty)\ /f^{-1}(x)=x^2+2$

26. $a)\ \ S = \{-3\}$

$b) S = \{9\}$

$c) S = \{-3,3\}$

$d) S = \{4,-4\}$

$e) S = \{3\}$